

---

## CIĄGI LICZBOWE - ARYTMETYKA GRANIC

---

### Zadanie 1.

Pokaż, że jeśli  $a_n$  i  $b_n$  mają skończoną granicę, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

### Zadanie 2.

Czy dla dowolnych ciągów  $a_n$  i  $b_n$ , które mają granice (niekoniecznie skończoną!) zachodzi

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ,  
(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ,

### Zadanie 3.

Policz następujące granice ciągów

- |   |   |  |
|---|---|--|
| (a) $\frac{n+7}{n+1}$                           | (d) $\frac{4n^2-3\sin(n)}{7n\sqrt{n}-6n^2}$ | (g) $n(\sqrt{n^2-7}-n)$                                |
| (b) $(n + \frac{1}{n})^2 - (n - \frac{1}{n})^2$ | (e) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$                 | (h) $n + \sqrt{n}$                                     |
| (c) $\frac{n^3}{3} + \frac{4}{2+\sin(n)}$       | (f) $\sqrt{n^2+n} - n$                      | (i) $n((n + \frac{1}{n^2})^2 - (n - \frac{1}{n^2})^2)$ |

### Zadanie 4.

Pokaż, że jeśli ciąg  $a_n$  ma granicę niewłaściwą, a ciąg  $b_n$  to ciąg ograniczony, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

### Zadanie 5. (\*)

Pokaż, że jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ .

### Zadanie 6. (\*)

Czy jeśli ciągi  $a_n$  i  $b_n$  nie mają granicy to ciąg  $c_n = a_n^2 + b_n^2$  może mieć granicę?