ANALIZA MATEMATYCZNA 3.
LISTA ZADAŃ NR 3
POCHODNE CZĄSTKOWE, KIERUNKOWE I GRADIENT FUNKCJI.

---

1. Wyznaczyć na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ linie zadane parametrycznie:

$$\begin{array}{llllllll}
1) & x(t) & = & \cos(2\pi t)+1, & y(t) & = & \cos(2\pi t)+3, & t\in[-2,1] \\
2) & x(t) & = & 3\cos(2\pi t)+1, & y(t) & = & 3\cos(2\pi t)+3, & t\in[-2,1] \\
3) & x(t) & = & 3\cos(2\pi t)+1, & y(t) & = & 3\sin(2\pi t)+3, & t\in[-2,1] \\
4) & x(t) & = & 2\cos(2\pi t)+1, & y(t) & = & 3\sin(2\pi t)+3, & t\in[-2,1] \\
5) & x(t) & = & 2\cos(2\pi t)+1, & y(t) & = & 3\cos^2(2\pi t)+3, & t\in[-2,1] \\
6) & x(t) & = & 2\cos(2\pi t)+1, & y(t) & = & 3\sin^2(2\pi t)+3, & t\in[-2,1] \\
7) & x(t) & = & t, & y(t) & = & -\sqrt{4-t^2}, & t\in[-2,2] \\
8) & x(t) & = & -\sqrt{4-t^2}, & y(t) & = & 4-t^2, & t\in[-2,2] \\
9) & x(t) & = & \min\{t,1-t\}, & y(t) & = & \max\{t,1-t\}, & t\in[-1,1]
\end{array}$$

2. Wyznaczyć w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ linie zadane parametrycznie:

$$\begin{array}{llllllllll}
1) & x(t) & = & 2t, & y(t) & = & 3t, & z(t) & = & 4t, & t\in[1,2] \\
2) & x(t) & = & 2t+3, & y(t) & = & 3t+4, & z(t) & = & 4t+5, & t\in[-1,3] \\
3) & x(t) & = & 2t^2+3, & y(t) & = & 3t^2+4, & z(t) & = & 4t^2+5, & t\in[0,2] \\
4) & x(t) & = & 2t^2+3, & y(t) & = & 3t^2+4, & z(t) & = & 4t^2+5, & t\in[-1,2]
\end{array}$$

3. Obliczyć pochodne cząstkowe podanej funkcji $f(x,y)$ (na maksymalnej dziedzinie) i określić ich dziedziny:

$$\begin{array}{llllllllllll}
1) & f(x,y) & = & x^7y^9+xe^{xy}, & 2) & f(x,y) & = & \ln(x^2+y^3), & 3) & f(x,y) & = & |x|+|y| \\
\\
4) & f(x,y) & = & \frac{x^{10}y^{20}}{x^2+y^2}, & f(0,0) & = & 0, & 5) & f(x,y) & = & \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & f(0,0) = 0, \\
\\
6) & f(x,y) & = & \frac{e^{xy}-1}{x}, & f(0,y) & = & y, & 7) & f(x,y) & = & \frac{xy}{x^2+y^2}, & f(0,0) = 0, \\
\\
8) & f(x,y) & = & \frac{\sin(xy)}{x}, & f(0,y) & = & y, & 9) & f(x,y) & = & \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}, & f(0,0) = 0.
\end{array}$$

- Gradient funkcji $f(x,y)$ w punkcie $(a,b)\in D_f$ to wektor: $\nabla(f)(a,b)=\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b),\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]$

4. Obliczyć gradient $\nabla(f)(a,b)$ danych funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ w punkcie (a,b):

$$\begin{array}{lllllll}
1) & f(x,y) & = & \sqrt{xy} & (a,b) & = & (2,4) \\
2) & f(x,y) & = & \cos xy & (a,b) & = & (\frac{\pi}{3},2) \\
3) & f(x,y) & = & \ln xy & (a,b) & = & (1,3) \\
4) & f(x,y) & = & \ln(x^2+y^2) & (a,b) & = & (-2,2) \\
5) & f(x,y) & = & \sqrt{3+x^2+y^2} & (a,b) & = & (2,3) \\
6) & f(x,y) & = & \sqrt{16-x^2-y^2} & (a,b) & = & (2,-1) \\
7) & f(x,y) & = & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (a,b) & = & (3,4) \\
8) & f(x,y) & = & \sin\sqrt{x^2+y^2} & (a,b) & = & (3\pi,4\pi) \\
9) & f(x,y) & = & x^2y^3 & (a,b) & = & (-1,-1) \\
10) & f(x,y) & = & x^2-y^3 & (a,b) & = & (-3,2)
\end{array}$$

- Pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y)$ w punkcie $(a,b) \in D_f$ w kierunku wektora $\vec{v} = [v_1, v_2] \in \mathbb{R}^2$, gdy $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$, jest dana wzorem:

$$D_{\vec{v}}(f)(a,b) = \langle \nabla(f), v \rangle = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

