Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Wykład: zad. 1-4 Konwersatorium 7.10.2010: zad. 37-39
Ćwiczenia 5,11.10.2010: zad. 5-36 Kolokwium nr 1, 12.10.2010: materiał z zad. 1-39

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+4+9+16+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

2. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 6$ kwadrat (figurę geometryczną) można podzielić na n kwadratów.

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1000000n<2^n+19000000 .$$

4. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} .$$

5. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+\ldots+n\cdot 3^{n-1}=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^n+\frac{1}{4} .$$

6. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot(2^{2^4}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1 .$$

UWAGA: $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

7. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2 .$$

8. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n} .$$

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n}a_i=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n}a_i=a_m\cdot a_{m+1}\cdot a_{m+2}\cdot a_{m+3}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

9. $\sum\limits_{i=3}^{5}i^2$ **10.** $\sum\limits_{i=-99}^{100}i^3$ **11.** $\sum\limits_{i=-10}^{10}7$ **12.** $\prod\limits_{i=1}^{5}i$ **13.** $\prod\limits_{i=-2008}^{2008}i^{2008}$

14. Zapisać wzory występujące w treści poprzednich zadań bez użycia kropek.

15. Liczby a_n, b_n są określone wzorami $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_{n+1} + a_n$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2a_n^2 - b_n^2$ jest równa ± 1.

OSZUSTWO **16.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110 \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n=2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,

dla $n=3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,

dla $n=4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

17. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n < 2^n + 25$.

18. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.
Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

19. Wskazać taką liczbę x, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

20. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7},\ \binom{100}{27},\ \binom{100}{47},\ \binom{100}{57},\ \binom{100}{77},\ \binom{100}{97}.$$

21. Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geqslant 4$, $k \geqslant 2$.

22. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}\,.$$

23. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}\,.$$

24. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{2}=\frac{n\cdot[(n-1)!]^2}{2^{n-1}}\,.$$

25. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n}<7^n$.

26. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n+3}{n}<\frac{3}{2}\cdot 4^n$.

27. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n}<2^{2n+1}.$$

28. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n\geqslant 6$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) prawdziwe jest $T(10)$,
b) prawdziwe jest $T(11)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(7)\Rightarrow T(13)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(3)\Rightarrow T(1)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(1)\Rightarrow T(3)$.

29. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n\geqslant 10$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(10)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(50)\Rightarrow T(30)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(300)\Rightarrow T(200)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(30)\Rightarrow T(50)$,
f) prawdziwa jest implikacja $T(200)\Rightarrow T(300)$.

30. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n\geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(10)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(100)\Rightarrow T(25)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(100)\Rightarrow T(200)$.

31. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) fałszywe jest $T(3)$,
b) fałszywe jest $T(11)$,
c) prawdziwe jest $T(9)$,
d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

32. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\ .$$

33. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}\ .$$

34. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}\ .$$

35. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi
$$9\cdot(3n)!\cdot n \ldots\ldots\ldots\ldots 2\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3\ .$$
W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geqslant$, $\leqslant$.

36. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów.

37. Wskazać sensowne liczby rzeczywiste A, B, C, D i dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą oszacowania
$$A\cdot\frac{4^n}{\sqrt{n+B}} < \binom{2n}{n} < C\cdot\frac{4^n}{\sqrt{n+D}}\ .$$
Wskazówki: Zacząć przeprowadzać dowód indukcyjny, a liczby A, B, C, D dobrać w trakcie dowodu. Dla każdej z dwóch nierówności przeprowadzić osobny dowód.

38. Zgadnąć, a następnie udowodnić wzór na sumę (skończoną, bo wyrazy poza trójkątem Pascala są zerami)
$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\ldots$$
We wzorze mają prawo pojawić się wyrazy znanego ciągu liczbowego.

39. Zgadnąć, a następnie udowodnić wzór na sumę
$$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+\ldots+n\cdot 2^{n-1}\ .$$