

Hanna Marcinkowska
Analiza matematyczna
(funkcje jednej zmiennej)

SPIS TREŚCI

Przedmowa 1

Rozdział I. Liczby rzeczywiste 2

§1. ♡ *Aksjomatyczne wprowadzenie zbioru liczb rzeczywistych 2*

1. Aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych (3). 2. Wartość bezwzględna (moduł) liczby rzeczywistej (6). 3. Interpretacja geometryczna zbioru liczb rzeczywistych (7). 4. Przedziały na osi liczbowej (8). 5. Liczby naturalne (9). 6. Zasada indukcji zupełnej (9). 7. Nierówność Bernouillego (10). 8. Dwumian Newtona (11). 9. Liczby całkowite, wymierne, niewymierne (13). Zadania (15).

§2. ♡ *Aksjomat kresu i jego konsekwencje 21*

1. Zbiory ograniczone. Kres górny i dolny zbioru (21). 2. Aksjomat kresu (23). 3. Własności kresu górnego i dolnego zbioru (23). 4. Zasada Dedekinda (25). 5. Funkcja część całkowita (entier) (26). 6. Liniowa gęstość zbioru liczb wymiernych (27). 7. Istnienie pierwiastka arytmetycznego z liczby dodatniej (28). Zadania (30).

Rozdział II. Ciągi nieskończone 33

§1. *Definicja i podstawowe własności ciągów 33*

1. ♡ Ciąg nieskończony jako funkcja (33). 2. ♡ Granica ciągu (33). 3. ♡ Ciąg ograniczony (36). 4. ♡ Działania na granicach (37). 5. ♡ Ciągi rozbieżne do nieskończoności (39). 6. ♡ Przykłady obliczania granic ciągów (40). 7. ♡ Przechodzenie do granicy w nierównościach (45). 8. Prosta rozszerzona \mathbb{R}_∞ i definicja otoczeniowa granicy ciągu (49). Zadania (50).

§2. *Dalsze własności ciągów 56*

1. ♡ Ciągi monotoniczne i ciągi ograniczone (56). 2. ♡ Zstępujące ciągi przedziałów (56). 3. ♡ Ciągi wybrane, podciągi i twierdzenie Bolzano-Weierstrassa (57). 4. ♡ Twierdzenie o ciągu monotonicznym (61). 5. ♡ Liczba e (62). 6. ♡ Warunek Cauchy'ego (65). 7*. Ułamki łańcuchowe (68). 8*. Ciąg $a_n = \{nx\}$ (76). 9*. Zastosowanie ułamków łańcuchowych do aproksymacji (80). 10. Twierdzenie Stolza (83). 11. Granica górna i dolna ciągu (89). Zadania (95).

Rozdział III. Funkcje zmiennej rzeczywistej 103

§1. ♡ *Funkcje elementarne*. 103

1. Przykłady funkcji (103). 2. Wielomiany (104). 3. Funkcje wymierne (105). 4. Funkcje monotoniczne i funkcja odwrotna (105). 5. Funkcja $\sqrt[n]{x}$ (107). 6. Potęga o wykładniku wymiernym (108). 7. Potęga o dowolnym wykładniku rzeczywistym (114). 8. Funkcje: wykładnicza, logarytm i potęgowa (121). 9. Funkcje trygonometryczne (122). 10. Funkcje odwrotne do trygonometrycznych (124). 11. Funkcja złożona (superpozycja) (124). Zadania (126).

§2. *Granica funkcji*. 129

1. ♡ Definicja granicy funkcji (129). 2. ♡ Sąsiedztwo punktu (133). 3. ♡ Działania na granicach (135). 4. ♡ Definicja Cauchy'ego granicy funkcji (137). 5. ♡ Granica jednostronna funkcji (142). 6. ♡ Twierdzenie o zbieżności monotonicznej (147). 7. Warunek Cauchy'ego istnienia granicy (150). Zadania (154).

§3. *Funkcje ciągłe i ich własności*. 158

1. ♡ Ciągłość funkcji w punkcie (158). 2. ♡ Ciągłość jednostronna (159). 3. ♡ Ciągłość funkcji w przedziale (161). 4. ♡ Działania na funkcjach ciągłych i ciągłość funkcji elementarnych (162). 5. Jednostajna ciągłość funkcji (166). 6. ♡ Funkcje ograniczone, kres górny i dolny funkcji (170). 7. ♡ Własność Darboux (173). 8. ♡ Ciągłość funkcji odwrotnej (177). 9. ♡ Wykresy funkcji: wykładniczej, logarytmicznej i potęgowej (182). 10. Własności kresu górnego i dolnego funkcji (184). Zadania (188).

§4. ♡ *Pochodna funkcji*. 195

1. Pochodna i jej interpretacja geometryczna (195). 2. Różniczkowalność funkcji (200). 3. Działania na funkcjach różniczkowalnych (202). 4. Inne oznaczenia pochodnej (205). 5. Pochodne funkcji elementarnych (206). 6. Ekstrema funkcji (216). 7. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego (218). 8. Znak pochodnej a monotoniczność funkcji (226). 9. Nieoznaczoności i reguły de l'Hospitala (231). 10. Symbole Landaua (240). 11. Zastosowanie pochodnej do badania ekstremów funkcji (241). Zadania (246).

