Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Wykład: zad. 40-42 Konwersatorium 14.10.2010: zad. 57-58
Ćwiczenia 18.10.2010: zad. 49-56 Kolokwium nr 2, 19.10.2010: materiał z zad. 1-58

40. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia, której kwadrat jest równy 2.

41. Czy liczba $0,(9)=0,999999\ldots$ jest wymierna czy niewymierna?

42. Niech

$$x=1+3+9+27+81+243+\ldots$$

Wówczas

$$x=1+3\cdot 1+3\cdot 3+3\cdot 9+3\cdot 27+3\cdot 81+3\cdot 243+\ldots=$$

$$=1+3\cdot(1+3+9+27+81+243+\ldots)=1+3x\,,$$

skąd $x=-1/2$.
Jak to możliwe, że suma liczb całkowitych dodatnich jest ujemna i niecałkowita?

Zadania 43-47 to proste zadanka rachunkowe. Na ćwiczeniach prawdopodobnie wystarczy tylko porównać wyniki.

43. Przedstawić liczbę 0,123(45) w postaci ułamka zwykłego.

44. Przedstawić liczbę 0,1(270) w postaci ułamka zwykłego.
Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

45. $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$

46. $(0,2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$

47. $(0,(037))^{0,(3)}$

Przykład **48.** Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wowczas otrzymujemy kolejno

$$\log_2 3=\frac{m}{n}$$

$$2^{m/n}=3$$

$$2^m=3^n\,.$$

Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną.

49. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

50. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

51. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

52. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

53. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

54. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

55. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

OSZUSTWO **56.**
ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.
Rozwiązanie I:
Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.
Rozwiązanie II:
Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$
$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$
$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.
Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

57. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q=5\,.$$

58. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q>1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n, gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n<q$ oraz $m/n>q$ używając tylko liczb m, n, działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25<27$, $125<128$).

Nierówności.

Ćwiczenia 25.10,8.11.2010: zad. 82-111 Kol. nr **3**, 26.10.2010: materiał z zad. 1-65, 82-96
Konwersatorium 21,28.10,4,11.2010: zad. 112-116 Kol. nr **4,5**, 9,16.11.2010: mat. z zad. 1-127

Przykłady z wykładów

59. Dla liczby wymiernej dodatniej $q=m/n$, gdzie $m,n\in\mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3<q$. Wykorzystać tez warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami 3/2, 5/3 oraz 8/5.

60. Oszacować liczbę 1000! od góry i dołu przez potęgi dziesiątki.

61. Oszacować od góry i dołu wyrażenie

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\ldots+\sqrt{9n}\,.$$

62. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant$ .... zachodzi nierówność

$$n^2\leqslant 2^n\,.$$

W miejsce kropek wstawić liczbę, dla której udaje się łatwo zredagować dowód.

63. To samo dla nierówności

$$n^4\leqslant 2^n\,.$$

64. To samo dla nierówności

$$n^8\leqslant 2^n\,.$$

Zastanówić się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

65. Wskazać liczbę naturalną $n>1$ spełniającą nierówność

$$n^{1000}<2^n\,.$$

Oszacować podane wyrażenia od góry i od dołu ($n\in\mathbb{N}$) przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim (o ile nie podano inaczej)

66. $\dfrac{n^4+2n^3+n+7}{4n^4+n^2+15}$ **67.** $\dfrac{5n^3-2n+3}{6n^3-4n^2+1}$ **68.** $\dfrac{n\sqrt{n+4}+5}{\sqrt{n^3+4}+1}$

69. $\dfrac{2^n+10n^2}{2^n+n^4}$ **70.** $\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}+\ldots+\sqrt{2n^2}}{2n+5}$ **71.** $\dfrac{n!}{n!+10^n}$

72. $\dfrac{n^6+5n+4}{2n^3-n^2+7}$ **73.** $\dfrac{\sqrt{n^7+9}+6}{\sqrt[3]{n^4+15}+8}$

74. $\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\ldots+\sqrt{64n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\ldots+\sqrt[3]{64n}}$

75. $\dfrac{x}{x^2+1}$ (tylko od góry, $x\in\mathbb{R}$)

76. $\dfrac{6x^7-5x^5+7}{5x^7-2x^4+3}$ ($x\in(0,+\infty)$)

