Ciągi.

Ćwiczenia 22.11.2010: zad. 128-163 Kolokwium nr 6, 23.11.2010: materiał z zad. 1-179

Trochę teorii

Definicja: Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} |a_n - g| < \varepsilon \ .$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{M}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} a_n > M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{M}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} a_n < M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Twierdzenia:

1. Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

2. Granica sumy jest sumą granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

3. Granica różnicy jest różnicą granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n - b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

4. Granica iloczynu jest iloczynem granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

5. Granica ilorazu jest ilorazem granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \ .$$

6. Zbieżność i granica nie zależą od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów ciągu.

7. Słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $a_n \leqslant b_n$ (odpowiednio $a_n \geqslant b_n$), to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$).

8. Kilka podstawowych granic.
$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} a = a$
$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ dla $a > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ dla $|a| < 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

9. Z granicą można wchodzić pod pierwiastek.
Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geqslant 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} \; .$$

10. Twierdzenie o trzech ciągach.
Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g.

11. Kryterium d'Alemberta.
Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 \; ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.
Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 \; ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Uwaga: Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa za kilka tygodni.

Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do $\pm\infty$), o ile nie prowadzi to do wyrażeń nieoznaczonych.

12. Sztuczki oparte na wzorach skróconego mnożenia.

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

Zadania

Wyjaśnić, dlaczego poniżej są same **BZDURY**:

128. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=0\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=0$

129. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty-\infty=0$

130. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych}\end{cases}$

131. $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{n}=k\cdot\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{n}=k\cdot 0=0$

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

132. $\frac{n}{n+7}$ **133.** $2^n-\frac{1}{n}$ **134.** $\frac{4n^2+3n}{n+1}$ **135.** $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$ **136.** $\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$

137. $\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$ **138.** $\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$ **139.** $\frac{1-2+3-4+5-6+...-2n}{\sqrt{n^2+2}}$

140. $\frac{1+2+4+...+2^n}{1+3+9+...+3^n}$ **141.** $\frac{n}{1+\sqrt{n}}$ **142.** $n\cdot(-1)^n$ **143.** $\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$

144. $\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$ **145.** $\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}$ **146.** $\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$ **147.** $\sqrt[n^2]{n}$

148. $\sqrt[n]{n^2}$ **149.** $\sqrt[n]{n+17}$ **150.** $\sqrt{n^2+3n}-n$ **151.** $n(\sqrt{n^2+7}-n)$

152. $\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$ **153.** $\frac{(-1)^n}{n}$ **154.** $\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$

155. $a_n=\begin{cases}(-1)^n\cdot n! \text{ dla } n\leqslant 100\\ \frac{2^n}{2^n+n} \text{ dla } n>100\end{cases}$ **156.** $\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+...+\frac{n^2+n}{n^3+n}$

157. $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}$ **158.** $\frac{n^7}{7^n}$ **159.** $\frac{10^n}{n!}$ **160.** $\frac{n!}{n^{22}}$

161. $\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$ **162.** $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$ **163.** $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$

Konwersatorium

164. Ciąg (a_n) spełnia warunek
$$\underset{n>1000}{\forall} |a_n-100|<10.$$
Czy stąd wynika, że
a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,
d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,
e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
f) $a_{666}<7777777$,
g) $a_{1111}>88$,
h) $\underset{n>1729}{\forall} |a_n-100|<1$,
i) $\underset{n>345}{\forall} |a_n-100|<17$,
j) $\underset{n>5555}{\forall} |a_n-99|<13$,
k) ciąg (a_n) jest ograniczony,
l) $\underset{n>444}{\exists} |a_n-95|<37$,
m) $\underset{n>4444}{\exists} |a_n-80|<37$,
n) $\underset{n<444}{\exists} |a_n-95|<37$,
o) $\underset{n<4444}{\exists} |a_n-80|<37$,
p) $\underset{m}{\forall} \underset{n>m}{\exists} a_n>0$,
q) $\underset{n>1331}{\forall} |a_n-66|>12$,
r) $\underset{m>1234}{\forall} \underset{n>5678}{\forall} |a_n-a_m|<7$,
s) $\underset{m>1234}{\forall} \underset{n>5678}{\forall} |a_n-a_m|<17$,
t) $\underset{m>123}{\forall} \underset{n>45678}{\forall} |a_n-a_m|<27$,
u) $\underset{m>1234}{\forall} \underset{n>5678}{\forall} |a_n-a_m|<37$,
v) $\underset{m<123}{\exists} \underset{n<456}{\exists} |a_n-a_m|<3$,
w) $\underset{m>12345}{\forall} \underset{n>67890}{\forall} |a_n+a_m|<210$,
x) $\underset{m>1296}{\forall} \underset{n>7776}{\forall} |a_n+a_m|<222$,
y) $\underset{m>1024}{\forall} \underset{n>8192}{\forall} |a_n+a_m|>128$,
z) $\underset{n}{\exists} a_n<92$,
ż) $\underset{n}{\exists} a_n>91$.

