Lista zadań nr 7

Wstęp do Inżynierii Finansowej

Dodatkowa literatura pomocna do rozwiązania zadań (uzupełniająca wykład): John C. Hull, *Options, futures and other derivatives.*

Zadanie 1. (Parytet PUT-CALL) (2 punkty)
Rozważmy dwie opcje europejskie: CALL i PUT, na akcję niewypłacającą dywidend[1], z tą samą ceną wykonania K i zapadalnością T oraz następujące dwa portfele:

- 1 long CALL + Ke^{-rT} w inwestycji wolnej od ryzyka.
- 1 long PUT + 1 aktywo bazowe.

Analizując powyższe dwa portfele uzasadnij, że – aby nie było arbitrażu – musi zachodzić tzw. *parytet PUT-CALL*, tzn. następująca równość:

$$C_E + Ke^{-rT} = P_E + S_0,$$

gdzie C_E i P_E są cenami opcji odpowiednio CALL i PUT z zadania, r jest stopą wolną od ryzyka, a S_0 jest ceną spot aktywa bazowego.

Zadanie 2. (2 punkty)
Załóżmy, że cena pewnej opcji call na akcję niewypłacającą dywidend, wygasającej za 6 miesięcy, z ceną wykonania 30 zł, wynosi 2 zł. Dzisiejsza cena akcji wynosi 29 zł. Jaka będzie cena opcji put na to samo aktywo bazowe, zapadającej za 6 miesięcy i z ceną wykonania 30 zł? Załóż stopę wolną od ryzyka $r = 2\%$ oraz oprocentowanie ciągłe. Wskaż portfel umożliwiający arbitraż, gdyby cena opcji put wynosiła 2 zł. Uzasadnij, dlaczego wskazany portfel faktycznie powoduje arbitraż.

Zadanie 3. (2 punkty)
Rozważmy opcję europejską call na akcję niewypłacającą dywidend z ceną wykonania K i zapadalnością T. Uzasadnij, że aby nie było arbitrażu, musi zachodzić następująca nierówność:

$$C_E \geq S_0 - Ke^{-rT},$$

gdzie C_E jest ceną tej opcji, S_0 ceną spot aktywa bazowego, a r jak zwykle stopą wolną od ryzyka. Zrób to konstruując odpowiedni portfel[2], rozważając możliwe przyszłe scenariusze i wskazując arbitraż.

---

[1] lub ogólniej: dowolne aktywo bazowe, które w trakcie życia opcji nie wiąże się z żadnymi dodatkowymi przepływami pieniężnymi, czyli inne niż np. waluty zagraniczne lub towary związane z kosztami przechowywania.

[2] Podpowiedź: gdyby cena opcji była niższa, to opłacałoby się nam ją kupić, ale jednocześnie chcielibyśmy zadbać, aby portfel był niewrażliwy na przyszłą cenę akcji S_T

Zadanie 4. (2 punkty)
Rozważmy opcję europejską put na akcję niewypłacającą dywidend z ceną wykonania K i zapadalnością T. Uzasadnij, że aby nie było arbitrażu, musi zachodzić następująca nierówność:

$$P_E \geq Ke^{-rT} - S_0,$$

gdzie P_E jest ceną tej opcji, S_0 ceną spot aktywa bazowego, a r jak zwykle stopą wolną od ryzyka. Zrób to podobnie jak w poprzednim zadaniu, konstruując odpowiedni portfel, rozważając możliwe przyszłe scenariusze i wskazując arbitraż.

Zadanie 5. (BULL i BEAR spread) (2 punkty)
Rozważ portfel (tzw. strategię opcyjną typu *bull spread*) składający się z dwóch opcji europejskich na to samo aktywo bazowe z tą samą zapadalnością:

- 1 long call@K_1,
- 1 short call@K_2,

gdzie $K_1 < K_2$ są ich cenami wykonania. Narysuj wykres payoffu tego portfela oraz zastanów się, w jakiej sytuacji inwestor może chcieć skonstruować taki portfel.

To samo zrób dla tzw. strategii typu *bear spread*, tzn. portfela złożonego z dwóch opcji europejskich na to samo aktywo z tą samą zapadalnością, ale tym razem:

- 1 short put@K_1,
- 1 long put@K_2,

gdzie $K_1 < K_2$.

Zadanie 6. (STRADDLE i STRANGLE) (2 punkty)
Rozważ portfel (tzw. strategię opcyjną typu *straddle*) składający się z dwóch opcji europejskich na to samo aktywo bazowe z tą samą zapadalnością:

- 1 long put@K,
- 1 long call@K,

gdzie K jest ich ceną wykonania. Narysuj wykres payoffu tego portfela oraz zastanów się, w jakiej sytuacji inwestor może chcieć skonstruować taki portfel.

To samo zrób dla tzw. strategii typu *strangle*, tzn. portfela złożonego z dwóch opcji europejskich na to samo aktywo z tą samą zapadalnością, ale tym razem:

- 1 long put@K_1,
- 1 long call@K_2,

gdzie $K_1 < K_2$. Wyjaśnij krótko różnice między tymi dwoma strategiami.

Zadanie 7. (2 punkty)
Niech c_1, c_2, c_3 będą cenami trzech opcji call na to samo aktywo z cenami wykonania odpowiednio K_1, K_2 i K_3. Załóżmy, że opcje te mają taką samą zapadalność a ceny wykonania spełniają $K_1 < K_2 < K_3$ oraz $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$. Udowodnij, że aby nie było arbitrażu musi być spełniona zależność

$$c_2 \leq \frac{c_1 + c_3}{2}.$$