

## Lista zadań nr 3

### Wstęp do Inżynierii Finansowej

**Zadanie 1. (1pkt)** Rozważ  $m$ -krotne renty pewne  $n$ -letnie z dołu (ozn.  $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ ) oraz z góry  $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ . Tego typu renty wypłacają kwotę  $\frac{1}{m}$  co  $\frac{1}{m}$ -tą część roku. Wyprowadź wzory na ich wartości obecne, zakładając roczną nominalną stopę procentową  $i^{(m)}$  i oprocentowanie złożone. Wzór na rentę wypłacaną z góry wyraż przy użyciu stopy procentowej z góry przy kapitalizacji  $m$ -krotnej, czyli  $d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}$ . Zaimplementuj liczenie wartości obecnych tych rent jako sum przepływów pieniężnych (tj. nie jako gotowy wzór) i sprawdź, czy otrzymane wartości zgadzają się z wartościami wynikającymi ze wzoru. Sprawdź to na przykładzie  $n = 10$ ,  $m = 4$  oraz  $i^{(4)} = 3\%$ .

**Zadanie 2. (2pkt)** Rozważ nieskończoną rentę rosnącą z dołu, w której wypłaty następują  $m$  razy w ciągu roku, ale nie są stałe, lecz rosną  $q$  razy w ciągu roku (zakładamy, że  $q$  dzieli  $m$ ). Wypłaty z takiej renty można opisać następującą tabelką:

chwila	wypłata
$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{1}{q}$	$\frac{1}{mq}$
$\frac{1}{q} + \frac{1}{m}, \frac{1}{q} + \frac{2}{m}, \dots, \frac{2}{q}$	$\frac{2}{mq}$
itd...	

Wyprowadź wzór na wartość obecną tej renty – ozn.  $(I^{(q)}a)_{\overline{\infty}|}^{(m)}$ . Załóż roczną nominalną stopę procentową  $i^{(m)}$  i oprocentowanie złożone. Następnie wyprowadź wzór na wartość obecną analogicznej renty, ale kończącej się po  $n$  latach – ozn.  $(I^{(q)}a)_{\overline{n}|}^{(m)}$

**Zadanie 3. (1pkt)** Pewna pożyczka jest spłacana w 20 ratach po 1000 zł na koniec każdego roku od pierwszego włącznie. Po 10-tym roku pożyczkobiorca spłaca dodatkowo 2000 zł. Jak powinna być dostosowana rata na lata 11-20, jeśli efektywna roczna stopa procentowa w całym okresie wynosi  $i = 7\%$ ?

**Zadanie 4. (1pkt)** Rozwiąż zadanie 7 z 80. egzaminu aktuarialnego (2019-03-04) w części z matematyki finansowej.

**Zadanie 5. (2pkt)** Rozważ rentę nieskończoną wypłacającą:

- 1 na koniec pierwszego roku i potem co 4 lata,
- 3 na koniec drugiego roku i potem co 4 lata,
- 5 na koniec trzeciego roku i potem co 4 lata,
- 7 na koniec czwartego roku i potem co 4 lata.

Jaka jest wartość obecna tej renty, jeśli efektywna roczna stopa procentowa wynosi  $i = 5\%$ ?

**Zadanie 6. (1pkt)** Przy przejściu na emeryturę firma A oferuje w ramach programu lojalnościowego wybór dodatkowego świadczenia. Do wyboru są dwie opcje:

1. renta bezterminowa wypłacająca 1 na początku każdego roku,
2. renta bezterminowa wypłacająca 1.8 na początku każdego kolejnego roku o numerze nieparzystym.

Którą ofertę powinno się wybrać przy założeniu, że efektywna stopa procentowa wynosi  $i = 0.05$ ? Przy jakiej wartości druga z ofert stanie się bardziej opłacalna? Pomiń w tym zadaniu prawdopodobieństwo śmierci – załóż, że renta jest nieskończona (np. dziedziczna).

**Zadanie 7. (2pkt)** Rozważmy model nieskończonej renty z dołu, która na początku wypłaca 1 i jej wypłata rośnie o 1 co 2 lata (tzn. po pierwszym i drugim roku wypłaca po 1, po trzecim i czwartym po 2 itd.). Wiedząc, że nieskończona renta rosnąca z dołu jest warta 100, policz wartość obecną renty z zadania.

**Zadanie 8. (1pkt)** Pewna egzotyczna renta wypłaca  $\frac{1}{n}$  na końcu pierwszego roku, potem jej wypłata rośnie co roku o  $\frac{1}{n}$  aż do końca roku  $n$ , a następnie maleje co roku o  $\frac{1}{n}$  aż do 0. Przy założeniu oprocentowania ciągłego i stopy nominalnej  $i = 0.05$  policz dla jakiej wartości  $n$  ta renta będzie najwięcej warta (w tym zadaniu wystarczy, że wyznaczysz  $n$  numerycznie).