165. Dany jest taki ciąg (a_n), że
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{n\geqslant 5/\varepsilon}{\forall} |a_n-7|<\varepsilon\ .$$

Podać granicę ciągu (a_n).
Wskazać taką liczbę M, że $\underset{n}{\forall} |a_n| < M$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} a_n > 6$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} a_n < 7{,}01$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} |a_n - 8| > 1/3$.

166. Dany jest taki ciąg (b_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant 10/\varepsilon}{\forall} |b_n + 2| < \varepsilon \ .$$

Podać granicę ciągu (b_n).
Wskazać taką liczbę M, że $\underset{n}{\forall} |b_n| < M$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} b_n < 0$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} b_n > -3$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} |b_n - 2| > 1/10$.

167. Niech $c_n = a_n + b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są ciągami z poprzednich dwóch zadań. Dowieść, że wówczas ciąg (c_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant ..../\varepsilon}{\forall} |c_n - 5| < \varepsilon \ .$$

W miejscu kropek powinna się znaleźć odpowiednio dobrana liczba.

168. Niech $d_n = a_n \cdot b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są jak poprzednio. Dowieść, że wówczas ciąg (d_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant ....}{\forall} |d_n + 14| < \varepsilon \ .$$

W miejscu kropek powinno się znaleźć odpowiednio dobrane wyrażenie zależne od ε.

169. Niech $e_n = 2a_n + 3b_n$. Dowieść, że wówczas ciąg (e_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant ..../\varepsilon}{\forall} |e_n - ....| < \varepsilon \ .$$

W miejscu kropek powinny się znaleźć odpowiednio dobrane liczby.

PRAWDA CZY FAŁSZ?

170. Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.

171. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.

172. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.

173. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.

174. Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

175. Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2}$, to $a_n \to \frac{1}{2}$.

176. Jeżeli ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

177. Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

178. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

179. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

Kwantyfikatory, implikacja, alternatywa, koniunkcja.

Te zadania mogą pojawić się na Matematyce Elementarnej. Nie przewidujemy na nie specjalnego czasu na Analizie.

180. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja
a) $x>0 \Rightarrow x+1>0$
b) $x>0 \Rightarrow x-1>0$
c) $x=3 \Rightarrow x>0$
d) $x=-3 \Rightarrow x>0$
e) $x^2=4 \Rightarrow x=2$
f) $x^2=-4 \Rightarrow x=-2$

W poniższych zadaniach x, y przebiegają liczby rzeczywiste, natomiast m, n przebiegają liczby naturalne (całkowite dodatnie).

181. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych
a) $\underset{m}{\exists}\, n=2m$
b) $\underset{m}{\exists}\, m=2n$
c) $\underset{m}{\exists}\, m=3n$
d) $\underset{m}{\exists}\, n=9m$
e) $\underset{m}{\exists}\, n^2=9m$
f) $\underset{m}{\exists}\, n^3=9m$
g) $\underset{m}{\exists}\, n^2=27m$
h) $\underset{m}{\exists}\, n^3=27m$
i) $\underset{m}{\exists}\, n=2m-1$
j) $\underset{m}{\exists}\, n=2m+1$
k) $\underset{m}{\forall}\, n\neq 2m$
l) liczba n jest nieparzysta
m) liczba n jest podzielna przez 3
n) liczba n jest podzielna przez 9

o) liczba n jest parzysta
p) liczba n jest nieparzysta i różna od 1

W kolejnych siedmiu zadaniach każdemu warunkowi oznaczonemu literą przypisać równoważny warunek oznaczony cyfrą.

