Lista zadań nr 5

Wstęp do Inżynierii Finansowej

Zadanie 1. Załóżmy, że chciałbyś posiadać obligację z rocznym kuponem w wysokości 5% nominału o zapadalności 4 lata. Na rynku dostępne są jednak tylko następujące obligacje:

- obligacja zerokuponowa o zapadalności 5 lat,
- obligacja z rocznym kuponem w wysokości 4% nominału o zapadalności 5 lat,
- obligacja z rocznym kuponem w wysokości 2% nominału o zapadalności 4 lata.

Załóżmy, że powyższe trzy obligacje możesz kupować lub emitować, w dowolnych ilościach oraz że wszystkie posiadają identyczny nominał. W jaki sposób powinieneś skonstruować portfel składający się z powyższych trzech obligacji, aby zreplikować tę obligację, którą chciałbyś posiadać? Wyznacz również wartości obecne i duracje wszystkich obligacji występujących w tym zadaniu, przyjmując oprocentowanie ciągłe ze stopą nominalną $r = 0.02$.

Zadanie 2. (2 punkty) Chcesz zabezpieczyć sprzedaną rentę wypłacającą z dołu 100 zł przez 7 kolejnych lat. Dysponujesz dwoma obligacjami:

- obligacja A: zerokuponowa o nominale 100 zł i zapadalności 3,
- obligacja B: kuponowa o nominale 100 zł, ze stopą kuponową $c = 0.05$, kuponami wypłacanymi raz w roku (z dołu) oraz zapadalnością 8.

Wyznacz skład portfela zabezpieczającego, składającego się z a jednostek obligacji typu A oraz b jednostek obligacji typu B. Zrób to w taki sposób, aby zarówno jego wartość obecna, jak i duracja były równe sprzedanej rencie. Wyznaczając ten portfel możesz się wzorować na przykładzie opisanym w notatkach do wykładu. Przyjmij model oprocentowania ciągłego z natężeniem oprocentowania $r = 0.02$ (spójnie dla obligacji oraz renty) oraz że ceny obligacji są równe im wartościom obecnym. Jak zmienią się wartości obecne renty oraz skonstruowanego portfela zabezpieczającego, jeśli nagle natężenie oprocentowania spadnie z r na $r - 0.5\%$?

Zadanie 3. (2 punkty) *Zad. 5/69 EA(MF).* Rozważmy n-letnią obligację o nominale 1000 PLN płacącą roczne kupony w wysokości 5% nominału. Niech $\mathrm{dur}(n)$ oznacza durację rozważanej obligacji wyznaczoną w oparciu o roczną stopę wolną od ryzyka wynoszącą 4%. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dur}(n)$. Narysuj wykres $\mathrm{dur}(n)$.

Zadanie 4. (2 punkty) Rozważmy obligację 0-kuponową, wygasającą w chwili T. Jej wartość w chwili $t \in [0, T]$ oznaczać będziemy przez $V(t)$. Załóżmy, że $V(t)$ spełnia następujące równanie różniczkowe z warunkiem początkowym:

$$V'(t) = rV(t), \quad V(0) = V_0,$$

co można zapisać inaczej w postaci całkowej jako:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t rV(s)ds.$$

Zapis ten jest równoważny następującej postaci różniczkowej, najczęściej używanej na Inżynierii Finansowej 1:

$$dV(t) = rV(t)dt, \quad V(0) = V_0.$$

1. Jaka jest jawna postać funkcji $V(t)$?

2. Ile wynosi V_0, jeżeli obligacja ta w chwili T wypłaca 1?

3. Przypomnij sobie schemat Eulera. Niech dt oznacza krok czasu w tym schemacie. Zaczynając od końca, tzn. od $V(T) = 1$, napisz jakiego równania na $V(t - dt)$ użyjesz, aby otrzymać przybliżoną tym schematem wartość obligacji w chwili 0. Przyjmij dla uproszczenia, że $T = k \cdot dt$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

4. Zaimplementuj wycenę tej obligacji przy użyciu tego schematu. Stwórz w tym celu funkcję zależną od r, t, T oraz dt. Narysuj wykres $V(t)$ używając swojej funkcji dla parametrów $T = 5$, $r = 0.1$, $dt = 0.5$.

5. Rozważ teraz obligację wypłacającą dyskretne kupony. Przerób funkcję wyceniającą schematem Eulera z poprzednich punktów tak, aby uwzględniała te kupony. Przyjmij dla ułatwienia, że kupony wypłacane są w momentach odpowiadającym krokom schematu Eulera, tzn. że każdy kupon jest wypłacany w momencie $i \cdot dt$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$. Narysuj wykres wartości $V(t)$ dla kuponów o wysokości $0.1, 0.3, 0.2$ wypłacanych odpowiednio w chwilach $1.5, 2.5, 4.0$.

Zadanie 5. (2 punkty) *Na bazie zad. 3/52 EA(MF).* Portfel inwestycyjny zawiera następujące rodzaje instrumentów finansowych:

- 10-letnie obligacje z kuponem o wartości 6% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku i wartością wykupu równą wartości nominalnej,

- 15-letnie obligacje zerokuponowe,

- 25-letnie obligacje z kuponem o wartości 6% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku i wartością wykupu równą wartości nominalnej,

- 50-letnie obligacje zerokuponowe.

1. Oblicz wartości obecne i duracje poszczególnych rodzajów instrumentów z portfela przy efektywnej rocznej stopie procentowej $i = 6\%$.

2. Duracja całego portfela wynosi 22, natomiast duracja portfela składającego się tylko z obligacji 10, 15 i 50-letnich wynosi $24,27$. Wyznacz udział procentowy obligacji 25–letnich w portfelu, przy założeniu, że efektywna roczna stopa procentowa jest równa 6%.

Zadanie 6. (2 punkty) Zapisz wzór na wypukłość obligacji zerokuponowej (nie używając symbolu pochodnej) zakładając model oprocentowania ciągłego. Wyprowadź go również dla modelu oprocentowania złożonego z kapitalizacją roczną. Następnie zrób to samo dla obligacji kuponowych. Napisz odpowiednie funkcje w R liczące wypukłości w obu modelach oprocentowania i sprawdź, jakie wychodzą wartości dla stopy procentowej $y = 0.02$, zapadalności $T = 10$ lat oraz stopy kuponowej $c = 0.05$ (kupon wypłacany raz w roku).