§5. *Pochodne wyższych rzędów*. 260

1. ♡ Pochodna rzędu k i wzór Leibniza (260). 2. ♡ Wzór Taylora i wzór Maclaurina (261). 3. ♡ Szczególne przypadki wzoru Taylora (263). 4. ♡ Ekstrema i punkty przegięcia (268). 5. Funkcje hiperboliczne (274). 6. ♡ Asymptoty wykresu funkcji (278). 7. ♡ Badanie wykresu funkcji (282). 8*. Przybliżone rozwiązywanie równań - metoda siecznych (reguła fałsi) (288). 9*. Przybliżone rozwiązywanie równań - metoda stycznych (Newtona) (291). 10*. Funkcje wypukłe (295). 11*. Funkcje ściśle wypukłe (303). Zadania (304).

Rozdział IV. Szeregi liczbowe 316

§1. Podstawowe własności szeregów 316

1. ♡ Szereg nieskończony i jego suma (316). 2. ♡ Niektóre działania na szeregach (319). 3. ♡ Warunek Cauchy'ego (322). 4. ♡ Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej jako szereg (325). 5*. Rozwinięcie liczby naturalnej przy dowolnej podstawie (527). 6*. Rozwinięcie liczby rzeczywistej dodatniej przy dowolnej podstawie (331). 7*. Rozwinięcia liczb wymiernych (338). Zadania (345).

§2. ♡ Szeregi o wyrazach dodatnich 351

Zadania (358).

§3. Szeregi o wyrazach dowolnego znaku 368

1. ♡ Przekształcenie Abela (368). 2. ♡ Kryterium Dirichleta i twierdzenie Leibniza o szeregach naprzemiennych (368). 3. Prawo łączności dla szeregów nieskończonych (372). 4. ♡ Prawo przemienności dla szeregów nieskończonych (373). 5. ♡ Mnożenie szeregów nieskończonych (380). Zadania (385).

Rozdział V. Rachunek całkowy 390

§1. ♡ Całka funkcji ciągłej 390

1. Obliczanie pola pod wykresem funkcji nieujemnej (390). 2. Całka funkcji ciągłej w przedziale domkniętym (397). 3. Własności całki oznaczonej (400). 4. Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego (404). Zadania (412).

§2. Całkowanie efektywne 419

1. ♡ Całka nieoznaczona (419). 2. ♡ Wzory rachunkowe dla całek nieoznaczonych (419). 3. ♡ Przykłady obliczania całek nieoznaczonych (422). 4. Wzory rekurencyjne (430). 5. Całkowanie ułamków prostych (433). 6. Całkowanie funkcji wymiernych (436). 7. Całkowanie pewnych wyrażeń trygonometrycznych (444). 8. Całkowanie wyrażeń niewymiernych (447). 9. ♡ Jeszcze kilka całek (452). 10. Całki niewyrażalne przez funkcje elementarne (453). Zadania (453).

§3. Dalsze własności całki oznaczonej funkcji ciągłej . . 458

1. ♡ Wzory rachunkowe dla całek oznaczonych (458). 2. Wzory rekurencyjne (462). 3. ♡ Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - pole obszaru płaskiego (464). 4. ♡ Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - długość krzywej płaskiej (466). 5. ♡ Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - objętość i powierzchnia boczna bryły obrotowej (469). 6. Zastosowania fizyczne całki oznaczonej - momenty statyczne i środek masy (476). 7. ♡ Twierdzenia o wartości średniej rachunku całkowego (484). 8*. Całkowanie przybliżone (487). 9*. Oszacowanie błędu całkowania przybliżonego (492). Zadania (497).

§4. Całka niewłaściwa 504

1. ♡ Obliczanie pola pod wykresem funkcji nieujemnej i nieograniczonej (504). 2. ♡ Całka niewłaściwa po przedziale ograniczonym (507). 3. ♡ Warunki zapewniające zbieżność całki

niewłaściwej (511). 4. ♡ Całka niewłaściwa po przedziale nieograniczonym (513). 5. ♡ Związek między zbieżnością całki niewłaściwej a zbieżnością szeregu nieskończonego (519). 6. Pewne specjalne całki niewłaściwe (521). Zadania (529).

§5*. *Całka Riemanna funkcji ograniczonej* 534

1. Całki górna i dolna Darboux (534). 2. Własności całek Darboux (536). 3. Całka Riemanna (540). 4. Klasy funkcji całkownych (542). 5. Całka Riemanna jako granica sum przybliżonych (548). 6. Własności rachunkowe całki Riemanna (550). Zadania (555).

§6*. *Funkcje o wahanii skończonym* 560

1. Wahanie funkcji (560). 2. Własności wahanii funkcji (566). 3. Rozkład kanoniczny Jordana (571). 4. Własności rachunkowe funkcji o wahanii skończonym (571). Zadania (573).