182. **a)** $x>0\Rightarrow -x>0$ **b)** $x>0\Rightarrow |x|>0$ **c)** $-x>0\Rightarrow x>0$ **d)** $|x|>0\Rightarrow x>0$
1) $x\geqslant 0$ **2)** $x\leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

183. **a)** $\underset{x}{\forall}\,(x>0\Rightarrow -x>0)$ **b)** $\underset{x}{\forall}\,(x>0\Rightarrow |x|>0)$
c) $\underset{x}{\forall}\,(-x>0\Rightarrow x>0)$ **d)** $\underset{x}{\forall}\,(|x|>0\Rightarrow x>0)$
1) $x\geqslant 0$ **2)** $x\leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

184. **a)** $\underset{x}{\exists}\,(x>0\Rightarrow -x>0)$ **b)** $\underset{x}{\exists}\,(x>0\Rightarrow |x|>0)$
c) $\underset{x}{\exists}\,(-x>0\Rightarrow x>0)$ **d)** $\underset{x}{\exists}\,(|x|>0\Rightarrow x>0)$
1) $x\geqslant 0$ **2)** $x\leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

185. **a)** $\underset{y}{\forall}\,x>y^2$ **b)** $\underset{y}{\exists}\,x>y^2$ **c)** $\underset{y}{\forall}\,x<y^2$ **d)** $\underset{y}{\exists}\,x<y^2$
1) $x<0$ **2)** $x>0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

186. **a)** $\underset{y}{\forall}\,x=y$ **b)** $\underset{y}{\exists}\,x=y$ **c)** $\underset{y}{\forall}\,x\neq y$ **d)** $\underset{y}{\exists}\,x\neq y$
1) $x=0$ **2)** $x>0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

187. **a)** $\underset{y}{\forall}\,x^2=-y^2$ **b)** $\underset{y}{\exists}\,x^2=-y^2$ **c)** $\underset{y}{\forall}\,x^2\neq -y^2$ **d)** $\underset{y}{\exists}\,x^2\neq -y^2$
1) $x=0$ **2)** $x\neq 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

188. **a)** $\underset{y}{\forall}\,xy=y$ **b)** $\underset{y}{\exists}\,xy=y$ **c)** $\underset{y}{\forall}\,xy=x$ **d)** $\underset{y}{\exists}\,xy=x$
1) $x=0$ **2)** $x=1$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

189. Czy jest prawdą, że
a) $\underset{x}{\forall}\,(x=3\Rightarrow x=5)$
b) $\underset{x}{\exists}\,(x=5\Rightarrow x=3)$
c) $\underset{x}{\forall}\,(x^2>-4\Rightarrow x^2>-1)$
d) $\underset{x}{\exists}\,(x^2>-1\Rightarrow x^2=25)$
e) $\underset{x}{\exists}\,(x^2>-1\Rightarrow x<-1)$
f) $\underset{x}{\exists}\,(x^2<-1\Rightarrow x>-1)$
g) $\underset{x}{\forall}\,(x^2<-1\Rightarrow x<-1)$
h) $\underset{x}{\forall}\,(x^2>-1\Rightarrow x>-1)$

190. Dla których liczb naturalnych k spełniony jest podany warunek?
a) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(m>1\wedge n>1\wedge k=mn)$
b) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(m>1\wedge n>1\wedge k=m+n)$

c) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(m>1\wedge n>1\wedge k=m-n)$
d) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(m>1\wedge n>1\wedge k=6m-2n)$
e) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}\left(m>1\wedge n>1\wedge k+2mn=m^2+n^2\right)$
f) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}(k=mn\Rightarrow m+n=6)$
g) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(k=mn\Rightarrow m+n=6)$
h) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}(k=mn\wedge m+n=6)$
i) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(k=mn\wedge m+n=6)$
j) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}(k=mn\vee m+n=6)$
k) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(k=mn\vee m+n=6)$
l) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}\left(k=mn\wedge m=n^2\right)$
m) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(k=mn\wedge m=nk)$
n) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(km=n\wedge m=nk)$

Kresy zbiorów.

