Uniwersytet Wrocławski
LO III

Wrocław, 18.04.2024

Granica funkcji - ciągłość

Zadanie 1.

Policz poniższą granicę funkcji (możesz korzystać z granicy $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$)

(a) $\lim_{x\to\pi} x^3\sin(x)$
(b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$
(c) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$
(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{8x}$
(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{7x}$
(f) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+25}-5}{13x^2}$
(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2(2x)}{3\cos(5x)\sin(7x)}$
(h) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$
(i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$
(j) $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$
(k) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}$
(l) $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Zadanie 2.

Dla których wartości parametrów a i b funkcje określone wzorami poniżej są ciągłe?

(a) $\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2 & \text{dla} \quad x\in[1,2) \\ ax-b & \text{dla} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$
(b) $\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2+ax+b & \text{dla} \quad x\in[1,2) \\ x+3 & \text{dla} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} x-ax^2+x^3 & \text{dla} \quad x<2 \\ a+b & \text{dla} \quad x=2 \\ \sin(\frac{x\pi}{3})+be^x & \text{dla} \quad x>2 \end{cases}$

Zadanie 3.

Zbadaj ciągłość podanych funkcji

(a) $\frac{\ln(x)}{1+\ln(x)}$
(b) $\{x\}+\frac{1}{2}\{2x\}+\frac{1}{4}\{4x\}$
(c) $\frac{1}{[\frac{1}{x}]}$
(d) $\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+nx}, \quad x\geqslant 0.$

Zadanie 4.

Podaj przykłady funkcji takich, że

(a) Funkcja $|f|$ jest ciągła w każdym punkcie, a funkcja f jest nieciągła w każdym punkcie
(b) Funkcja f jest nieciągła dokładnie w punktach $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$
(c) (*) Funkcja f jest ciągła, $f\geqslant 0$, f przyjmuje wartość 0 tylko w punktach $0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$

Zadanie 5. (*)

Udowodnij, że $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$