Ćwiczenia 21.12.2010: zad. 333-369 Kolokwium nr 10, 22.12.2010: materiał z zad. 1-369
Ćwiczenia 3.01.2011: zad. 370-389 Kolokwium nr 11, 4.01.2011: materiał z zad. 1-389
Ćwiczenia 10.01.2011: zad. 390-411 Kolokwium nr 12, 11.01.2011: materiał z zad. 1-411

Funkcje. Granica i ciągłość.

Uwaga: Zapis $\mathrm{sgn}(x)$ oznacza znak liczby x:
$\mathrm{sgn}(x)=1$ dla $x>0$
$\mathrm{sgn}(x)=0$ dla $x=0$
$\mathrm{sgn}(x)=-1$ dla $x<0$

Uwaga: Zapis $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.
$\{x\}=x-[x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem

333. $\mathrm{sgn}(\sin x)$ **334.** $\{x\}-(\{x\})^2$

335. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x<0 \\ x & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ -x^2+4x-2 & \text{dla} \quad 1\leqslant x<3 \\ 4-x & \text{dla} \quad x\geqslant 3 \end{cases}$

336. $f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x\neq 2 \\ \mathrm{sgn}(x) & \text{dla} \quad x=2 \end{cases}$ **337.** $\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ **338.** $\dfrac{1}{\{x\}}$

339. $\mathrm{sgn}(x^3-x)$ **340.** $x^3\mathrm{sgn}(x)$ **341.** $\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|$

342. $f(x)=|x^2-1|-|x^2-4|$ **343.** $f(x)=|x^2-8x+15|$

344. $f(x)=x^2+x+2-|x^2-x-2|$ **345.** $f(x)=\{\cos x\}$

346. $f(x)=[\frac{4}{\pi}\mathrm{arctg} x]$ **347.** $f(x)=2\{\sin x\}-\{2\sin x\}$

348. $f(x)=[x]+x$ **349.** $f(x)=\{x\}+x$ **350.** $f(x)=\left[\left|x-\frac{1}{2}\right|\right]$

Obliczyć następujące granice:

351. $\displaystyle\lim_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7}-\frac{8}{x^2-6x-7}\right)$ **352.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **353.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

354. $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ **355.** $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x+2}$ **356.** $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$

357. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ **358.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^{2008}-1}{x^{10}-1}$ **359.** $\displaystyle\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

360. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ **361.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **362.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

363. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ **364.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **365.** $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **366.** $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+\ln x}$

367. $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **368.** $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **369.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$

370. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2 & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2 \\ ax-b & \text{dla} \quad 2\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b), dla których funkcja f jest ciągła.

371. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2+ax+b & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2 \\ x+3 & \text{dla} \quad 2\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b), dla których funkcja f jest ciągła.

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby

$$\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

372. $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$ **373.** $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$

374. $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$ **375.** $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$

376. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$ **377.** $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

Oszustwo **378.** (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x)=x^2$ jest nieciągła.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja f jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon=1$. Wtedy istnieje takie $\delta>0$, że dla y spełniających nierówność $|y-x|<\delta$ zachodzi $|x^2-y^2|<1$.

Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x>\frac{1}{\delta}$ i $y=x+\frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2-y^2|=x\delta+\frac{\delta^2}{4}>1$.

□

Oszustwo **379.** (przykład funkcji ciągłej): Funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0 \\ 0 & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Dowód: Oczywiście f jest ciągła w każdym punkcie oprócz 0, pozostaje więc wykazać ciągłość w 0. Przeprowadzimy dowód niewprost. Zakładając, że f jest nieciągła w 0, weźmy $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Wtedy istnieje takie $\delta>0$, że dla x spełniających nierówność $|x|<\delta$ zachodzi $|f(x)-0|\geqslant\frac{1}{2}$.

Ale biorąc $x=\frac{1}{\pi n}$, gdzie $n>\frac{1}{\pi\delta}$, otrzymujemy $f(x)=0$ i $|x|<\delta$. Zatem $|f(x)-0|=0<\frac{1}{2}$, skąd sprzeczność.

□

Wskazać taką liczbę M, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)|\leqslant M\,.$$

380. $f(x)=\dfrac{2x^4+13x^2+7}{5x^4+x^2+2}$ **381.** $f(x)=\dfrac{5x^4+x^2+2}{2x^4+13x^2+7}$ **382.** $f(x)=e^{\sin x}$

383. $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$ **384.** $f(x)=\dfrac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

OSZUSTWO**385.** Niech $f,g:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0)=5$, $f(1)=7$, $g(0)=8$, $g(1)=4$. Wtedy istnieje takie $c\in(0,1)$, że $f(c)=g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c\in(0,1)$ mamy $f(c)=6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c)=6$. A zatem
$f(c)=g(c)$, co należało dowieść. $\square$

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.

386. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000}+2=(1{,}000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

387. Dla których liczb

$$n\in\left\{2, 4, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10^5, 10^{10}, 10^{30}, 10^{100}, 10^{1000}\right\}$$

wykres funkcji

$$f(x)=2^x$$

przecina wykres funkcji

$$g(x)=x^n+4\,,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

388. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

389. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos\left(x^3\right)$$

ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

390. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{x}{2}$ **391.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ **392.** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+5x+4}+|x|$

393. $f(x)=\log_4(2^x+8^x)$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie $k\in\mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta=10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

394. $f(x)=x^{10}$, $x_0=2$, $\varepsilon=1/10$ **395.** $f(x)=x^{100}$, $x_0=5$, $\varepsilon=10^{-10}$

396. $f(x)=x^{1000}$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

397. $f(x)=x^{1/10}$, $x_0=1111$, $\varepsilon=10^{-5}$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f,g,h są określone w otoczeniu punktu $x_0\in[-\infty,+\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$$

dla x bliskich x_0, to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)\,.$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

398. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^{1000}\right)}{\sqrt{x}}$ **399.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\left\{1/x^{1000}\right\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

obliczyć

400. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **401.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$

402. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$ **403.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **404.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$

405. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot f(x)}$, gdzie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

406. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$ **407.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$

Dla podanej funkcji f wyprowadzić oszacowanie postaci

$$|f(x)-f(x_0)|<C\cdot\delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta>0$ oraz dowolnych $x, x_0\in D_f$ spełniających warunek $|x-x_0|<\delta$.

408. $f(x)=\sqrt{x}$, $D_f=[1,+\infty)$

409. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

410. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

411. $f(x)=x^3$, $D_f=[-10,5]$