Ćwiczenia 29.11.2010: zad. 191-223 Kolokwium nr 7, 30.11.2010: materiał z zad. 1-241

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z góry, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\quad x\leqslant M\,.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M\in\mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\underset{x\in Z}{\forall}\quad x\leqslant M$$

nazywamy ograniczeniem górnym zbioru Z.

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\quad x\geqslant M\,.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M\in\mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\underset{x\in Z}{\forall}\quad x\geqslant M$$

nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru Z.

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.

Definicja: Jeżeli niepusty zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to kresem górnym zbioru Z nazywamy jego najmniejsze ograniczenie górne i stosujemy oznaczenie $\sup Z$. Istnienie takiego najmniejszego ograniczenia wynika z zasady ciągłości Dedekinda. Jeżeli zbiór Z jest nieograniczony z góry, przyjmujemy $\sup Z=+\infty$. Ponadto przyjmujemy $\sup\emptyset=-\infty$. Analogicznie określamy kres dolny zbioru, oznaczany przez $\inf Z$.

Wniosek: Jeżeli niepusty zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to liczba G jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x\in Z}{\forall}\quad x\leqslant G$$

oraz

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x\in Z}{\exists}\ x>G-\varepsilon\,.$$

Zadania.

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

191. $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2<2\right\}$ **192.** $\left\{\frac{37^n}{n!}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$

193. $\left\{\frac{1}{m}-\frac{n}{n+1}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$ **194.** $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^4\geqslant 5\right\}$

195. $\left\{\frac{m^2+n^2}{2mn}:\ m,n\in\mathbb{N}\ ,\ m<n\right\}$ **196.** $\left\{\frac{mnk}{m^3+n^3+k^3}:\ m,n,k\in\mathbb{N}\right\}$

Niech A i B będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych. Niech $a_1=\inf A$, $a_2=\sup A$, $b_1=\inf B$, $b_2=\sup B$. Co można powiedzieć o następujących kresach:

197. $\inf\{-a:\ a\in A\}$ **198.** $\sup\{a^2:\ a\in A\}$ **199.** $\inf\{a^2:\ a\in A\}$

200. $\sup\{a-b:\ a\in A,\ b\in B\}$ **201.** $\sup\{ab:\ a\in A,\ b\in B\}$

202. $\inf\{ab:\ a\in A,\ b\in B\}$

203. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b}:\ a\in A,\ b\in B\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

204. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A=-3$, $\sup A=2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a|:\ a\in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

205. Podać przykład takich zbiorów A, B, że $\inf A=2$, $\sup A=7$, $\inf B=3$, $\sup B=10$, $\inf(A\cap B)=4$, $\sup(A\cap B)=6$, $A\cap\mathbb{N}=B\cap\mathbb{N}=\emptyset$.

Niepotrzebne skreślić.

W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

TWIERDZENIE **206.** Niech A i B będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Niech $C=\{a-b:\ a\in A\wedge b\in B\}$. Wtedy $\inf C=$ $\boxed{\inf A-\sup B}\boxed{\sup B-\inf A}$.

Dowód:

Niech $d = \inf A$ i $g = \sup B$. Wtedy z warunku $d = \inf A$ wynika, że

(1) $\boxed{\forall_{a\in A} \,|\, \exists_{a\in A}}$ $\boxed{a \leqslant d \,|\, a \geqslant d}$

oraz

(2) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0} \,|\, \exists_{\varepsilon>0}}$ $\boxed{\forall_{a\in A} \,|\, \exists_{a\in A}}$ $\boxed{a < d+\varepsilon \,|\, a > d-\varepsilon}$.

Podobnie z warunku $g = \sup B$ wynika

(3) $\boxed{\forall_{b\in B} \,|\, \exists_{b\in B}}$ $\boxed{b \leqslant g \,|\, b \geqslant g}$

oraz

(4) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0} \,|\, \exists_{\varepsilon>0}}$ $\boxed{\forall_{b\in B} \,|\, \exists_{b\in B}}$ $\boxed{b < g+\varepsilon \,|\, b > g-\varepsilon}$.

