Wrocław, 5 marca 2021

Lista zadań nr 3

Symulacje i algorytmiczne zastosowanie łańcuchów Markowa

Zadanie 1. Wyobraźmy sobie samotnego króla na szachownicy, wykonującego wszystkie możliwe ruchy z jednakowym prawdopodobieństwem (tzn. wybiera losowo każdy z sąsiadujących kwadratów i tam się porusza).

- Czy łańcuch Markowa odpowiadający powyższemu błądzeniu jest nieokresowy i/lub nieredukowalny?
- Wskaż rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Zadanie 2. Niech $(X_0, X_1, \ldots)$ będzie odwracalnym łańcuchem z przestrzenią stanów E, macierzą przejść $\mathbf{P}$ i rozkładem odwracalnym π. Pokaż, że jeśli łańcuch zaczął z rozkładem początkowym $\mu = \pi$, to wtedy dla każdego $n \in \mathbf{N}$ i każdego $\mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n} \in E$ zachodzi

$$P(X_0 = \mathbf{e}_{i_0}, X_1 = \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, X_n = \mathbf{e}_{i_n}) = P(X_0 = \mathbf{e}_{i_n}, X_1 = \mathbf{e}_{i_{n-1}}, \ldots, X_n = \mathbf{e}_{i_0}).$$

Zadanie 3. Udowodnij, że jeśli macierz prawdopodobieństw przejść łańcucha $\mathbf{P}$ jest *podwójnie stochastyczna*, tzn. zarówno wszystkie wyrazy w wierszach jak i w kolumnach, sumują się do 1, to rozkładem stacjonarnym tego łańcucha jest rozkład jednostajny.

Zadanie 4. Niech $\mathbf{P}$ będzie macierzą przejścia ergodycznego łańcucha X z rozkładem stacjonarnym π. Macierz łańcucha odwróconego w czasie $\tilde{X}$ definiuje się następująco $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \frac{\pi(\mathbf{e}_1)}{\pi(\mathbf{e}_2)}\mathbf{P}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (łańcuch jest odwracalny jeśli $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$). Pokaż, że rozkładem stacjonarnym łańcucha $\tilde{X}$ jest również π.

Zadanie 5. Niech $\mathbf{P}$ będzie macierzą przejścia ergodycznego łańcucha X z rozkładem stacjonarnym π. Zdefiniujmy: $\mathbf{M} := \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{P}}$. Pokaż, że

- $\mathbf{M}$ jest macierzą stochastyczną
- π jest rozkładem stacjonarnym łańcucha o macierzy przejść $\mathbf{M}$. Czy łańuch ten jest odwracalny?

Zadanie 6. [Proces urodzin i śmierci]. Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P}(i,j) = \begin{cases} p_i & \text{jeśli} j = i+1 \\ q_i & \text{jeśli} j = i-1 \\ r_i & \text{jeśli} j = i \end{cases}$$

gdzie $p_0 > 0, q_0 = 0, p_N = 0, q_N > 0$ oraz dla każdego $i \in \{1, \ldots, N-1\}$: $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$. Pokaż, że taki łańcuch jest odwracalny.