

LISTA ZADAŃ NR 2

SYMULACJE I ALGORYTMICZNE ZASTOSOWANIE ŁAŃCUCHÓW MARKOWA

Zadanie 1. Niech X będzie nieredukowalnym i nieokresowym łańcuchem Markowa na przestrzeni $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$ o macierzy przejść \mathbf{P} . Określmy $T_{i,j} = \min\{n \geq 1 : X_n = \mathbf{e}_j \mid X_0 = \mathbf{e}_i\}$ (przyjmując konwencję: $T_{i,j} = \infty$ jeśli łańcuch nigdy nie będzie w \mathbf{e}_j). Przypomnijmy: dla nieredukowalnego i nieokresowego łańcucha mamy $\forall(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in E) \tau_{i,j} = ET_{i,j} < \infty$. Na wykładzie zdefiniowaliśmy

$$\rho(\mathbf{e}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr(X_n = \mathbf{e}_i, T_{1,1} \geq n)$$

i pokazaliśmy, że $\pi(\mathbf{e}_j) := \frac{\rho(\mathbf{e}_j)}{\tau_{1,1}}$ spełnia

$$\pi(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^M \pi(\mathbf{e}_i) \mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (1)$$

dla $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{e}_1$. Pokaż, że (1) zachodzi także dla $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_1$.

Zadanie 2. Dla X jak w poprzednim zadaniu zdefiniujmy N_i jako liczbę wizyt w \mathbf{e}_i pomiędzy wizytami w \mathbf{e}_1 (dla $i = 1$ nie liczymy pierwszej wizyty, tzn. $N_1 = 1$). Pokaż, że

$$EN_i = \rho(\mathbf{e}_i)$$

Zadanie 3. Dla zadań 7, 8, 10 b) z Listy 1. wskaż poprawne funkcje inicjalizujące oraz aktualizujące (minimum dwie dla zad. 8.).

Zadanie 4. Normę całkowitego wahanía między miarami ν i μ na E zdefiniowaliśmy jako $d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{e} \in E} |\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})|$. Pokaż, że

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \sum_{\mathbf{e}: \mu(\mathbf{e}) > \nu(\mathbf{e})} (\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})) = \sum_{\mathbf{e}: \nu(\mathbf{e}) > \mu(\mathbf{e})} (\nu(\mathbf{e}) - \mu(\mathbf{e})).$$

Zadanie 5. Pokaż, że

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \max_{A \subseteq E} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

gdzie $\mu(A) := \sum_{\mathbf{e} \in A} \mu(\mathbf{e})$.

Zadanie 6. Podaj przykład macierzy przejść \mathbf{P} rozmiaru 3×3 takiej, która ma przynajmniej dwa różne rozkłady stacjonarne, tzn. takie, że $\pi \mathbf{P} = \pi$. Czy można wskazać taką macierz \mathbf{P} dla której dowolna miara probabilistyczna jest miarą stacjonarną?

Zadanie 7. Niech $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$. Dla całkowitych $a, a' > 0$ i dowolnego $\mathbf{e} \in E$ pokaż, że

$$P(X_a = \mathbf{e}, X_{a+a'} = \mathbf{e} \mid X_0 = \mathbf{e}) = P(X_{a'} = \mathbf{e} \mid X_0 = \mathbf{e}) \cdot P(X_a = \mathbf{e} \mid X_0 = \mathbf{e}).$$

Zadanie 8. [Model urnowy Ehrenfestów]. N cząstek może być albo w pojemniku A albo w B . Załóżmy, że w chwili $n \geq 0$, $X_n = i$ cząstek jest w pojemniku A . Wtedy jedna cząstka wybierana jest losowo i w chwili $n + 1$ jest przekładana do drugiego pojemnika. Zatem stan w chwili $n + 1$, tzn. X_{n+1} to albo $i - 1$ albo $i + 1$. Przestrzenią stanów jest zatem $E = \{0, 1, \dots, N\}$. Podaj macierz \mathbf{P} i znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Zadanie 9. Nawiązując do poprzedniego zadania: Załóżmy, że mamy N cząstek i każdą wkładamy do pojemnika A lub B z jednakowym prawdopodobieństwem. Jaki jest rozkład liczby cząstek w pojemniku A po takiej operacji?