Chcemy wykazać, że $\inf C = e$, gdzie $e = \boxed{d-g \,|\, g-d}$, czyli, że

(5) $\boxed{\forall_{c\in C} \,|\, \exists_{c\in C}}$ $\boxed{c \leqslant e \,|\, c \geqslant e}$

oraz

(6) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0} \,|\, \exists_{\varepsilon>0}}$ $\boxed{\forall_{c\in C} \,|\, \exists_{c\in C}}$ $\boxed{c < e+\varepsilon \,|\, c > e-\varepsilon}$.

[W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).]

[Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).]

[Dowolna | Istnieje] liczba $c \in C$ [jest | będąca] postaci $c = a-b$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Z nierówności $\boxed{a \leqslant d \,|\, a \geqslant d}$ i $\boxed{b \leqslant g \,|\, b \geqslant g}$ otrzymujemy $\boxed{a-b \leqslant e \,|\, a-b \geqslant e}$, co dowodzi (5).

[Załóżmy | Wykażemy] teraz prawdziwość warunku (6).

[Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy]

[Znajdziemy taką liczbę dodatnią ε, dla której]

istnieje $a \in A$ takie, że $\boxed{a > d-\varepsilon \,|\, a < d+\frac{\varepsilon}{2}}$ oraz $b \in B$ takie, że $\boxed{b < g+\varepsilon \,|\, b > g-\frac{\varepsilon}{2}}$. Zatem liczba $c = a-b$ spełnia nierówność $\boxed{c < e+\varepsilon \,|\, c > e-\varepsilon}$, co kończy dowód warunku (6).

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

207. $\left\{x^2 : x \in (-4,9)\right\}$ **208.** $\left\{\frac{n}{2n+3} : n \in \mathbb{N}\right\}$

209. $\left\{\frac{n!}{5^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ **210.** $\left\{\binom{2009}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant 2009\right\}$

211. $\left\{\frac{n}{n+m} : m,n \in \mathbb{N}\right\}$ **212.** $\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{3}\right)^2 : n \in \mathbb{N}\right\}$

213. $\left\{\sqrt{n^2+n}-n : n \in \mathbb{N}\right\}$ **214.** $\left\{\sqrt[n]{3}-\sqrt[m]{2} : m,n \in \mathbb{N}\right\}$

215. $\left\{\frac{7}{n}-3m : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ **216.** $\left\{\frac{m^2+4n^2}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

217. $\left\{\frac{m^2+5n^2}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ **218.** $\left\{\frac{3m^2+7n^2}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

219. $\left\{\left(\sqrt{37}-5\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$ **220.** $\left\{\left(\sqrt{37}-6\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

221. $\left\{\left(\sqrt{37}-7\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$ **222.** $\left\{\left(\sqrt{37}-8\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

223. $\left\{\frac{mn}{m^2+n^2+1} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

Konwersatorium

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g=\sup A$?

224. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a<g+\varepsilon\right)$

225. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} |a-g|<\varepsilon\right)$

226. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-2\varepsilon\right)$

227. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

228. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\frac{1}{n}\right)$

229. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} n^2(g-a)<\frac{1}{n}\right)$

230. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a<g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} (a-g)^2<\varepsilon\right)$

231. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} (a-g)^2<\varepsilon\right)$

232. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>\varepsilon\right)$

233. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

234. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{0<\varepsilon<1}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

235. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a\geqslant g-\varepsilon\right)$

236. $\left(\forall_{a\in A} a \leqslant g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon\geqslant 0}\exists_{a\in A} a \geqslant g-\varepsilon\right)$

237. $\left(\forall_{a\in A} a \leqslant g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon\geqslant 0}\exists_{a\in A} a > g-\varepsilon\right)$

238. $\left(\forall_{a\in A} a \leqslant g\right) \wedge \left(\forall_{a\in A}\exists_{b\in A} b \geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

239. $\left(\exists_{a\in A} a \leqslant g\right) \wedge \left(\forall_{a\in A} a \leqslant g\right) \wedge \left(\forall_{a\in A}\exists_{b\in A} b \geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

240. $\left(\exists_{a\in A} a^2 \geqslant 0\right) \wedge \left(\forall_{a\in A} a \leqslant g\right) \wedge \left(\forall_{a\in A}\exists_{b\in A} b \geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

241. $\left(\exists_{a\in A} a \leqslant g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon> 0}\exists_{a\in A} a > g-\varepsilon\right)$

Szeregi liczbowe.