5. Obliczyć pochodną kierunkową $D_{\vec{v}}(f)(a,b)$ podanych funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ w punkcie (a,b) w kierunku podanych wektorów $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rlllllllllll}
1) & f(x,y) & = & \sqrt{xy} & (a,b) & = & (2,4) & \vec{v} & = & [1,1], & \vec{v} & = & [-1,1] \\
2) & f(x,y) & = & \cos xy & (a,b) & = & (\frac{\pi}{3},2) & \vec{v} & = & [1,\pi], & \vec{v} & = & [-\pi,1] \\
3) & f(x,y) & = & \ln xy & (a,b) & = & (1,3) & \vec{v} & = & [2,4], & \vec{v} & = & [-2,2] \\
4) & f(x,y) & = & \ln(x^2+y^2) & (a,b) & = & (-2,2) & \vec{v} & = & [1,1], & \vec{v} & = & [-1,1] \\
5) & f(x,y) & = & \sqrt{3+x^2+y^2} & (a,b) & = & (2,3) & \vec{v} & = & [2,1], & \vec{v} & = & [-1,3] \\
6) & f(x,y) & = & \sqrt{16-x^2-y^2} & (a,b) & = & (2,-1) & \vec{v} & = & [1,2], & \vec{v} & = & [-2,1] \\
7) & f(x,y) & = & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (a,b) & = & (3,4) & \vec{v} & = & [3,1], & \vec{v} & = & [-1,3] \\
8) & f(x,y) & = & \sin\sqrt{x^2+y^2} & (a,b) & = & (3\pi,4\pi) & \vec{v} & = & [0,1], & \vec{v} & = & [-1,0] \\
9) & f(x,y) & = & x^2y^3 & (a,b) & = & (-1,-1) & \vec{v} & = & [2,5], & \vec{v} & = & [-3,2] \\
10) & f(x,y) & = & x^2-y^3 & (a,b) & = & (-3,2) & \vec{v} & = & [3,1], & \vec{v} & = & [-2,3]
\end{array}$$

- Gradient funkcji $f(x,y,z)$ w punkcie $(a,b,c) \in D_f$ to wektor:

$$\nabla(f)(a,b,c) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right]$$

6. Obliczyć gradient $\nabla(f)(a,b,c)$ danych funkcji trzech zmiennych $f(x,y,z)$ w punkcie (a,b,c), dla:

$$\begin{array}{rlllllll}
1) & f(x,y,z) & = & z\sqrt{xy} & (a,b,c) & = & (2,4,2) \\
2) & f(x,y,z) & = & z\cos xy & (a,b,c) & = & (\frac{\pi}{3},2,3) \\
3) & f(x,y,z) & = & z\ln xy & (a,b,c) & = & (1,3,-1) \\
4) & f(x,y,z) & = & \ln(x^2+y^2+z^2) & (a,b,c) & = & (-2,2,-1) \\
5) & f(x,y,z) & = & z\sqrt{3+x^2+y^2} & (a,b,c) & = & (2,3,-1) \\
6) & f(x,y,z) & = & \sqrt{16-x^2-y^2-z^2} & (a,b,c) & = & (2,-1,-2) \\
7) & f(x,y,z) & = & \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} & (a,b,c) & = & (3,4,-2) \\
8) & f(x,y,z) & = & \sin\sqrt{x^2+y^2-z^2} & (a,b,c) & = & (3\pi,4\pi,-\pi) \\
9) & f(x,y,z) & = & x^2y^3z^4 & (a,b,c) & = & (-1,1,2) \\
10) & f(x,y,z) & = & x^2-y^3+z^4 & (a,b,c) & = & (-3,2,-2)
\end{array}$$

- Pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y,z)$ w punkcie $(a,b,c) \in D_f$ w kierunku wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3$, gdy $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = 1$, jest dana definicja:

$$D_{\vec{v}}(f)(a,b,c) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2, c+tv_3) - f(a,b,c)}{t}$$

a obliczyć ją można także wzorem:

$$D_{\vec{v}}(f)(a,b,c) = \langle \nabla(f), v\rangle = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + v_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(a,b)$$

7. Obliczyć pochodną kierunkową $D_{\vec{v}}(f)(a,b,c)$ podanych funkcji trzech zmiennych $f(x,y,z)$ w punkcie (a,b,c) w kierunku podanych wektorów $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$:

1)	$f(x,y,z) = z\sqrt{xy}$	$(a,b,c) = (2,4,1)$	$\vec{v} = [1,1,-1]$,	$\vec{v} = [-1,1,1]$
2)	$f(x,y,z) = z\cos xy$	$(a,b,c) = (\frac{\pi}{3},2,-1)$	$\vec{v} = [1,\pi,2]$,	$\vec{v} = [-\pi,1,1]$
3)	$f(x,y,z) = z\ln xy$	$(a,b,c) = (1,3,-2)$	$\vec{v} = [2,4,-1]$,	$\vec{v} = [-2,2,1]$
4)	$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$	$(a,b,c) = (-2,2,-1)$	$\vec{v} = [1,1,0]$,	$\vec{v} = [-1,0,1]$
5)	$f(x,y,z) = z\sqrt{3+x^2+y^2}$	$(a,b,c) = (2,3,-1)$	$\vec{v} = [2,0,1]$,	$\vec{v} = [0,-1,3]$
6)	$f(x,y,z) = z\sqrt{16-x^2-y^2}$	$(a,b,c) = (2,-1,-2)$	$\vec{v} = [1,0,2]$,	$\vec{v} = [-2,1,0]$
7)	$f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$(a,b,c) = (3,4,-1)$	$\vec{v} = [3,1,-3]$,	$\vec{v} = [-1,3,1]$
8)	$f(x,y,z) = z\sin\sqrt{x^2+y^2}$	$(a,b,c) = (\frac{3\pi}{2},2\pi,2)$	$\vec{v} = [0,1,2]$,	$\vec{v} = [-1,0,1]$
9)	$f(x,y,z) = x^2y^3z^4$	$(a,b,c) = (-1,-1,2)$	$\vec{v} = [3,5,8]$,	$\vec{v} = [-3,2,1]$
10)	$f(x,y,z) = x^2-y^3+z^4$	$(a,b,c) = (-3,2,-1)$	$\vec{v} = [0,3,1]$,	$\vec{v} = [1,-2,3]$