Zadanie 10. [Proces urodzin i śmierci z dwoma odbijającymi barierami]. Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{0, 1, \dots, N\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & q_i & r_i & p_i & 0 \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie dla każdego $i \in \{1, \dots, N - 1\}$: $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$. Znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Zadanie 11. Znajdź rozkład stacjonarny łańcucha Markowa X na przestrzeni $E = \{1, 2, 3\}$ o macierzy przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \beta & \beta \\ \gamma & 0 & 1 - \gamma \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

Zadanie 12. [Tasowanie kart] TOP-TO-RANDOM Pokaż z definicji, że $\pi(\mathbf{e}) = 1/n!$ dla każdego $\mathbf{e} \in E$ jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.

Zadanie 13. Dla tasowania n kart metodą TOP-TO-RANDOM wskaż najmniejsze możliwe N takie, że $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in E = \mathcal{S}_n$ (wszystkie permutacje zbioru $\{1, \dots, n\}$) mamy $Pr(X_N = \sigma_2 | X_0 = \sigma_1) > 0$.

Kontynuując poprzednie zadanie: pokaż, że w chwili N rozkład łańcucha nie jest jednostajny. Dla $n = 3$ wylicz $d_{TV}(\mu^N, \mathcal{U})$, gdzie \mathcal{U} jest rozkładem jednostajnym na permutacjach zbioru $\{1, 2, 3\}$.

Zadanie 14. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą przejść \mathbf{P}^X i przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$. Tworzymy ciąg $Y = \{Y\}_{n \geq 0}$ na podstawie X w taki

sposób, iż notujemy tylko nowe wartości X_n . Tzn. jeśli przez ileś kroków łańcuch X pozostaje w tym samym stanie, to łańcuch Y się nie zmienia, czeka aż X się zmieni. Dla przykładu:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 X_n = & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \\
 Y_0 = \mathbf{e}_1 & & & & Y_1 = \mathbf{e}_2 & & Y_2 = \mathbf{e}_1 & Y_3 = \mathbf{e}_3 & & & Y_4 = \mathbf{e}_2 & Y_5 = \mathbf{e}_1
 \end{array}$$

Pokaż, że $\{Y\}_{n \geq 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i podaj jego prawdopodobieństwa przejść w języku prawdopodobieństw przejść łańcucha X .

Zadanie 15. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ i $Y = \{Y\}_{n \geq 0}$ będą dwoma jednorodnymi łańcuchami Markowa o tej samej przestrzeni stanów $E = \{1, 2\}$ i macierzy przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Załóżmy, że $X_0 = 1, Y_0 = 2$. Podaj rozkład pierwszej chwili, w której oba łańcuchy są w tym samym stanie.

Zadanie 16. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ będzie łańcuchem Markowa z dwoma różnymi rozkładami stacjonarnymi π i π' . Pokaż, że wówczas $p\pi + (1 - p)\pi'$ dla dowolnego $p \in (0, 1)$ również jest rozkładem stacjonarnym.

Zadanie 17. Rozważmy następujący łańcuch Markowa X : Niech $a, b \geq 2$ będą liczbami całkowitymi. Przestrzeń stanów:

$$E = \{(x, y) : x \in \{0, \dots, a - 1\}, y \in \{0, \dots, b - 1\}\}.$$

Dynamika łańcucha jest następująca: Będąc w stanie (x, y) w chwili n , w następnej chwili łańcuch albo jest w stanie $((x + 1) \bmod a, y)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ albo w stanie $(x, (y + 1) \bmod b)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

- Pokaż, że łańcuch X jest nieredukowalny
- Pokaż, że łańcuch X jest nieokresowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{nwd}(a, b) = 1$