Prof. dr hab. Krzysztof Krupiński
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 28 września 2024

# Algebra I R

## Program wykładu

Celem wykładu jest przedstawienie podstawowych pojęć i metod algebry abstrakcyjnej.

1. Działanie w zbiorze: łączność, przemienność, element neutralny. Przykłady działań. Definicja grupy i przykłady: grupy dihedralne, grupy permutacji i grupy macierzy.
2. Pojęcie podgrupy i przykłady. Rząd elementu grupy. Generatory grupy, grupy skończenie generowane. Grupy cykliczne: definicja, własności. Homo-, epi-, mono-, endo- i automorfizmy struktur: definicja, przykłady. Własności homomorfizmów grup. Jądro i obraz homomorfizmu grup. Charakteryzacja monomorfizmu grup przy pomocy jądra.
3. Dzielnik normalny, grupa ilorazowa, homomorfizm ilorazowy i zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup. Permutacje: krótkie przypomnienie z wykładu z algebry liniowej.
4. Działanie grupy na zbiorze i na grupie przez automorfizmy. Orbita, stabilizator i twierdzenie o nich „orbit-stabilizer theorem". Warstwy i indeks podgrupy, twierdzenie Lagrange'a. Produkt półprosty grup, rozkłady grup na produkty półproste. Klasyfikacja grup małych rzędów.
5. Twierdzenie Cauchy'ego, Twierdzenia Sylowa (dowód przez działania grup), zastosowania: grupy proste rzędu mniejszego od 60 są cykliczne.
6. Torsja w grupie, grupy torsyjne i beztorsyjne. Skończenie generowane grupy abelowe jako produkty grup cyklicznych.
7. Komutator, komutant, grupy rozwiązalne i twierdzenie o ich rozszerzeniach. Zastosowania tw. Sylowa do dowodów rozwiązalności grup pewnych rzędów. Krótka informacja o grupach nilpotentnych.
8. Ciąg kompozycyjny w grupie, lemat o motylu i tw. Schreiera.
9. Grupy wolne i ich podstawowe własności. Prezentacje grup.
10. Pierścień (przemienny, z jednością), dzielnik zera, element odwracalny, grupa elementów odwracalnych pierścienia, dziedzina i ciało. Przykłady pierścieni. Każda skończona dziedzina jest ciałem. Homomorfizm i izomorfizm pierścieni, definicja, przykłady.
11. Pierścienie szeregów formalnych i pierścienie wielomianów: definicja, podstawowe własności. Wielomiany a funkcje wielomianowe. Twierdzenie Bezouta. Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja, własności i przykłady.

12. Ideały w pierścieniach, pierścień ilorazowy, zasadnicze twierdzenie o homomorfizmach pierścieni. Ideały pierwsze (związek z dziedzinami) i ideały maksymalne (związek z ciałami). Dziedziny ideałów głównych (PID), pierścienie noetherowskie, przykłady i kontrprzykłady.
13. Teoria podzielności w dziedzinach, relacja stowarzyszenia. Abstrakcyjna definicja najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) i największego wspólnego dzielnika (NWD). Element nierozkładalny i element pierwszy w pierścieniu. Kryteria nierozkładalności w pierścieniu wielomianów. W pierścieniu noetherowskim każdy element rozkłada się na iloczyn elementów nierozkładalnych. Pierścienie z jednoznacznością rozkładu (UFD), przykłady i kontrprzykłady. Pierścień PID jest UFD, NWD i NWW w pierścieniu UFD. Lemat i Tw. Gaussa (informacja).
14. Pierścienie Euklidesa: definicja, przykłady (pierścień wielomianów, pierścień Gaussa) i kontrprzykłady. NWW i NWD w pierścieniach Euklidesa, algorytm Euklidesa. Każdy pierścień Euklidesa jest PID, kontrprzykład na implikację przeciwną (informacja).
15. Chińskie twierdzenie o resztach. Charakterystyka ciała. Podciało. Ciała proste. Podciało proste ciała. Liczba elementów ciała skończonego.

