Wrocław, 27 marca 2019

Lista zadań nr 6

Łancuchy Markowa

Zadanie 1. (Problem ruiny gracza) Zaczynamy grę mając 1 zł. W każdej rundzie rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł to wygrywamy złotówkę, jeśli wypadnie reszka to tracimy złotówkę. Gra kończy się albo gry będziemy mieli 0 zł albo gdy będziemy mieli 4 zł.

a) Jaka jest szansa, że wygramy tę grę?

b) Ile będziemy musieli średnio czekać na zakończenie gry?

Zadanie 2. Alicja i Bob grają rzucają monetą. Alicja wygrywa gdy pojawi się wzorzec OR, Bob wygrywa gdy pojawi się wzorzec ROO. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wygra Bob?

Zadanie 3. Rzucamy symetryczną monetą. Jak długo będziemy musieli średnio czekać aż otrzymamy dwa orły z rzędu?

Zadanie 4. Rozważmy prosty model dalszego czasu trwania życia. Jeśli jesteśmy zdrowi, to po roku dalej będziemy zdrowi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, zostaniemy niepełnosprawnymi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ i umrzemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Jeśli jesteśmy niepełnosprawni to w ciągu roku wyzdrowiejemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, zostaniemy niepełnosprawni z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ i umrzemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Jeśli jesteśmy martwi to pozostajemy martwi.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że kiedykolwiek będziemy niepełnosprawni?

b) Zakładając, że zaczynamy będąc zdrowymi, ile średnio lat jeszcze pożyjemy?

c) Zakładając, że zaczynamy będąc niepełnosprawnymi, ile średnio lat będziemy sumarycznie (tzn. możemy wyzdrowieć a potem znowu stać się niepełnosprawnymi) niepełnosprawni?

Zakładamy, że wszystkie wydarzenia następują NA KONIEC ROKU.

Zadanie 5. (Bardziej ogólny problem ruiny gracza) Zaczynamy grę mając k zł. W każdej rundzie rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł to wygrywamy złotówkę, jeśli wypadnie reszka to tracimy złotówkę. Gra kończy się albo gry będziemy mieli 0 zł albo gdy będziemy mieli n zł. Jaka jest szansa, że wygramy tę grę?

Zadanie 6. (*) (Jeszcze bardziej ogólny problem ruiny gracza) Zaczynamy grę mając k zł. W każdej rundzie rzucamy niesymetryczną monetą z prawdopodobieństwem otrzymania orła równym p. Jeśli wypadnie orzeł to wygrywamy złotówkę, jeśli wypadnie reszka to tracimy złotówkę. Gra kończy się albo gry będziemy mieli 0 zł albo gdy będziemy mieli n zł. Jaka jest szansa, że wygramy tę grę?

Zadanie 7. (*) Docent Mincer próbuje uniknąć urzędu podatkowego. W tym celu przeskakuje między dwoma miastami - A i B. Jeśli jest w mieście A to z prawdopodobieństwem p przechodzi do miasta B i z prawdopodobieństwem $1 - p$ zostaje w mieście A. Jeśli jest w mieście B to z prawdopodobieństwem q przechodzi do miasta A i z prawdopodobieństwem $1 - q$ zostaje w mieście B. Jaki procent czasu spędza docent Mincer w każdym z tych miast?

Zadania domowe

Zadanie 8. *Z*ałóżmy, że mamy 4 stanów ponumerowanych liczbami od 1 do 4. Stan 1 jest połączony z 2, 2 z 3, 3 z 4, 4 z 1. Będąc w danym stanie prawdopodobieństwo przejścia do każdego z sąsiadów jest takie samo. Jaką część czasu spędzamy w każdym ze stanów?

Zadanie 9. *R*zucamy niesymetryczną monetą o prawdopodobieństwie wypadnięcia orła równym p. Przegrywamy grę jeśli wypadną dwa takie symbole z rzędu i wygrywamy gdy wypadnie wzorzec ORO albo ROR. Ile maksymalnie czasu będzie trwać taka gra? Dla jakiego p nasza szansa na wygraną jest największa?

Zadanie 10. *W*ykaż, że P= (5,-4) może być wierzchołkiem kwadratu opisanego na okręgu $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 24 = 0$.

Zadanie 11. *W* równoległoboku ABCD dane są $|AB| = 6$, $|AD| = 4$, $|BD| = 2\sqrt{10}$. Oblicz cosinus kąta CAD.

Zadanie 12. (*) (Proste błądzenie losowe) Niech $X_0 = 0, P(X_{n+1} = X_n + 1) = p, P(X_{n+1} = X_n + 1) = 1 - p$. Zbadaj $\lim_{n\to\infty} X_n$ w zależności od p.