Wrocław, 14 lutego 2019

# Lista zadań nr 1

## Przypomnienie

**Definicja 1. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa**
Jeśli $\Omega$ to zbiór jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych, to

$$\forall A \subset \Omega : P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

**Zadanie 1.** *W* sposób losowy rozmieszczono 3 kule do 3 urn. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że

1. wszystkie urny będą zajęte,
2. dokładnie jedna urna pozostanie pusta,
3. co najmniej dwie urny będą puste.

A co jeśli kul i urn będzie po n?

**Definicja 2. Prawdopodobieństwo warunkowe**

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

**Zadanie 2.** *Z*ałóżmy, że 5% mężczyzn oraz 0,25% kobiet nie rozróżnia kolorów. Z populacji, w której mężczyźni i kobiety występują w tej samej proporcji wybrano losowo osobę, która okazała się nie rozróżniać kolorów.

1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta osoba jest mężczyzną?
2. Jak zmieni się to prawdopodobieństwo gdy w populacji, z której losujemy osobę proporcja kobiet do mężczyzn jest jak $2 : 1$?

**Zadanie 3.** *N*a ile sposobów można dojść z punktu (0,0) do punktu (n,k) zakładając, że dozwolone ruchy to krok o (1,0) lub krok o (0,1)?

**Zadanie 4.** (*) Alicja i Bill rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie wzorzec OOR lub ORR. Alicja wygrywa, gdy wzorzec OOR wypadnie jako pierwszy, natomiast Bill, gdy wypadnie ORR. Oblicz prawdopobobieństwo, że grę wygra Alicja.

## Zmienna losowa

**Definicja 3. Zmienna losowa**
Zmienną losową nazywamy dowolną funkcję $X : \Omega \to R$.

**Definicja 4. Dystrybuanta zmiennej losowej**
Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F$ taką, że:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

**Definicja 5. Własności dystrybuanty**

1. F jest niemalejąca
2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
3. F jest prawostronnie ciągła

**Zadanie 5.** *G*racz rzuca symetryczna kostką do gry. Jeśli wyrzuci piątkę, wygrywa 10 zł. Jeśli wyrzuci liczbę podzielną przez 3, wygrywa 5 zł. W pozostałych przypadkach płaci 1 zł. Niech X oznacza wygraną gracza (przy czym przegrana 1 zł to inaczej wygrana -1 zł). Znaleźć i narysować dystrybuantę zmiennej losowej X. Obliczyć $P(X > 0)$.

**Zadanie 6.** *S*prawdź czy następujące funkcje są dystrybuantami rozkładu prawdopodobieństwa.

a) $e^{-e^{-x}}, x \in (-\infty, \infty)$,

b) $1 - e^{-x}, x \in [0, \infty)$,

c) dla ustalonego p $\in [0, 1]$, niech $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} & x \in [k, k+1) \end{cases}$

**Zadanie 7.** (*) Punkt x nazywamy punktem skokowym dla dystrybuanty zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy $P(X = x) > 0$. Pokaż, że dystrybuanta może mieć co najwyżej przeliczanie wiele punktów skokowych.

**Zadanie 8.** *R*zucamy niesymetryczną monetą o prawdopodobieństwie wypadnięcia orła n razy na sekundę. Prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w każdej próbie wynosi $\frac{\lambda}{n}$ dla pewnej $\lambda > 0$. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $X_n$ oznaczającej czas oczekiwania na wypadnięcie orła (mierzony w sekundach). Jak zachowuje się ta dystrybuanta przy $n \to \infty$?

**Definicja 6. Gęstość zmiennej losowej**
Funkcję $f : R \to R$ nazywamy gęstością ciągłej zmiennej losowej gdy $\forall A P(A) = \int_A f(x)dx$

Jeśli zmienna losowa ma gęstość, to występuje następująca zależność między gęstością rozkładu a jej dystrybuantą:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Równoważnie możemy napisać:

$$f(x) = F'(x)$$

**Definicja 7. Rozkład jednostajny**
Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale [a,b] gdy $f(x) = \frac{1}{b-a}$ dla $x \in [a, b]$. Oznaczenie - X $\tilde{\text{U}}$(a,b).

**Zadanie 9.** *P*olicz dystrybuanty oraz gęstości następujących rozkładów:

a) $Z = 10(X - 1)$, gdzie $F_X = 1 - \frac{1}{x^2}, x \geqslant 1$,

b) $Z = \frac{1}{X^2}$, gdzie $X \sim Exp(1)$,

c) $Z = X^2 + 2X$, gdzie $X \sim U(0, 1)$.

## Zadania domowe

**Zadanie 10.** *R*ozpatrzmy doświadczenie polegające na niezależnych rzutach dwiema monetami. Dla jednej z nich P(wypadnie orzeł) = u, natomiast dla drugiej P(wypadnie orzeł) = w. Oznaczmy odpowiednio przez

1. $p_0$ = P(wypadło zero orłów),
2. $p_1$ = P(wypadł jeden orzeł),
3. $p_2$ = P(wypadły dwa orły).

Czy można tak dobrać wartości w i u aby $p_0 = p_1 = p_2$?

**Zadanie 11.** *W* mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% taksówek) i Niebieskie Taxi (15% taksówek). Świadek nocnego wypadku twierdzi, że brało w nim udział Niebieskie Taxi, jednak świadkowie rozpoznają kolor poprawnie tylko w 80% przypadków. Jaka jest szansa, że faktycznie w wypadku brało udział Niebieskie Taxi?

**Zadanie 12.** *M*edianą rozkładu zmiennej losowej X jest liczba m, dla której $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m) = \frac{1}{2}$. Znajdź mediany zmiennych losowych o rozkładach prawdopodobieństwa z gęstością f i dystrybuantą F

1. $f(x) = 3x^2, F(x) = \int_0^x 3y^2 dy, x \in (0, 1)$
2. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy, x > 0$.

**Zadanie 13.** *W*ykaż, że rozkład wykładniczy (dystrybuanta $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0$) oraz rozkład geometryczny ($P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, 1 > p > 0$) mają tzw. własność braku pamięci, tzn:

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s), s, t > 0$$

**Zadanie 14.** (*) Rzucamy symetryczną monetą 2019 razy. Jaka jest szansa, że otrzymamy parzystą liczbę orłów? A co jeśli nowy rok przyszedłby wcześniej i rzucalibyśmy 2020 razy?