Uniwersytet Wrocławski
LO III

Wrocław, 22.02.2024

Ciągi liczbowe - twierdzenie o trzech ciągach, podciągi

Zadanie 1.
Czy dany ciąg jest zbieżny?

(a) $\frac{1}{2^n}$
(b) $\frac{n}{n+1}$
(c) $q^n, q > 0$
(d) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
(e) $\frac{10}{1} * \frac{11}{3} * \cdots * \frac{n+9}{2n-1}$
(f) $a_0 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
(g) $a_0 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$
(h) $\sin(n)$
(i) (*) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

Zadanie 2.
Policz następujące granice ciągów

(a) $\frac{n^4 - \sin(n!)}{3n^4 + \cos(n!)}$
(b) $\sqrt[n]{5^n + 7^n + 9^n}$
(c) $\sqrt[\frac{n}{2}]{2^n + 3^n}$
(d) $a_{n+1} = \frac{a_n + 2a_{n-1}^2}{2}, a_{0,1} = \frac{1}{2}$
(e) $a_{n+1} = \frac{a_n + 2a_{n-1}^2}{2}, a_{0,1} = \frac{1}{4}$
(f) $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$
(g) $\sqrt[n]{a}$
(h) $n^k q^n, q > 0, k > 0$
(i) $\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}, 0 < a < b$
(j) $\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n}$
(k) $\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$
(l) $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$
(m) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), a_0 = 2$
(n) $a_{n+1} = \alpha a_n + \frac{1-\alpha}{a_n}, a_0 > 0$
(o) $\sqrt{2} * \sqrt[4]{2} * \cdots * \sqrt[2^n]{2}$

Zadanie 3.
Zdefinujmy ciąg następująco:

$$a_0 \in (0, 1),$$
$$a_{2n+1} = a_{2n}/2$$
$$a_{2n} = (1 + a_{2n-1})/2.$$

Jakie wartości może przyjmować ciąg a_n?

Zadanie 4.
Udowodnij czy następujące zdania są prawdziwe

(a) Jeśli dla każdego n_0 dla każdego $n > n_0$ wsród wyrazów ciagu a_n wystepuja zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne, to ciąg a_n nie jest zbieżny.
(b) Jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.
(c) Jeśli ciąg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest zbieżny to ciąg a_n jest zbieżny

Zadanie 5. (*)
Czy każdy ciąg monotoniczny ma granicę (niekoniecznie właściwą)?

Zadanie 6. (*)
Wiadomo, że ciąg b_n jest zbieżny. Czy ciąg $c_n = n(b_n - b_{n-1})$ może być rozbieżny do $+\infty$?