§7*. *Całka Riemanna - Stieltjesa* 579

1. Całki górna i dolna Darboux - Stieltjesa (579). 2. Całka Riemanna - Stieltjesa względem funkcji rosnącej (580). 3. Całka Riemanna - Stieltjesa względem funkcji o wahanii skończonym (582). 4. Własności rachunkowe całki Riemanna - Stieltjesa (588). 5. Sprowadzanie całki Riemanna - Stieltjesa do całki Riemanna (590). 6. Monotoniczność całki Riemanna - Stieltjesa (598). Zadania (600).

§8. *Całki zależne od parametru* 608

1. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych (608). 2. Ciągłość całki oznaczonej względem parametru (612). 3. Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych (615). 4. Różniczkowanie całki względem parametru (619). 5. Całkowanie całki względem parametru (624). Zadania (626).

Rozdział VI. Ciągi i szeregi funkcyjne 630

§1. *Ogólne własności ciągów i szeregów funkcyjnych* . . 630

1. Zbieżność punktowa i zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego (630). 2. Ciągłość granicy (635). 3. Jednostajny warunek Cauchy'ego (638). 4. Przejście do granicy pod znakiem całki (639). 5. Różniczkowanie ciągów funkcyjnych (641). 6. Twierdzenie Diniego (643). 7*. Przejście do granicy w całce Riemanna - Stieltjesa (645). 8*. Przejście do granicy w całce Riemanna funkcji ograniczonej (650). 9. Szeregi funkcyjne - zbieżność punktowa i jednostajna (652). 10. Kryteria jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych (653). Zadania (659).

§2. *Szeregi potęgowe* 669

1. ♡ Zbieżność szeregu potęgowego (669). 2. ♡ Regularność sumy szeregu potęgowego (673). 3. ♡ Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy (677). 4. ♡ Rozwinięcia w szereg pewnych funkcji (680). 5. Wzór Cauchy'ego - Hadamarda (690). 6. ♡ Działania na szeregach potęgowych (695). 7*. Analityczna definicja funkcji trygonometrycznych (696). 8. ♡ Wzory Eulera (702). 9. ♡ Zastosowanie rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy do przybliżonego obliczania jej wartości (703). Zadania (706).

§3. Szeregi Fouriera	712
1. ♡ Szereg Foriera i współczynniki Fouriera (712). 2. ♡ Całka Dirichleta (714). 3. ♡ Rozszerzanie funkcji do funkcji okresowej (715). 4. ♡ Zbieżność szeregu Fouriera (719). 5. Rząd malenia współczynników Fouriera (723). 6. Interpretacja mechaniczna rozwinięcia w szereg Fouriera (726). 7. Szereg Fouriera funkcji parzystej lub nieparzystej (729). 8. Rozwijalność w szereg Fouriera funkcji kawałkami ciągłej (730). 9. Przykłady rozwinięć w szereg Fouriera (732). 10. Postać zespolona szeregu Fouriera (740). 11. Rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji o dowolnym okresie (741). 12. Rozwinięcie w szereg trygonometryczny funkcji określonej w dowolnym przedziale (743). 13. Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa (745). 14*. Zastosowanie szeregów Fouriera - rozchodzenie się ciepła w pręcie (747). 15*. Zastosowanie szeregów Fouriera - drgania struny sprężystej (753). 16. Dalsze własności szeregów Fouriera (762). 17*. Zastosowanie równości Parsewala (765). Zadania (771).	
Wykaz literatury	778

PRZEDMOWA

Książka jest podręcznikiem powstałym z wykładów, które prowadziłam na Uniwersytecie Wrocławskim dla studentów matematyki i informatyki. Przeznaczona jest dla przyszłych nauczycieli i osób interesujących się zastosowaniami matematyki. Pisana była z myślą o studentach napotykających na trudności w uczeniu się analizy matematycznej, dlatego położyłam nacisk na motywację wprowadzanych definicji i dowodzonych twierdzeń, ilustrując jednocześnie wykład dużą ilością przykładów. Materiał teoretyczny został uzupełniony zadaniami przeznaczonymi do samodzielnego rozwiązywania, trudniejsze zadania zostały opatrzone wskazówką. Ponieważ starałam się ograniczyć objętość książki, niektóre twierdzenia, które uważałam za mniej ważne, zostały sformułowane jako zadania, przy czym podane wskazówki sugerują ideę dowodu.

Podręcznik jest dostosowany do różnych opcji programowych. Części tekstu, które moim zdaniem winny znaleźć się w *programie minimum*, zostały na początku i na końcu opatrzone znakiem ♡♡♡ (w spisie rzeczy te części tekstu są opatrzone znakiem ♡ umieszczonym przy tytule). Czytelnikowi zainteresowanemu programem minimum zaleca się, by w pierwszym podejściu pomijał dowody twierdzeń, natomiast przestudiował dokładnie przykłady ilustrujące twierdzenie, starając się w miarę możliwości podać również przykłady własne. Części książki wykraczające poza standardowy wykład analizy matematycznej zostały oznaczone gwiazdką *, w ten sam sposób oznaczyłam zadania nawiązujące do ich treści. Części te mogą być przez Czytelnika opuszczone bez szkody dla zrozumienia dalszego ciągu.

