
CIĄGI LICZBOWE - LISTA POWTÓRKOWA

Zadanie 1.

Dany jest ciąg a_n taki, że

$$\forall \epsilon > 0 \forall n \geq \frac{5}{\epsilon} |a_n - 7| < \epsilon.$$

- (a) Jaka jest granica ciągu a_n ?
- (b) Dla jakiego M mamy $\forall n |a_n| < M$?
- (c) Dla jakiego N mamy $\forall n \geq N a_n > 6$?

Zadanie 2.

Pokaż, że dla ciągu dodatniego a_n zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

Zadanie 3.

Pokaż, że jeśli dla prawie wszystkich n zachodzi $0 \leq a_n \leq b_n$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Zadanie 4.

Oblicz granicę ciągu (jeśli istnieje)

- | | | |
|------------------------|------------------------|--|
| (a) $\sqrt{n-2}$ | (e) $\frac{(-1)^n}{n}$ | (i) $\frac{5n^4 - 3n^2 + 7}{4n^4 + 1}$ |
| (b) $3^n + (-1)^n$ | (f) $\frac{n}{2^n}$ | (j) $\frac{10^n}{n!}$ |
| (c) $\frac{n+1}{n+7}$ | (g) $q^n, 0 < q < 1$ | (k) $\frac{\sqrt{n} \sin(n!)}{n+1}$ |
| (d) $\frac{2n}{n^2+1}$ | (h) $(-1)^n n$ | (l) $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ |

Zadanie 5.

Pokaż, że jeśli ciąg a_n jest zbieżny, to

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Zadanie 6.

Korzystając z poprzedniego zadania pokaż, że ciąg

- | | | |
|---------|--------------|------------------|
| (a) n | (b) $(-1)^n$ | (c) $n^{(-1)^n}$ |
|---------|--------------|------------------|

nie jest zbieżny.

Zadanie 7. (*)

Czy ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Zadanie 8. (*)

Czy jeśli ciąg a_n^2 jest zbieżny, to ciąg a_n jest zbieżny? Co jeśli ciąg a_n^2 jest zbieżny do 0?