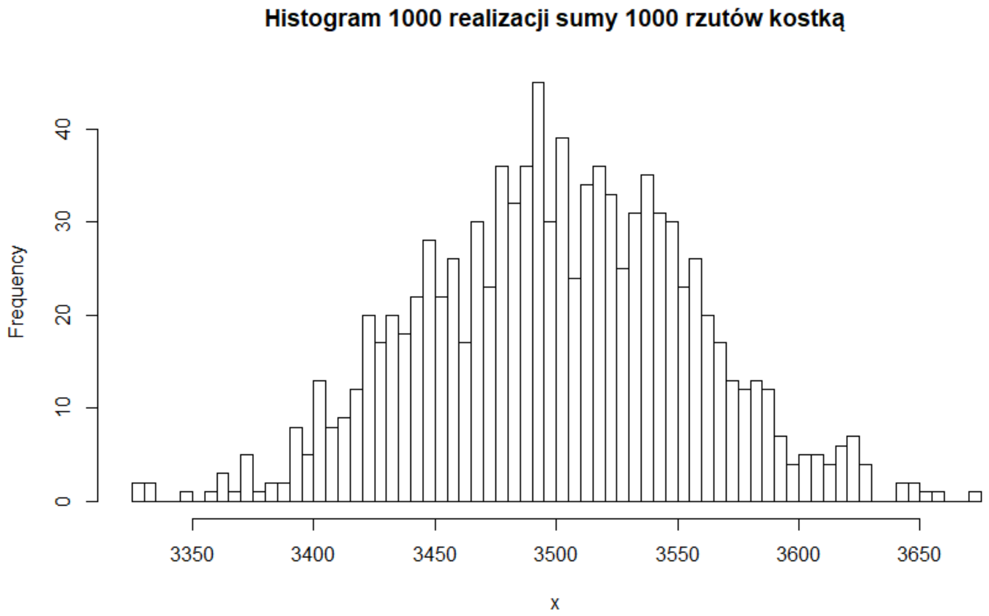
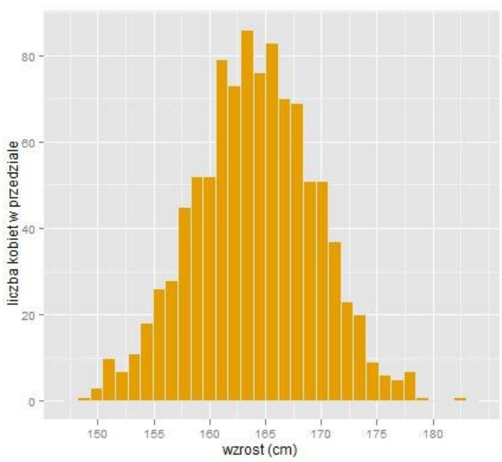
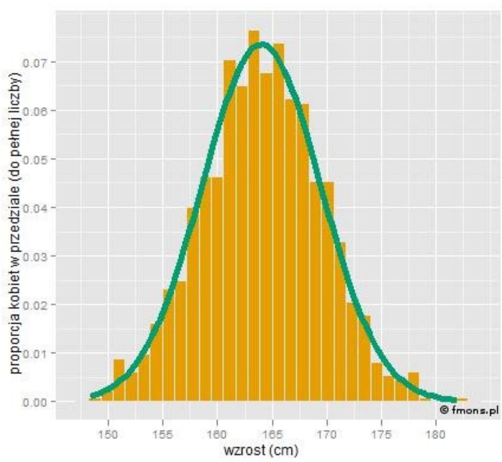
Wrocław, 5 marca 2019

Lista zadań nr 4

Rozkład normalny







Zadanie 1. *Policz wartość oczekiwaną rozkładu normalnego z parametrami* $\mu = 1$, $\sigma^2 = 10$.

Zadanie 2. *Wiedząc, że* X ma rozkład normalny z parametrami $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ i $P(X < 2) = a, P(X < 18) = b, P(X > 72) = c$ policz $P(Z > 9)$, gdzie Z ma rozkład normalny z parametrami $\mu = 3$, $\sigma^2 = \frac{1}{9}$.

Zadanie 3. Wiedząc, że X ma rozkład normalny z parametrami $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ policz gęstość zmiennych losowych $Z = 5X + 7, W = |X|$.

Zadanie 4. Niech X, Y - niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym z parametrami $\mu = 2$, $\sigma^2 = 4$ oraz $\mu = 3$, $\sigma^2 = 9$. Policz gęstość zmiennej losowej $Z = X + Y$.

Zadanie 5. Policz wariancję rozkładu normalnego z parametrami $\mu = 1$, $\sigma^2 = 10$.

Zadanie 6. (*) Wiedząc, że U_1, U_2 są niezależne o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$ policz gęstość zmiennych losowych $X = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2), Y = X = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)$.

Zadania domowe

Zadanie 7. Zmienna losowa X ma rozkład normalny z parametrami μ, $\sigma^2 = 1$. Wykaż, że $P(|X - \mu| > x) = 2P(X - \mu > x)$.

Zadanie 8. Czy dla zmiennej losowej X (z gęstością f_X i dystrybuantą F_X) o rozkładzie standardowym normalnym istnieje zmienna losowa Y (z gęstością f_Y i dystrybuantą F_Y) o dowolnym rozkładzie taka, że spełnione są oba poniższe warunki:

a) $\forall_{x \in R} f_X(x) \leqslant f_Y(x)$

b) $\exists_{a,b \in R, a \neq b} F_X(b) - F_X(a) < F_Y(b) - F_Y(a)$

Zadanie 9. Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ - niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym z parametrami $\mu = 2$, $\sigma^2 = 4$. Policz gęstość zmiennej losowej $Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Zadanie 10. [Estymator nieobciążony wartości oczekiwanej] Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie posiadającym wartość oczekiwaną. Wykaż, że

$$E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = E[X_1]$$

Zadanie 11. (*) [Estymator nieobciążony wariancji] Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie posiadającym wariancję. Niech $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Wykaż, że

$$E[\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2] = Var(X_1)$$