EGZAMIN, ANALIZA A1, 7.02.2011

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.
Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.
Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

1.1. $A=\left\{\frac{1}{7n-30} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\quad\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\dots\}$ Ocena ....

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

1.2. $B=\left\{\frac{1}{(7n-30)^2} :\ n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

1.3. $C=\left\{\frac{1}{(7n-30)^3} :\ n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

1.4. $D=\left\{\frac{1}{7m-30}+\frac{1}{(7n-30)^2} :\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

1.5. $E=\left\{\frac{(\log_2(n^2+1))\cdot\log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4))\cdot\log_9(n^2+1)} :\ n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

Zadanie **2.**

2.1. (3 punkty) W każdym z poniższych 9 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z, R, N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-6)$ punktów.

Wiadomo, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Co można wywniskować o zbieżności szeregu

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ....

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ ....

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_n^2\right)$ ....

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - 1|$ ....

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ ....

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$ ....

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log_3\left(a_n^2 + 2\right)$ ....

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 1}$ ....

2.2. (2 punkty) Na każde z 8 pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-6)$ punktów.

Czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 25| & \text{dla} \quad x < a \\ 24 & \text{dla} \quad a \leqslant x < b \\ |x^2 - 25| & \text{dla} \quad b \leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

j) $a = -7, \quad b = -5$ ....

k) $a = -7, \quad b = -3$ ....

l) $a = -5, \quad b = -3$ ....

m) $a = -5, \quad b = -1$ ....

n) $a = -3, \quad b = -1$ ....

o) $a = -3, \quad b = 1$ ....

p) $a = -1, \quad b = 1$ ....

q) $a = -1, \quad b = 3$ ....

Zadanie **3.**

Na każde z 15 pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-10)$ punktów.

Ciąg (a_n) jest zbieżny i jego granica jest równa 7. Czy stąd wynika, że

a) $\underset{n}{\forall}\ a_n > 0$ ....

b) $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ a_n > 0$ ....

c) $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n > 0$ ....

d) $\underset{n}{\forall}\ a_n < 7$ ....

e) $\underset{n}{\exists}\ a_n < 7$ ....

f) $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ a_n < 7$ ....

g) $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n < 7$ ....

h) $\underset{x}{\exists}\ \underset{n}{\forall}\ a_n > x$ ....

i) $\underset{x}{\exists}\ \underset{n}{\forall}\ a_n < x$ ....

j) $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ |a_n - 7| < \frac{1}{10}$ ....

k) $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n - 7| < \frac{1}{10}$ ....

l) $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ |a_n - 7| < \frac{1}{n}$ ....

m) $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n - 7| < \frac{1}{n}$ ....

n) $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{100}$ ....

o) $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{100}$ ....

Uwaga: Zmienne n, N przebiegają liczby naturalne, a zmienna x liczby rzeczywiste.

Zadanie **4.**

W każdym podpunkcie podaj przykład podzbioru lub podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych o podanych własnościach. Nie musisz uzasadniać, że podany zbiór lub zbiory spełniają podane warunki. Pamiętaj jednak, aby opisać zbiory w sposób nie budzący wątpliwości, które liczby są ich elementami, a które nie. Możesz opisać zbiory symbolami matematycznymi lub słowami.

W każdym podpunkcie za podanie poprawnego przykładu otrzymasz 1 punkt.

a) $\inf A = -4, \qquad \sup A = 4, \qquad \inf\{a^2 : a \in A\} = 4$

....

b) $\sup B = 2, \quad \sup C = 3, \quad \sup(B \cap C) = 1$

....

c) $\inf D = 10, \qquad \inf E = 10, \qquad \inf(D \cap E) = 17$

....

d) $\inf F = \inf G = 2, \qquad \sup F = \sup G = 5,$ zbiory F, G są rozłączne

....

e) $0 < \sup H = \sup\{h^2 : h \in H\} < 1$

....

Zadanie **5.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot(-1)^n}{n^2+5}\,.$$

Zadanie **6.**

Wyznaczyć promień zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}\cdot(n!)^n}{n^{n^2}}\,.$$

Zadanie **7.**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{3x^2-2x+5}{7x^2-x+5} \leqslant 24C\,.$$

Zadanie **8.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\frac{n+3}{n^2+3}+\frac{n+4}{n^2+4}+\ldots+\frac{n+n}{n^2+n}\right).$$