Ćwiczenia 6.12.2010: zad. 241-267 Kolokwium nr 8, 7.12.2010: materiał z zad. 1-267

Ćwiczenia 13.12.2010: zad. 268-288 Kolokwium nr 9, 14.12.2010: materiał z zad. 1-332

Obliczyć $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, a następnie znaleźć $\lim_{n\to\infty} S_n$:

242. $a_k = \frac{1}{7^k}$ **243.** $a_k = \frac{2^k+5^k}{10^k}$

244. Dowieść, że $4 < \sum_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7$.

245. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

246. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **247.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ **248.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}$ **249.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots\cdot(4n-3)}$

250. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47}$ **251.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$

252. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ **253.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ **254.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

255. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ **256.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ **257.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$ **258.** $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$

259. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$ **260.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ **261.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

262. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ **263.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ **264.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

265. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$ **266.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$ **267.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\pi}{n^\pi+e}$

Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

268. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ **269.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$ **270.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

271. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n+1}{n}$ **272.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$ **273.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$

274. $1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+...+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-...-\frac{1}{k}+...$ (k razy)

275. $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-...-\frac{1}{k^2}+...$ (k razy)

276. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$ **277.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ **278.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$

279. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+17}{3^n}$ **280.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!}$ **281.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$ **282.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}(-1)^n$

283. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **284.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}}$ **285.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n}+27}$

286. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$ **287.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$ **288.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)(-1)^n$

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. Warunek konieczny zbieżności.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównanwcze.

Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. Kilka szeregów.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a. Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. Zbieżność bezwzględna.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

7. Szeregi naprzemienne.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

Konwersatorium

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

289. $a_n > \dfrac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n > 0$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

290. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

291. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n^2}=\frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$.

292. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n\in\mathbb{Z}$, $a_n=n$ dla $n\leqslant 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny.

293. $a_n=1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny.

294. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ są rozbieżne.

295. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ jest zbieżny.

296. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

297. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(a_{2^n}+a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+...+a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

298. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ i $a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

299. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ jest rozbieżny.

300. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ jest zbieżny.

301. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S. Czy stąd wynika, że zbieżny jest ciąg (a_n), jeżeli

a) $S=0$ **b)** $0<S<1$ **c)** $S=1$ **d)** $S>1$

302. Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

a) $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$ **b)** $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{7}{4}$ **c)** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5}{4}$

303. Podać sumę szeregu, jeżeli szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-6)^n}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}$

304. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

305. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(n+2)^n}.$$

306. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(n+2)^{n+2}}.$$

Obliczyć sumę szeregu

307. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot(-1)^n}{n(n+1)}$ **308.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

Wyznaczyć kresy zbiorów

309. $\displaystyle\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{1}{2}\right)^n : N\in\mathbb{N}\right\}$ **310.** $\displaystyle\left\{\sum_{n=M}^{N}\left(-\frac{1}{2}\right)^n : M,N\in\mathbb{N}\wedge M<N\right\}$

311. $\displaystyle\left\{\sum_{n=M}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n : M\in\mathbb{N}\right\}$

Zadania do samodzielnej powtórki.

Jeśli uda się wygospodarować trochę czasu, wątpliwości związane z tymi zadaniami mogą być wyjaśnione na konwersatorium lub ćwiczeniach.

Zawsze można też skorzystać z konsultacji.

312. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+n^{22}}{\sqrt{4^{n+4}+n^{4444}}}$$

lub uzasadnić, że granica nie istnieje.

313. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\cdot\sqrt{n^2+1}-n^4-\frac{n^2}{2}\right).$$

314. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{8n^2+1}}{\sqrt{2n^4+1}}+\frac{\sqrt{8n^2+2}}{\sqrt{2n^4+2}}+\frac{\sqrt{8n^2+3}}{\sqrt{2n^4+3}}+\frac{\sqrt{8n^2+4}}{\sqrt{2n^4+4}}+\ldots+\frac{\sqrt{8n^2+3n}}{\sqrt{2n^4+3n}}\right).$$

315. W każdym z zadań **315.1-315.13** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

315.1. $A=\{x^2 : x\in(-3,2)\}$

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

315.2. $B=\{x^3 : x\in(-3,2)\}$

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

315.3. $C=\left\{\frac{1}{5n-13} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

315.4. $D=\left\{\frac{\sqrt[n]{2}}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

315.5. $E=\left\{n^2-5n : n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

315.6. $F=\left\{\frac{13^n}{n!}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru F .... Czy kres górny należy do zbioru F ....

