Wrocław, 1 marca 2019

Lista zadań nr 3

Wariancja

Definicja 1. Wariancja Jeśli liczba $E[(X-EX)^2]$ jest skończona to liczbę tę nazywamy wariancją zmiennej losowej X i oznaczamy przez Var(X) (często też spotyka się oznaczenie $D^2(X)$. Równoważna definicja to $Var(X) = E[X^2] - (EX)^2$.

Definicja 2. Własności wariancji Wariancja posiada następujące własności (X - zmienna losowe posiadająca wariancję, a,b,c - stałe)

1. $Var(X) \geqslant 0, Var(X) = 0 \iff P(X = b) = 1$
2. $Var(cX) = c^2Var(X)$
3. $Var(X + a) = Var(X)$

Zadanie 1. *P*olicz wariancję dla rozkładu (a) geometrycznego (b) jednostajnego.

Niezależność zmiennych losowych

Definicja 3. Zdarzenia A i B są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Zadanie 2. *W*ybieramy jedną rodzinę spośród rodzin mających n dzieci. Niech zdarzenie A polega na tym, że w losowo wybranej rodzinie jest co najwyżej jedna dziewczynka, a zdarzenie B poleca na tym, że w rodzinie są dziewczynki i chłopcy. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Zadanie 3. (*) Czy jeśli zdarzenia są parami niezależne to czy wszystkie są od siebie niezależne? Czy jeśli $P(A, B, C) = P(A)P(B)P(C)$, to A,B,C są parami niezależne?

Definicja 4. Zmienne losowe X, Y są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\forall A, B \subseteq \Omega P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Zadanie 4. *R*zucamy dwoma identycznymi kostkami do gry. Czy zmienne losowe S - suma oczek na obu kostkach i R - różnica oczek na obu kostkach są od siebie niezależne?

Zadanie 5. *N*iech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Policz dystrybuantę zmiennych losowych $Z = max(X_1, X_2, ..., X_n), W = min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Zadanie 6. *N*iech X,Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Udowodnij, że $P(X|Y) = P(X)$. Zakładając, że X,Y mają rozkład wykładniczy z parametrem 1 oblicz dystrybuantę zmiennych losowych $Z = XY, W = X - Y$.

Zadanie 7. (*) Niech $U_i, i = 1, 2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie U(0,1), a zmienna losowa X ma rozkład $P(X = k) = \frac{1}{(e-1)k!}, k = 1, 2, ...$. Policz rozkład zmiennej losowej $Z = min(U_1, U_2, ..., U_X)$.

Zadania domowe

Zadanie 8. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami α, β odpowiednio. Znajdź dystrybuantę zmiennej losowej X, która mierzy czas przybycia pierwszego autobusu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy przyjedzie autobus A?

Zadanie 9. Niech $U = min(X, Y), V = max(X, Y) - min(X, Y)$ gdzie X,Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy o parametrze λ. Wykaż, że U i V są niezależne.

Zadanie 10. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$. Znajdź rozkłady zmiennych losowych $Y = min(X, X^2), Z = max(1, X)$.

Zadanie 11. W chwili t ($t = 2, 3, ..$) cząstka albo znika z prawdopodobieństwem q, albo przekształca się w m takich samych cząsteczek z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$. Jaka jest średnia liczba cząstek w n-tym pokoleniu?

Zadanie 12. (*) Zmienne losowe X i Y mają jednakowy rozkład. Czy $E[\frac{X}{X+Y}] = E[\frac{Y}{X+Y}]$?