## Literatura pomocnicza

- B. Gleichgewicht, *Algebra*.
- A. Białynicki-Birula, *Algebra*.
- J. Rutkowski, *Algebra abstrakcyjna w zadaniach*.
- G. Birkhoff, S. MacLane, *Przegląd algebry współczesnej*.
- S. Lang, *Algebra*.
- M. Kargapołow, J. Mierzlakov, *Podstawy teorii grup*.

## Ćwiczenia

Listy zadań znajdują się na mojej stronie:

www.math.uni.wroc.pl/∼kkrup

Na stronie tej będą też pojawiać się inne informacje dotyczące przedmiotu.

Będzie obowiązywał następujący system zaliczania ćwiczeń. Odbędą się trzy 60-minutowe kolokwia (31.10, 5.12, 23.01). Z każdego z nich będzie można zdobyć 27 punktów. Będą też do zdobycia punkty z aktywności w czasie ćwiczeń, maksymalnie 19. Za każde poprawne rozwiązanie zadadanie przy tablicy przysługuje od 1 do 3 punktów, w zależności od stopnia trudności zadania i jakości rozwiązania. Punkty z aktywności można również zdobywać w czasie konwersatorium. W celu uniknięcia sytuacji, w której student nic nie robi przez większość semestru, a potem na jednych ćwiczeniach zdobywa wiele punktów, wprowadzam zasadę, że na jednych ćwiczeniach można maksymalnie zdobyć 4 punkty. Zachęcam do systematycznej pracy na ćwiczeniach.

Planowane progi na poszczególne oceny:
[0,45) - 2.0, [45,55) - 3.0, [55,65) - 3.5, [65,75) - 4.0, [75,85) - 4.5, [85,100] - 5.0.

W przypadku usprawiedliwionej nieobecności na jednym z kolokwiów liczba punktów zdobytych za aktywność zostaje pomnożona przez 2/3 i progi na poszczególne oceny również. Usprawiedliwienie nieobecności należy dostarczyć w ciągu tygodnia od daty kolokwium, którego ono dotyczy. Nieusprawiedliwiona nieobecność na kolokwium oznacza 0 punktów z tego kolokwium.

W przypadku usprawiedliwionej nieobecności na dwóch lub trzech kolokwiach o zaliczeniu ćwiczeń decyduje wykładowca w trybie indywidualnym.

Zasady przenoszenia na Algebrę 1.

1. Każdy ze studentów Algebry 1R może przenieść się na Algebrę 1 do 4.11.2024, wypełniajac Formularz B2 dostępny na stronie
https://www.math.uni.wroc.pl/ogloszenia-dyrekcji.
W razie problemów należy pisać do pani Anny Żmudy.

   Jeśli przeniesienie nastąpi po pierwszym kolokwium na Algebrze 1R, punkty z tego kolokwium zostaną anulowane, a student zobowiązany jest przystąpić do kolokium na Algebrze 1, które zaplanowane jest na 08.11.2024.

2. Po akceptacji przez dyr. T. Elsnera student jest zobowiązany powiadomić prof. Kowalskiego o dołączeniu do zajęć z Algebry 1.

3. Każdy ze studentów Algebry 1R, który nie skorzystał z możliwości opisanej w punkcie 1, a uzyskał z trzech kolokwiów na Algebrze 1R minimum 32 punkty (na 81 możliwych do zdobycia), może przenieść się na Algebrę 1 w okresie 27.01 – 31.01.2025, wypełniając formularz jak w punkcie 1 i natychmaist informując o tym fakcie prof. Kowalskiego. W tym przypadku:

   (a) Jeśli student osiągnął limit punktów na zaliczenie ćwiczeń na Algebrze 1R, uzyskuje na Algebrze 1 zaliczenie ćwiczeń z oceną, którą uzyskałby na Algebrze 1R.

   (b) Jeśli student nie osiągnął limitu punktów na zaliczenie ćwiczeń na Algebrze 1R, to na Algebrze 1 pisze kolokwium zaliczeniowe w terminie i trybie określonym przez prof. Kowalskiego.