77. $\dfrac{n^5+n^4+1}{2n^5+n^3+5}$ (szacowanie postaci $g\pm C/n$)

78. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$

79. $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dfrac{n}{n^2+3}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$ (szacowanie postaci $g\pm C/n$)

80. $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ (szacowanie postaci $g\pm C/n$)

81. Oszacować $\sqrt[n]{n}$.

82. Która z liczb jest większa

a) $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$?

b) 26^{99} czy 10^{151} ?

c) 26^{99} czy 123^{65} ?

d) $\prod\limits_{i=2}^{2009}\prod\limits_{j=1}^{i-1}\left(\sqrt[j]{j}-\sqrt[i]{i}\right)$ czy $10^{-1000000}$?

Uwaga: Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn.

$$a^{b^c}=a^{\left(b^c\right)}\,.$$

83. Uprościć wyrażenie

$$\left(3^{2^n}-2^{2^m}\right)\cdot\prod_{i=0}^{37}\left(3^{2^{n+i}}+2^{2^{m+i}}\right),$$

gdzie

$$\prod_{i=j}^{k}a_i=a_j\cdot a_{j+1}\cdot a_{j+2}\ldots a_k\,.$$

84. Niech $a=\sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \quad \text{czy} \quad 10^{10^{10}}\,?$$

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba a występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

85. Niech $a=\sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{256} \quad \text{czy} \quad 256^a\,?$$

86. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a=\left(5-\sqrt{37}\right)^{2008}$$

$$b=\left(6-\sqrt{37}\right)^{2009}$$

$$c=\left(7-\sqrt{73}\right)^{2011}$$

$$d=\left(9-\sqrt{73}\right)^{2013}$$

87. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

88. Która z liczb jest większa $\left(\frac{9}{4}\right)^{9/4}$ czy 6 ?
W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości $2^{11}=2048$ i $3^7=2187$.

89. Która z liczb jest większa $\sqrt[10]{10}$ czy 1,25 ?
W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200.

90. Która z liczb jest większa $\sqrt[45]{45}$ czy 1,08 ?
W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200 oraz wolno wykorzystać równości $3^{19}=1\,162\,261\,467$ i $5^{13}=1\,220\,703\,125$.

91. Która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72} ?
W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

92. Wskazać taką liczbę naturalną n, że

$$n^{1000000}+1<2^n\,.$$

93. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant$ .... zachodzi nierówność

$$n^{32}\leqslant 2^n\,.$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód.
Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnić nierówności $10^k<L<10^{2k}$.
94. $L=3972^{257}$ **95.** $L=257^{3972}$ **96.** $L=700!$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C<W(n)<D$.

97. $W(n)=\frac{n^4+16n+3}{2n^4+7n^2}$ **98.** $W(n)=\frac{13n^2-10n+3}{2n^2+7n-1}$ **99.** $W(n)=\frac{\sqrt{n+7}+3}{\sqrt{n+3}+7}$

100. $W(n)=\frac{7^n+6^n+2^n}{7^n+5^n+3^n}$ **101.** $W(n)=\sqrt{n^2+n}-n$ **102.** $W(n)=\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k<W(n)<D\cdot n^k\,.$$

103. $W(n)=\frac{n^7+10n^3+3}{n^4+37}$ **104.** $W(n)=\frac{5n^8-n^4+3}{5n^{10}-4}$ **105.** $W(n)=\frac{n^6+2n^4+1}{\sqrt{n}+2}$

106. $W(n)=\frac{n^3+2n^2+1}{\sqrt{n^6+2}+2}$ **107.** $W(n)=\frac{2n^3-n^2+1}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}$ **108.** $W(n)=\frac{\sqrt[5]{n^2+1}}{\sqrt[7]{n^3+1}+1}$

Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$1-\frac{C}{n}<W(n)<1+\frac{C}{n}\,.$$

109. $W(n)=\frac{n^2+2n+3}{n^2+7n+2}$ **110.** $W(n)=\frac{3n^2-2n+3}{3n^2+7n-2}$ **111.** $W(n)=\frac{\sqrt{4n^2+1}}{2n+1}$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, g udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$g-\frac{C}{n}<W(n)<g+\frac{C}{n}\,.$$

112. $W(n)=\frac{2n^2+2n+3}{3n^2+7n+2}$ **113.** $W(n)=\frac{4n^2-2n+3}{2n^2+7n-2}$ **114.** $W(n)=\frac{\sqrt{4n^2+1}}{3n+1}$

115. $W(n)=\sqrt{n^2+n}-n$ **116.** $W(n)=\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$

Zadania do samodzielnej powtórki.