Książka składa się z sześciu rozdziałów, z których każdy podzielony jest na paragrafy, te zaś na numerowane punkty. Wzory, twierdzenia i przykłady są numerowane w obrębie paragrafu, numeracja rysunków jest ciągła w obrębie całej książki. W przypisach na dole strony zostały podane krótkie biogramy matematyków, których nazwiska pojawiają się w tekście.

Pragnę wyrazić serdeczne podziękowanie recenzentom książki panu dr Michałowi Krychowi i panu prof. Tadeuszowi Nadzieji. Ich uwagi pomogły mi ulepszyć tekst i usunąć wiele nie zauważonych przeze mnie omyłek. Panu dr Michałowi Krychowi dziękuję ponadto za udostępnienie mi rozszerzonej wersji twierdzenia Stolza, którą podałam w rozdziale drugim. Dziękuję również panu dr Witoldowi Więśławowi za pomoc w przygotowaniu biogramów i panu dr Wojciechowi Mydlarczykowi za pomoc przy układaniu zadań.

Hanna Marcinkowska

Wrocław, styczeń 2004.

Liczby rzeczywiste



§1. Aksjomatyczne wprowadzenie zbioru liczb rzeczywistych.

Z liczbami mamy do czynienia od wczesnego dzieciństwa. Już małe dziecko ucząc się liczyć przedmioty, z którymi ma do czynienia, oswaja się praktycznie z pojęciem liczby całkowitej dodatniej (czyli naturalnej) - początkowo zazwyczaj w zakresie od 1 do 10 lub 20. W pierwszych klasach szkoły podstawowej uczniowie opanowują umiejętność wykonywania czterech działań (dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia) na liczbach naturalnych dodając do tego zbioru nową liczbę zero. Dowiadują się przy tym, że nie jest wykonalne dzielenie przez tę liczbę. W dalszym ciągu nauki zbiór poznawanych liczb rozrasta się. Pojawiają się liczby całkowite ujemne, przydatne np. do zapisywania temperatury poniżej zera. Naturalną konsekwencją wprowadzonego uprzednio dzielenia jest pojawienie się liczb będących ułamekami (czyli wymiernych). Wreszcie przy omawianiu zagadnienia mierzenia odcinków uczeń dowiaduje się, że istnieją odcinki których długość nie da się wyrazić liczbą wymierną - najbardziej znanym przykładem jest przekątna kwadratu o boku długości 1. Mierzenie takich odcinków prowadzi do pojęcia liczby niewymiernej. Wszystkie poznane w szkole podstawowej i średniej liczby obejmujemy wspólną nazwą liczb rzeczywistych. Uczniowie mają wiele okazji wykonywania na tych liczbach rachunków, niekiedy skomplikowanych.

W szkolnym kursie matematyki Czytelnik spotkał się z pojęciem funkcji. Przykładem funkcji może być funkcja liniowa $y = 2x + 5$, funkcja wykładnicza $y = 3^x$, wielomian kwadratowy $y = x^2 + 2x - 1$, funkcje trygonometryczne $y = \sin x$, $y = \cos x$ i wiele innych. Niektóre z tych funkcji można łatwo zilustrować przy pomocy wykresu. Tematem niniejszego podręcznika będą własności takich właśnie funkcji, w których zmienna niezależna (argument) x oraz zmienna zależna (wartość) y są liczbami rzeczywistymi.

W wykładzie matematycznym staramy się zawsze dokładnie sprecyzować pojęcia, którymi się posługujemy. Tylko w ten sposób możemy uniknąć błędów i nieporozumień. W naszym przypadku zaczniemy od precyzyjnego wprowadzenia zbioru liczb rzeczywistych. Zastosujemy *metodę aksjomatyczną*: wprowadzimy zbiór \mathbb{R} liczb rzeczywistych jako zbiór nieznanych nam na razie elementów, o których założymy, że spełniają pewne warunki zwane *aksjomatami*. Przez *liczbę rzeczywistą* będziemy rozumieli element zbioru \mathbb{R} .

1. Aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych. Formułując aksjomaty określające zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} będziemy zakładali, że x, y, z oznaczają dowolne elementy tego zbioru. Aksjomaty te podzielimy na kilka klas.

Klasa I. W zbiorze \mathbb{R} określone jest działanie $+$ (zwane dodawaniem), które każdej parze liczb x, y przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $x + y$ i ma następujące własności:

- (1a) $x + y = y + x$ (przemienność dodawania)
- (2a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (łączność dodawania)
- (3a) w zbiorze \mathbb{R} istnieje liczba 0 taka, że $x + 0 = x$
- (4a) dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ istnieje w zbiorze \mathbb{R} liczba przeciwna (oznaczamy ją $-x$) spełniająca warunek

$$x + (-x) = 0.$$

Klasa II. W zbiorze \mathbb{R} określone jest działanie \cdot (zwane mnożeniem), które każdej parze liczb x, y przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $x \cdot y$, przy czym spełnione są warunki

- (5a) $x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność mnożenia)
- (6a) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (łączność mnożenia)
- (7a) w zbiorze \mathbb{R} istnieje liczba 1 (różna od liczby 0) taka, że $1 \cdot x = x$
- (8a) dla dowolnej liczby $x \neq 0$ istnieje w zbiorze \mathbb{R} liczba odwrotna (oznaczamy ją x^{-1}) spełniająca warunek

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Klasa III. Działania dodawania i mnożenia są związane regułą

- (9a) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Klasa IV. W zbiorze \mathbb{R} określona jest relacja $<$ spełniająca warunki

- (10a) dla dowolnych x, y ($x \neq y$) zachodzi jeden ze związków $x < y$ (x mniejsze od y) lub $y < x$ (y mniejsze od x)
- (11a) jeżeli $x < y$, $y < z$ to $x < z$ (relacja $<$ jest przechodnia)
- (12a) jeżeli $x < y$ to $x + z < y + z$
- (13a) jeżeli $0 < x$, $0 < y$ to $0 < x \cdot y$.

Klasa V

- (14a) Aksjomat kresu (zwany również aksjomatem ciągłości) zostanie sformułowany później.

Liczbę $x + y$ nazywamy *sumą* liczb x, y zaś liczbę $x \cdot y$ *iloczynem* liczb x, y .

Aksjomaty klasy I mówią, że zbiór \mathbb{R} jest grupą przemianą ze względu na działanie dodawania, zaś z aksjomatów klasy II wynika że zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest grupą przemianą ze względu na działanie mnożenia. Aksjomaty klas I-III mówią, że zbiór liczb rzeczywistych stanowi ciało przemienne.

Jak Czytelnik napewno zauważył, w aksjomatach (1a) - (13a) sformułowane są własności działań dodawania i mnożenia oraz relacji $<$ dobrze znane ze szkolnej praktyki rachunkowej. Aby pozostać w zgodzie z przyjętymi zwyczajami wprowadzimy w zbiorze \mathbb{R} działanie odejmowania, przyjmując $x - y = x + (-y)$ oraz oznaczymy $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Umówimy się ponadto, że zamiast $x < y$ możemy również pisać $y > x$.

Zapis $x \geq y$ będzie oznaczał alternatywę: albo $x > y$ albo $x = y$. Podobnie zapis $x \leq y$ będzie oznaczał, że zachodzi jedna z możliwości: albo $x < y$ albo $x = y$. Nierówność $x \geq y$ względnie $y \leq x$ nazywamy *nierównością słabą* a nierówność $x > y$ względnie $x < y$ - *nierównością ostrą*.

Będziemy mówili, że

x jest *liczbą dodatnią*, jeżeli $x > 0$, x jest *liczbą nieujemną*, jeżeli $x \geq 0$,

x jest *liczbą ujemną*, jeżeli $x < 0$, x jest *liczbą niedodatnią*, jeżeli $x \leq 0$.

O dwóch liczbach x, y będziemy mówili, że

są *tego samego znaku*, jeżeli jest spełniony jeden z warunków

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

lub

$$x \leq 0, \quad y \leq 0.$$

Będziemy mówili, że liczby te są

różnych znaków, jeżeli

$$x > 0, \quad y < 0$$

lub vice versa.

Z aksjomatów (1a) - (13a) można wyprowadzić dalsze własności działań na liczbach rzeczywistych, do których jesteśmy przyzwyczajeni w praktyce rachunkowej. Sprawdzimy to na kilku przykładach.

Własność 1. *Liczba 0 określona w aksjomacie (3a) jest jedyna.*

DOWÓD. Przypuśćmy że istnieją dwie takie liczby $0, 0'$ wówczas $0+0' = 0$ oraz $0'+0 = 0'$ co na mocy (1a) daje $0 = 0'$. \square

Własność 2. *Do danej liczby $x \in \mathbb{R}$ istnieje tylko jedna liczba przeciwna.*

DOWÓD. Przypuśćmy że istnieją dwie liczby y, y' takie że $x + y = 0$ oraz $x + y' = 0$. Wówczas korzystając z (1a), (2a) i (3a) dostajemy

$$y = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = y'.$$

\square

Własność 3. *Jeżeli $x < y$ oraz $u < v$ to $x + u < y + v$ (nierówności można dodawać stronami).*

DOWÓD. Na mocy (12a) mamy $x + u < y + u$ oraz $u + y < v + y$ co wobec (1a) i (11a) daje tezę. \square

Własność 4. Nierówność

$$(1) \quad x > y$$

jest równoważna nierówności

$$(2) \quad x - y > 0.$$

DOWÓD. Nierówność (2) otrzymujemy z (1) dodając do obu stron $-y$. Na odwrót (1) dostajemy z (2) dodając do obu stron y i korzystając z łączności dodawania (aksjomat (2a)). \square

Własność 5. Jeżeli

$$(3) \quad x > y$$

oraz

$$(4) \quad z > 0$$

to

$$x \cdot z > y \cdot z$$

(nierówność można mnożyć przez liczbę dodatnią).

DOWÓD. Na mocy własności 4 nierówność (3) daje $x - y > 0$, stąd wobec (13a) mamy $(x - y) \cdot z > 0$ czyli po wykorzystaniu (5a) i (9a)

$$x \cdot z - y \cdot z > 0$$

co wobec własności 4 daje tezę. \square

Własność 6. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$(5) \quad 0 \cdot x = 0.$$

DOWÓD. Na mocy aksjomatów (7a), (9a), (1a), (3a)

$$0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

skąd, dodając obustronnie $-x$ i korzystając z łączności dodawania (aksjomat (2a)), dostajemy

$$0 \cdot x + 0 = 0,$$

co wobec aksjomatu (3a) daje (5). \square

Własność 7. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$(6) \quad (-1) \cdot x = -x.$$

DOWÓD. Wystarczy sprawdzić, że lewa strona równości jest liczbą przeciwną do x (która na mocy własności 2 jest jedyna). Istotnie na mocy aksjomatów (7a), (9a) i własności 6

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = [1 + (-1)] \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

□

Własność 8. Zachodzi nierówność

$$(7) \quad 1 > 0.$$

DOWÓD. Przeprowadzimy go przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że (7) nie zachodzi, wobec tego na mocy aksjomatów (7a) i (10a) musi być

$$(8) \quad 1 < 0.$$

Dodając do obu stron -1 stwierdzamy, że -1 jest liczbą dodatnią i wobec tego na mocy własności 5 otrzymujemy z (8)

$$1 \cdot (-1) < 0 \cdot (-1),$$

czyli wobec własności 6, 7 i aksjomatu (5a)

$$-1 < 0$$

wbrew temu co udowodniliśmy. □

W dalszym ciągu zapisując iloczyn liczb będziemy opuszczali znak \cdot , jeżeli nie będzie to prowadziło do nieporozumienia. Zgodnie z tą umową będziemy pisali

$$2yxy = 2xy^2 \quad \text{ale} \quad 2 \cdot 17 \cdot 5 = 170.$$

2. Wartość bezwzględna (moduł) liczby rzeczywistej. Wartość bezwzględną $|x|$ liczby rzeczywistej x określamy następująco

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Z definicji wynika, że wartość bezwzględna jest zawsze nieujemna, przy czym

$$|-x| = |x|.$$

Obie te własności wartości bezwzględnej są omawiane w szkolnym kursie matematyki. Wynikają one z podanych aksjomatów zbioru liczb rzeczywistych. Proponujemy, by

Czytelnik przeprowadził ich dowód opierając się na zadaniu 1. Łatwo również udowodnić następujące własności rachunkowe wartości bezwzględnej:

$$\begin{aligned} (9) \quad & |x + y| \leq |x| + |y|; \\ (10) \quad & |xy| = |x||y|; \\ (11) \quad & |x^{-1}| = |x|^{-1} \quad \text{dla } x \neq 0; \\ (12) \quad & ||x| - |y|| \leq |x - y|. \end{aligned}$$

Dla dowodu wzoru (9) założmy najpierw, że obie liczby x, y są tego samego znaku - wówczas taki sam znak ma ich suma. Jeżeli $x \geq 0, y \geq 0$ to $|x| = x, |y| = y, |x+y| = x+y$. Jeżeli zaś $x \leq 0, y \leq 0$ to $|x| = -x, |y| = -y, |x+y| = -(x+y)$. W obu przypadkach we wzorze (9) mamy znak równości. Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy liczby x, y są różnych znaków, niech na przykład $x < 0, y > 0$. Prawa strona wzoru ma zatem postać $y - x$. Po lewej stronie mamy $x + y$, gdy suma liczb x, y jest nieujemna lub $-x - y$, gdy suma ta jest ujemna. Ponieważ (por. zadanie 1 g.), h.))

$$x + y < 0 + y < y - x$$

oraz

$$-x - y < -x + 0 < y - x$$

wzór (9) zachodzi i w tym przypadku.

Dowód wzorów (10), (11) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Dla dowodu wzoru (12) zauważmy, że wobec (9)

$$(13) \quad |x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

oraz

$$(14) \quad |y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|.$$

Wzór (12) wynika teraz z (13), gdy $|x| \geq |y|$ oraz z (14), gdy $|x| < |y|$. □

3. Interpretacja geometryczna zbioru liczb rzeczywistych. Liczby rzeczywiste można interpretować geometrycznie jako punkty prostej. Na danej prostej L obierzmy punkt P_0 . Dzieli on prostą L na dwie półproste, przy czym półprostą złożoną z punktów leżących na prawo od P_0 nazwiemy półprostą dodatnią i oznaczymy jako L_+ , zaś półprostą utworzoną przez punkty leżące na lewo od P_0 nazwiemy półprostą ujemną i oznaczymy przez L_- . Prosta L staje się w ten sposób *prostą zorientowaną*. Mając możliwość mierzenia długości odcinków na prostej L oznaczmy przez $|PQ|$ długość odcinka o końcach $P, Q \in L$. Każdemu punktowi $P \in L$ możemy teraz przyporządkować liczbę rzeczywistą x_P określoną następująco

$$x_P = \begin{cases} |P_0P| & \text{gdy } P \in L_+, \\ 0 & \text{gdy } P = P_0, \\ -|P_0P| & \text{gdy } P \in L_-, \end{cases}$$

przy czym, jak łatwo sprawdzić (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku)

$$|PQ| = |x_P - x_Q|$$

dla dowolnych punktów P, Q prostej L .

W rozważaniach naszych posłużyliśmy się intuicyjnym pojęciem prostej do którego przywykliśmy podczas nauki geometrii w szkole. Można jednak przeprowadzić całe rozumowanie bardziej rygorystycznie, wprowadzając aksjomatycznie pojęcie prostej geometrycznej i długości (miary) odcinka¹, i udowadniając następunie

Twierdzenie. *Każdej liczbie rzeczywistej x odpowiada dokładnie jeden punkt $P \in L$ taki, że $x_P = x$.*

W szczególności liczbie $x = 1$ odpowiada dokładnie jeden punkt P_1 taki, że $|P_0P_1| = 1$. Oznacza to, że na prostej L mamy określoną jednostkę długości odcinka. Liczbę x_P nazywamy *współrzędną punktu P* , zaś jedyny punkt P_0 o współrzędnej 0 nazywamy *początkiem układu współrzędnych*. Prostą zorientowaną z wyróżnionym początkiem układu współrzędnych i wprowadzoną jednostką miary nazywamy *osią liczbową*.

W dalszym ciągu punkty osi liczbowej będziemy utożsamiać z ich współrzędnymi. Pozwoli to nadać sens geometryczny pojęciom i twierdzeniom analizy i uczynić wiele rozumowań bardziej przejrzystymi.

4. Przedziały na osi liczbowej. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wprowadzimy oznaczenia

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Zbiór $[a, b]$ nazywamy *przedziałem domkniętym* zaś (a, b) - *przedziałem otwartym*. Geometrycznie przedział domknięty $[a, b]$ stanowi odcinek wyznaczony przez punkty a, b wraz z końcami, zaś przedział otwarty (a, b) jest takimże odcinkiem ale bez końców. Będziemy również rozważać *przedziały niewłaściwe*

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

¹Zainteresowanych odsyłamy do książki K. Borsuk i W. Szmielew, Podstawy geometrii, rozdz. I, Warszawa 1975

Przedział otwarty (a, b) ($a, b \in \mathbb{R}$) będziemy nazywali *wnętrzem przedziału* $[a, b]$ (względnie $[a, b), (a, b]$). Przedział $(-\infty, a)$ (względnie (a, ∞)) będziemy nazywali *wnętrzem przedziału* $(-\infty, a]$ (względnie $[a, \infty)$). *Wnętrzem przedziału* $(-\infty, \infty)$ jest ten sam przedział. Każdy punkt należący do wnętrza przedziału będziemy nazywali *punktem wewnętrznym* tego przedziału.

5. Liczby naturalne. Liczby naturalne są dobrze znane Czytelnikowi. Od nich małe dziecko zaczyna swoje "matematyczne przygody", licząc posiadane przedmioty: cukierki, lalki, samochodziki. Zobaczymy teraz, że można pojęcie liczby naturalnej wprowadzić w sposób precyzyjny traktując ją jako szczególny przypadek liczby rzeczywistej.

Zacniemy od pozornie abstrakcyjnej definicji. Zbiór $D \subset \mathbb{R}$ nazywamy *induktywnym*, jeżeli spełnia warunki

- (i) $1 \in D$,
- (ii) jeżeli $a \in D$, to $a + 1 \in D$.

A oto przykłady zbiorów induktywnych:

$$D_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

$$D_2 = \{\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{7}{3}, 3, \frac{10}{3}, 4, \dots\}.$$

Zbiorem liczb naturalnych \mathbb{N} nazwiemy taki podzbiór zbioru \mathbb{R} , który zawarty jest w każdym zbiorze induktywnym (można to wyrazić inaczej: zbiór \mathbb{N} jest najmniejszym zbiorem induktywnym). Elementy zbioru \mathbb{N} będziemy nazywali *liczbami naturalnymi*.

6. Zasada indukcji zupełnej. Z definicji zbioru \mathbb{N} wynika następujące twierdzenie zwane *zasadą indukcji zupełnej*:

Twierdzenie 1. *Jeżeli zbiór D liczb naturalnych jest induktywny, to $D = \mathbb{N}$.*

Twierdzenie 1 daje wygodną metodę dowodzenia twierdzeń dotyczących liczb naturalnych. Przypuśćmy, że mamy udowodnić twierdzenie sformułowane następująco:

Dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe jest zdanie $T(n)$.

Oznaczmy przez B zbiór liczb naturalnych, dla których zdanie $T(n)$ jest prawdziwe. Mamy udowodnić, że $B = \mathbb{N}$. Wystarczy w tym celu okazać, że zbiór B jest induktywny.

DOWÓD (zwany *dowodem indukcyjnym*) składa się z dwóch części:

I. Pierwsza część polega na sprawdzeniu że prawdziwe jest zdanie $T(1)$ - wówczas zbiór B spełnia warunek (i).

II. Druga część ma charakter pomocniczego twierdzenia, które formułujemy następująco:
ZAŁOŻENIE (zwane *założeniem indukcyjnym*): *Zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.*

TEZA (zwana *tezą indukcyjną*): *Prawdziwe jest zdanie $T(n + 1)$.*

Po przeprowadzeniu drugiej części dowodu indukcyjnego stwierdzamy, że zbiór B spełnia warunek (ii). Wobec tego $B = \mathbb{N}$ na mocy twierdzenia 1, co kończy dowód indukcyjny.

Podamy teraz przykłady dowodów indukcyjnych.

Twierdzenie. *Wszystkie liczby postaci $13^n - 7$ (gdzie n jest liczbą naturalną) są podzielne przez 6.*

DOWÓD. Zdanie $T(n)$ ma postać

liczba $13^n - 7$ jest podzielna przez 6.

I CZĘŚĆ DOWODU. Liczba $13 - 7 = 6$ spełnia twierdzenie.

II CZĘŚĆ DOWODU. Twierdzenie pomocnicze ma postać

ZAŁOŻENIE INDUKCYJNE: *Liczba $13^n - 7$ jest podzielna przez 6.*

TEZA INDUKCYJNA: *Liczba $13^{n+1} - 7$ jest podzielna przez 6.*

DOWÓD TWIERDZENIA POMOCNICZEGO:

Na mocy założenia indukcyjnego istnieje liczba naturalna k taka, że

$$13^n - 7 = 6k.$$

Stąd mamy

$$13^n = 6k + 7,$$

a zatem

$$13^{n+1} - 7 = 13 \cdot (6k + 7) - 7,$$

co po otworzeniu nawiasu i redukcji daje

$$13^{n+1} - 7 = 6 \cdot 13k + 7 \cdot 12 = (13k + 14) \cdot 6,$$

co kończy dowód. □

7. Nierówność Bernoulliego. Nierówność Bernoulliego² ma postać

$$(15) \quad (1 + a)^n \geq 1 + na$$

dla $n \in \mathbb{N}$, $a \geq -1$. Udowodnimy ją stosując metodę indukcji. Pierwszy krok dowodu indukcyjnego polega na sprawdzeniu, że nierówność (15) zachodzi dla $n = 1$, co jest bezpośrednio widoczne. Aby przeprowadzić drugą część dowodu przyjmujemy (15) jako założenie indukcyjne. Mnożąc obie strony (15) przez liczbę nieujemną $1 + a$ dostajemy po redukcji

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2$$

skąd wynika teza indukcyjna

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.$$

²Jakob Bernoulli (1654 - 1705), urodzony w Bazylei. Zajmował się rachunkiem różniczkowym oraz rachunkiem prawdopodobieństwa, współpracował z G.W. Leibnizem. Od 1687 r. kierował katedrą matematyki na uniwersytecie w Bazylei. Do rodziny Bernoullich należeli również matematycy: brat Jakoba Johann (1667 - 1748), Nikolaus (1687 - 1759) oraz synowie Johanna Nikolaus (1695 - 1726), Daniel (1700 - 1782) i Johann (1710 - 1790).

Dowód indukcyjny nierówności (15) jest zakończony. \square

8. Dwumian Newtona. Dla dowolnej liczby naturalnej n oznaczmy symbolem $n!$ (czytamy: n silnia) iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n . Mamy zatem

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

skąd wynika natychmiast

$$(n+1)! = n! (n+1).$$

Równość ta pozostaje słuszna również dla $n = 0$, jeżeli umówimy się, że

$$0! = 1.$$

Dla naturalnych n, k spełniających warunek $0 \leq k \leq n$ określimy *współczynnik dwumianowy*

$$(16) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!},$$

który po skróceniu może być zapisany w postaci

$$(17) \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Współczynnik $\binom{n}{k}$ ma prostą interpretację kombinatoryczną. Przypuśćmy, że ze zbioru n -elementowego Z_n mamy wybrać podzbiór k -elementowy U_k . Na ile sposobów możemy to zrobić? Przy wyborze pierwszego elementu mamy n możliwości, w zbiorze Z_n pozostaje $(n-1)$ elementów nie wybranych. Drugi element możemy wybrać zatem na $(n-1)$ sposobów, trzeci - na $(n-2)$ sposobów, k -ty na $n - (k-1)$ sposobów. Wobec tego mamy

$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$$

możliwości wybrania układu k -elementowego U_k . Ilość różnych układów U_k zawierających te same elementy ale w różnej kolejności wynosi $k!$ (jest to ilość wszystkich możliwych permutacji zbioru k -elementowego). Wobec tego ze zbioru Z_n możemy wybrać

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

podzbiorów k -elementowych (podzbiory zawierające te same elementy ale różnie uporządkowane uważamy za identyczne). