Uniwersytet Wrocławski
LO III

Wrocław, 15.03.2024

Granica funkcji - wprowadzenie

Zadanie 1.
Narysuj wykres funkcji

(a) $sgn(\sin(x))$
(b) $x^3 sgn(x)$
(c) $|x^2-1|-|x^2-4|$
(d) $x^2+x-2-|x^2-x-2|$
(e) $\{cos(x)\}$
(f) $\begin{cases} x & \text{dla} \quad x \neq 2 \\ sgn(x) & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases}$
(g) $\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ x & \text{dla} \quad x \in [0,1) \\ -x^2+4x-2 & \text{dla} \quad x \in [1,3) \\ 4-x & \text{dla} \quad x > 3 \end{cases}$

Zadanie 2.
Znajdź (o ile istnieje) granicę funkcji korzystając z definicji Heine'go.

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x+2}$
(b) $\lim_{x\to -2} \frac{x-3}{x+2}$
(c) $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$
(d) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-6x+5}{x-5}$
(e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^4-x-14}$
(f) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3+1}$
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
(h) $\lim_{x\to y} \frac{x^n-y^n}{x-y}$
(i) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

Zadanie 3.
Który z poniższych warunków jest równoważny temu, że funkcja $f(x)$ określona na całej prostej ma granicę 1 w punkcie 0?

(a) Dla każdego ciągu $x_n \to 0, x_n \neq 0$ zachodzi $f(x_n^3) \to 1$
(b) Dla każdego ciągu $x_n \to 0, x_n \neq 0$ zachodzi $f(x_n^2) \to 1$
(c) Dla każdego ciągu $x_n \to 1, x_n \neq 1$ zachodzi $f(x_n - x_n^2) \to 1$
(d) Dla każdej liczby $x \neq 0$ zachodzi $f(\frac{x}{n}) \to 1$

Zadanie 4.
Dla $\epsilon > 0$ znajdź $\delta > 0$ takie, że dla $0 < |x-a| < \delta$ zachodzi $|f(x)-g| < \epsilon$

(a) $f(x) = x^2, a = 2, g = 4$
(b) $f(x) = \frac{1}{x+1}, a = -\frac{1}{2}, g = 2$
(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+7}, a = 1, g = 2$

Zadanie 5.
Udowodnij, że jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = g$, to istnieje $\delta > 0$ taka, że zbiór wartości $f(x)$ dla $0 < |x-a| < \delta$ jest ograniczony.

Zadanie 6.
Udowodnij, że jeśli $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, to istnieje $\eta, \delta > 0$ taka, $x > \eta$ dla $0 < |x-a| < \delta$.