315.7. $G=\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru G .... Czy kres górny należy do zbioru G ....

315.8. $H=\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru H .... Czy kres górny należy do zbioru H ....

315.9. $I=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\wedge 2m^2<3n^2\right\}$

$\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru I .... Czy kres górny należy do zbioru I ....

315.10. $J=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\wedge 2^m>3^n\right\}$

$\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru J .... Czy kres górny należy do zbioru J ....

315.11. $K=\left\{\frac{mn}{m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf K=$ .... $\sup K=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru K .... Czy kres górny należy do zbioru K ....

315.12. $L=\left\{7n+\frac{n!+n^{2009}+1}{n!+n^{2009}+4}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf L=$ .... $\sup L=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru L .... Czy kres górny należy do zbioru L ....

315.13. $M=\left\{\frac{m+n}{p}:m,n,p\in\mathbb{N}\wedge m^2>2p^2\wedge n^2>3p^2\right\}$

$\inf M=$ .... $\sup M=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru M .... Czy kres górny należy do zbioru M ....

316. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+64}-\sqrt{n^3+1}\right).$$

317. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n^4-7n^3+1}{19n^5-13n^2+1}.$$

318. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n^4-7n^3+1}{19n^6-13n^2+1}.$$

319. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

320. a) Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^n}{2^n}.$$

b) Obliczyć jego sumę.

321. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+k}-n}{k}.$$

322. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^{2009}}{2^{n^2}}.$$

323. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

324. a) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n^4+n^2+1}$$

w zależności od parametru rzeczywistego **dodatniego** p.

b) Obliczyć sumę szeregu w podpunkcie **a)** dla **jednej** spośród tych wartości parametru p, dla których **szereg jest zbieżny**.

325. W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z, R, N**:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

a) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ....

b) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ....

c) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ....

d) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ....

e) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ ....

f) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ ....

g) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1-a_n^2)$ ....

h) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1-a_n^2)$ ....

i) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1+a_n^2)$ ....

j) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1+a_n^2)$ ....

326. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 2\,.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

327. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{n\geqslant 20/\varepsilon}{\forall} |a_n+5| < \varepsilon \qquad \text{oraz} \qquad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{n\geqslant 30/\varepsilon}{\forall} |b_n+3| < \varepsilon\,.$$

Niech $c_n = a_n - 2b_n$. Wskazać odpowiednią liczbę rzeczywistą r oraz liczbę naturalną P i udowodnić, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{n\geqslant P/\varepsilon}{\forall} |c_n+r| < \varepsilon\,.$$

328. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k = 2\cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n\,.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

329. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right).$$

330. W każdym z zadań **330.1-330.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.).
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

330.1. $A=\left\{\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{2m-3} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\qquad \mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

330.2. $B=\{\log_2(n+7)-\log_2 n : n\in\mathbb{N}\}$

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

330.3. $C=\left\{\frac{(n!)^2}{2^{5n}} : n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

330.4. $D=\left\{\frac{m+n}{\sqrt{mn}} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

330.5. $E=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

331. W każdym z zadań **331.1-331.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

331.1. $A=\left\{\frac{1}{n^2-22}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\quad\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,...\}$

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

331.2. $B=\left\{\frac{2n+1}{3n+1}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

331.3. $C=\left\{\frac{2n+1}{3n+2}: n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

331.4. $D=\{x-2y:\ x,y\in\mathbb{R}\ \wedge\ 16<x\leqslant 28\ \wedge\ 3<y\leqslant 4\}$

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

331.5. $E=\{|x-y|:\ x,y\in\mathbb{R}\ \wedge\ 16<x\leqslant 28\ \wedge\ 3<y\leqslant 4\}$

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

332. Podaj wartości granic.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = ...$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2010}\right) = ...$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2010n+1}\right) = ...$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2010} = ...$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2010}\right)^{2010} = ...$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2010n+1}\right)^{2010} = ...$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = ...$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2010n} = ...$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2010} = ...$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2010}} = ...$