
LISTA ZADAŃ NR 2

Gęstość zmiennej losowej

Definicja 1. Gęstość zmiennej losowej

Funkcję $f : R \rightarrow R$ nazywamy gęstością ciągłej zmiennej losowej gdy $\forall A P(A) = \int_A f(x)dx$

Jeśli zmienna losowa ma gęstość, to występuje następująca zależność między gęstością rozkładu a jej dystrybuantą:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Równoważnie możemy napisać:

$$f(x) = F'(x)$$

Definicja 2. Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, b]$ gdy $f(x) = \frac{1}{b-a}$ dla $x \in [a, b]$.
Oznaczenie - $X \tilde{U}(a, b)$.

Zadanie 1. Policz dystrybuanty oraz gęstości następujących rozkładów:

- a) $Z = 10(X - 1)$, gdzie $F_X = 1 - \frac{1}{x^2}, x \geq 1$,
- b) $Z = \frac{1}{X^2}$, gdzie $X \sim Exp(1)$,
- c) $Z = X^2 + 2X$, gdzie $X \sim U(0, 1)$.

Momenty zmiennych losowych

Zadanie 2. Ktoś proponuje nam udział w następującej grze - rzucamy kostką i jeśli wypadnie '1' otrzymujemy 2 zł, jeśli wypadnie '2' płacimy 1 zł, jeśli wypadnie '3' otrzymujemy 4 zł, jeśli wypadnie '4' otrzymujemy 3 zł, jeśli wypadnie '5' płacimy 4 zł, jeśli wypadnie '6' płacimy 7 zł. Czy opłaca się grać w tę grę?

Definicja 3. Wartość oczekiwana Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X dyskretnej nazywamy liczbę (o ile ta liczba jest skończona)

$$EX = \sum kP(X = k)$$

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X ciągłej nazywamy liczbę (o ile ta liczba jest skończona)

$$EX = \int xf(x)dx$$

Zadanie 3. Podaj przykład zmiennej losowej, która nie ma wartości oczekiwanej.

Definicja 4. Własności wartości oczekiwanej Wartość oczekiwana posiada następujące własności (X, Y - zmienne losowe posiadające wartość oczekiwaną, a, b, c - stałe)

1. $X \geq 0 \Rightarrow EX \geq 0$
2. $|EX| \leq E|X|$
3. $E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$

Zadanie 4. Kupujemy k losów na loterii, w której jest M losów przegrywających i N losów wygrywających. Policz wartość oczekiwaną liczby losów wygrywających spośród tych, które kupujemy.

Definicja 5. Wartość oczekiwana $\psi(X)$ Dla 'przyzwoitej' funkcji ψ i dyskretnej zmiennej losowej X mamy

$$EX = \sum \psi(k)P(X = k)$$

Dla 'przyzwoitej' funkcji ψ i ciągłej zmiennej losowej X mamy

$$EX = \int \psi(x)f(x)dx$$

Zadanie 5. Znajdź wartość oczekiwaną pola prostokąta o obwodzie 20, gdzie jeden z boków jest zmienną losową X o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[1,10]$.

Zadanie 6. (*) Udowodnij, że jeśli $X \geq 0$, to $\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \leq EX \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

Definicja 6. Wariancja Jeśli liczba $E[(X - EX)^2]$ jest skończona to liczbę tę nazywamy wariancją zmiennej losowej X i oznaczamy przez $\text{Var}(X)$ (często też spotyka się oznaczenie $D^2(X)$). Równoważna definicja to $\text{Var}(X) = E[X^2] - (EX)^2$.

Definicja 7. Własności wariancji Wariancja posiada następujące własności (X - zmienna losowa posiadająca wariancję, a, b, c - stałe)

1. $\text{Var}(X) \geq 0, \text{Var}(X) = 0 \iff P(X = b) = 1$
2. $\text{Var}(cX) = c^2\text{Var}(X)$
3. $\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X)$

Zadanie 7. Masz do wyboru dwie gry - grę z zadania 1 oraz grę w której z prawdopodobieństwem $\frac{999}{1000}$ wygrywasz 10 zł, ale z prawdopodobieństwem $\frac{1}{1000}$ przegrywasz 99400 zł. W którą grę wolisz zagrać?

Zadanie 8. Policz wartość oczekiwaną oraz wariancję dla rozkładu (a) geometrycznego (b) jednostajnego.

Zadania domowe

Zadanie 9. Znajdź gęstość zmiennej losowej $Y = \frac{1}{X}$ wiedząc, że X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ (tzn. ma gęstość $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$).

Zadanie 10. Rzucamy kostką 3-ścienną aż nie otrzymamy wszystkich wartości oczek. Znajdź wartość oczekiwaną liczby rzutów potrzebnych do osiągnięcia tego celu.

Zadanie 11. Wykaż, że $E[(X - EX)^2] = E[X^2] - [EX]^2$.

Zadanie 12. Wkładamy losowo 3 listów do różnych adresatów do 3 kopert. Znajdź wartość oczekiwaną liczby listów włożonych poprawnie. Rozwiąż zadanie także dla n listów i n kopert.

Zadanie 13. (*) Znajdź minimum funkcji $g(t) = E[X - t]^2$.