Jeśli uda się wygospodarować trochę czasu, wątpliwości związane z tymi zadaniami mogą być wyjaśnione na konwersatorium lub ćwiczeniach.

Zawsze można też skorzystać z konsultacji.

117. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{9n+16}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} \leqslant 2C\,.$$

118. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{9n+40}-\sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45}-\sqrt{4n+5}} \leqslant 5C\,.$$

119. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}\,.$$

120. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n\cdot\binom{4n}{2n}<27^n\cdot\binom{4n}{n}\,.$$

121. Niech

$G(1)=1$, $G(2)=6$, $G(3)=5$, oraz $G(n+3)=3\cdot G(n+1)+2\cdot G(n)$ dla $n=1,2,3,\ldots$

Dowieść, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$G(n)=2^n+n\cdot(-1)^n\,.$$

122. Dowieść, że liczba $\log_{20}50$ jest niewymierna.

123. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$8n\leqslant 2^n+16\,.$$

124. Udowodnić nierówność

$$n^{2^{27}}\leqslant 2^n$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$. (Należy wybrać jedną liczbę n spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

Przypomnienie: Potęgowanie wykonujemy **od góry**, tzn. $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

125. W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, postaw sobie 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymujesz punktów.
Wyjątki:
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi postaw sobie **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach postaw sobie **5 punktów**.

125.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(2008)$ jest prawdziwe ....

b) $T(2009)$ jest prawdziwe ....

c) $T(2013)$ jest fałszywe ....

d) $T(2014)$ jest fałszywe ....

125.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(80) \Rightarrow T(92)$ ....

b) $T(81) \Rightarrow T(93)$ ....

c) $T(96) \Rightarrow T(76)$ ....

d) $T(97) \Rightarrow T(77)$ ....

125.3 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\binom{999}{111} < \binom{999}{444}$ ....

b) $\binom{999}{222} < \binom{999}{555}$ ....

c) $\binom{999}{333} < \binom{999}{666}$ ....

d) $\binom{999}{444} < \binom{999}{777}$ ....

125.4 Czy prawdziwa jest równość

a) $\sum_{i=1}^{3} i = 6$ ....

b) $\sum_{i=1}^{3} 2 = 6$ ....

c) $\prod_{i=1}^{3} i = 6$ ....

d) $\prod_{i=1}^{3} 2 = 6$ ....

126. W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, postaw sobie 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymujesz punktów.
Wyjątki:
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi postaw sobie **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach postaw sobie **5 punktów**.

126.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n>5$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n-5)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(85)$ jest prawdziwe ....

b) $T(93)$ jest prawdziwe ....

c) $T(106)$ jest prawdziwe ....

d) $T(120)$ jest prawdziwe ....

126.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n>5$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n-5)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(80)\Rightarrow T(95)$ ....

b) $T(130)\Rightarrow T(300)$ ....

c) $T(166)\Rightarrow T(111)$ ....

d) $T(97)\Rightarrow T(77)$ ....

126.3 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2n-1)\Rightarrow T(2n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest prawdziwe ....

b) $T(6)$ jest prawdziwe ....

c) $T(7)$ jest fałszywe ....

d) $T(8)$ jest fałszywe ....

126.4 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(3n-1)\Rightarrow T(3n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe ....

b) $T(8)$ jest prawdziwe ....

c) $T(9)$ jest fałszywe ....

d) $T(10)$ jest fałszywe ....

127. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P, F, N**:
P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)
F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)
N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)
Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi przyznaj sobie $\max(0, n-5)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+10)$. Wówczas:

a) $T(70)$ ....

b) $T(81)$ ....

c) $T(92)$ ....

d) $T(101)$ ....

e) $T(140)$ ....

f) $T(75) \Rightarrow T(105)$ ....

g) $T(161) \Rightarrow T(160)$ ....

h) $T(51) \Rightarrow T(60)$ ....

i) $T(10) \Rightarrow T(11)$ ....

j) $T(10) \Rightarrow T(12)$ ....