Wrocław, 20 marca 2019

Lista zadań nr 5

W czasie dzisiejszych zajęć zakładamy, że umiemy wygenerować zmienną losową z rozkładu $U([0,1])$, a także w zadaniu o numerze n umiemy wygenerować zmienne losowe o rozkładach z zadań $1, 2, ..., n-1$.

Inverse method

Zadanie 1. Zaproponuj metodę wygenerowania rzutu 6-ścienną kostką.

Zadanie 2. W jaki sposób można wygenerować zmienne losowe o następujących dystrybuantach?

a) $F(x) = \sqrt{x}, x \in (0,1)$

b) $G(x) = 1 - e^{-x}, x > 0$

c) $H(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}, x > 1, \alpha > 0$

Acceptance-rejection method

Zadanie 3. Jak wygenerować jednostajnie losowy punkt z prostokąta $[-2,1]x[-1,1]$? Czy podobną metodę możemy zastosować do okręgu jednostkowego?

Zadanie 4. Zaproponuj metodę wygenerowania jednostajnie losowego punktu z sumy obszarów A i B, gdzie $A = (x,y) : x \in (0,1), y \in (0, \sqrt{x}), B = (x,y) : x \in (-1,0), y \in (x^3, 0)$. Jaka jest skuteczność Twojej metody?

Zadanie 5. W jaki sposób można wygenerować zmienne losowe o następujących gęstościach?

a) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in R$

b) $h(x) = b(x(1-x))^n, x \in (0,1)$, gdzie b jest pewną stałą (normującą)

c) $f(x) = \frac{2}{7}(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}), x \in (0,1)$

Zadanie 6. (*) Chcemy wygenerować zmienną losową z rozkładu $H(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}, x > 1, \alpha > 0$ przy pomocy acceptance-rejection method i zmiennej o rozkładzie wykładniczym. Dla jakich wartości parametru α jest to możliwe?

Zadania domowe

Zadanie 7. Jak wygenerować zmienną losową dyskretną, która może przyjmować skończoną liczbę wartości?

Zadanie 8. Podaj dwie metody wygenerowania jednostajnie losowego punktu z okręgu jednostkowego. Uzasadnij ich poprawność.

Zadanie 9. Uzasadnij, że każdy punkt paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ jest oddalony od prostej $x-2y-11=0$ co najmniej o $2\sqrt{5}$.

Zadanie 10. Napisz równania stycznych do okręgu

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0$$

poprowadzonych z początku układu współrzędnych.

Zadanie 11. (*) Udowodnij, że acceptance-rejection method działa, tzn. dla zmiennych X o gęstości f, Y o gęstości g, U o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$ oraz stałej c takiej, że $\forall_x f(x) \leqslant cg(x)$ zachodzi

$$P(Y \leqslant y | U \leqslant \frac{f(Y)}{cg(Y)}) = P(X \leqslant y)$$