

Lista zadań nr 3

Wstęp do Inżynierii Finansowej

Zadanie 1. (2 punkty) Rozważ m -krotne renty pewne n -letnie z dołu (ozn. $a_{\overline{n}|}^{(m)}$) oraz z góry $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$. Tego typu renty wypłacają kwotę $\frac{1}{m}$ co $\frac{1}{m}$ -tą część roku. Wyprowadź wzory na ich wartości obecne, zakładając roczną nominalną stopę procentową $i^{(m)}$ i oprocentowanie złożone. Wzór na rentę wypłacaną z góry wyraż przy użyciu stopy procentowej z góry przy kapitalizacji m -krotnej, czyli $d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}$. Zaimplementuj liczenie wartości obecnych tych rent jako sum przepływów pieniężnych (tj. nie jako gotowy wzór) i sprawdź, czy otrzymywane wartości zgadzają się z wartościami wynikającymi ze wzoru. Sprawdź to na przykładzie $n = 10$, $m = 4$ oraz $i^{(4)} = 3\%$.

Zadanie 2. (3 punkty) Rozważ nieskończoną rentę rosnącą z dołu, w której wypłaty następują m razy w ciągu roku, ale nie są stałe, lecz rosną q razy w ciągu roku (zakładamy, że q dzieli m). Wypłaty z takiej renty można opisać następującą tabelką:

chwila	wypłata
$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{1}{q}$	$\frac{1}{mq}$
$\frac{1}{q} + \frac{1}{m}, \frac{1}{q} + \frac{2}{m}, \dots, \frac{2}{q}$	$\frac{2}{mq}$
itd...	

Wyprowadź wzór na wartość obecną tej renty – ozn. $(I^{(q)}a)_{\infty|}^{(m)}$. Załóż roczną nominalną stopę procentową $i^{(m)}$ i oprocentowanie złożone. Następnie wyprowadź wzór na wartość obecną analogicznej renty, ale kończącej się po n latach – ozn. $(I^{(q)}a)_{\overline{n}|}^{(m)}$

Zadanie 3. (2 punkty) Pewna pożyczka jest spłacana w 20 ratach po 1000 zł na koniec każdego roku od pierwszego włącznie. Po 10-tym roku pożyczkobiorca spłaca dodatkowo 2000 zł. Jak powinna być dostosowana rata na lata 11-20, jeśli efektywna roczna stopa procentowa w całym okresie wynosi $i = 7\%$?

Zadanie 4. (2 punkty) Rozwiąż zadanie 7 z 80. egzaminu aktuarialnego (2019-03-04) w części z matematyki finansowej.

Zadanie 5. (2 punkty) Rozważ rentę nieskończoną wypłacającą:

- 1 na koniec pierwszego roku i potem co 4 lata,
- 3 na koniec drugiego roku i potem co 4 lata,
- 5 na koniec trzeciego roku i potem co 4 lata,
- 7 na koniec czwartego roku i potem co 4 lata.

Jaka jest wartość obecna tej renty, jeśli efektywna roczna stopa procentowa wynosi $i = 5\%$?

Zadanie 6. Przy przejściu na emeryturę firma A oferuje w ramach programu lojalnościowego wybór dodatkowego świadczenia. Do wyboru są dwie opcje:

1. renta bezterminowa wypłacająca 1 na początku każdego roku,
2. renta bezterminowa wypłacająca 1.8 na początku każdego kolejnego roku o numerze nieparzystym.

Którą ofertę powinno się wybrać przy założeniu, że efektywna stopa procentowa wynosi $i = 0.05$? Przy jakiej wartości druga z ofert stanie się bardziej opłacalna? Pomiń w tym zadaniu prawdopodobieństwo śmierci – załóż, że renta jest nieskończona (np. dziedziczna).

Zadanie 7. (2 punkty) Rozważmy model nieskończonej renty z dołu, która na początku wypłaca 1 i jej wypłata rośnie o 1 co 2 lata (tzn. po pierwszym i drugim roku wypłaca po 1, po trzecim i czwartym po 2 itd.). Wiedząc, że nieskończona renta rosnąca z dołu jest warta 100, policz wartość obecną renty z zadania.

Zadanie 8. (2 punkty) Pewna egzotyczna renta wypłaca $\frac{1}{n}$ na końcu pierwszego roku, potem jej wypłata rośnie co roku o $\frac{1}{n}$ aż do końca roku n , a następnie maleje co roku o $\frac{1}{n}$ aż do 0. Przy założeniu oprocentowania ciągłego i stopy nominalnej $i = 0.05$ policz dla jakiej wartości n ta renta będzie najwięcej warta (w tym zadaniu wystarczy, że wyznaczysz n numerycznie).