EGZAMIN, ANALIZA A1, 16.02.2011

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.
Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.
Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

Niech

$$f_n(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{dla} \quad x<2 \\ x-n & \text{dla} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$$

1.1. $A=\{f_2(x):\ x\in(-1,4]\}$ Ocena ....

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

1.2. $B=\{f_3(x):\ x\in(-1,4]\}$ Ocena ....

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

1.3. $C=\{f_4(x):\ x\in(-1,4]\}$ Ocena ....

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

1.4. $D=\{f_5(x):\ x\in(-1,4]\}$ Ocena ....

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

1.5. $E=\{f_6(x):\ x\in(-1,4]\}$ Ocena ....

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

Zadanie **2.**

2.1. (3 punkty) Przy każdym z poniższych 9 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P, F, N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-6)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(77)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(3)$ ....

b) $T(33)$ ....

c) $T(333)$ ....

d) $T(3) \Rightarrow T(333)$ ....

e) $T(333) \Rightarrow T(3)$ ....

f) $T(3) \Rightarrow T(33)$ ....

g) $T(33) \Rightarrow T(3)$ ....

h) $T(33) \Rightarrow T(333)$ ....

i) $T(333) \Rightarrow T(33)$ ....

2.2. (2 punkty) Za podanie n poprawnych granic otrzymasz $\max(0, n-4)$ punktów.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x$ = ...

k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$ = ...

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x$ = ...

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_2 x$ = ...

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x$ = ...

o) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$ = ...

Zadanie **3.**

Na każde z 15 pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-10)$ punktów.

O zbiorze A wiadomo, że

$$\underset{a\in A}{\forall}\ a \leqslant 7 \quad \text{oraz} \quad \underset{a\in A}{\exists}\ a > 7 - \frac{1}{10}$$

Czy stąd wynika, że

a) $\sup A = 7$ ....

b) $\sup A \leqslant 7$ ....

c) $\sup A \geqslant 7$ ....

d) $\sup A < 8$ ....

e) $\sup A > 6$ ....

f) $\inf A = 6{,}9$ ....

g) $\inf A < 7$ ....

h) $\inf A > 6$ ....

i) $\inf A > -8$ ....

j) $7 \in A$ ....

k) $7 \notin A$ ....

l) $\underset{a\in A}{\forall}\ |a-7| < \frac{1}{10}$ ....

m) $\underset{a\in A}{\forall}\ |a-7| > \frac{1}{10}$ ....

n) $\underset{a\in A}{\exists}\ |a-7| < \frac{1}{10}$ ....

o) $\underset{a\in A}{\exists}\ |a-7| > \frac{1}{10}$ ....

Zadanie **4.**

W każdym z poniższych 14 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z, R, N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-9)$ punktów.

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że wszystkie jego wyrazy są różne od zera, a ponadto

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$ ....

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$ ....

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$ ....

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ....

e) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ ....

f) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ....

g) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ ....

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -2$ ....

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$ ....

j) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{2}$ ....

k) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ ....

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ....

m) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ....

n) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ....

Zadanie **5.**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+8}{n} < 2\cdot 6^n\,.$$

Zadanie **6.**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **7.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^8-7n^3+5}{9n^9\sqrt{n}-8n^4+7}\,.$$

Zadanie **8.**

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-3, 3]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{3}{4}\cdot |x-y|\,,$$

gdzie $f(x)=\sqrt{x^2+16}$.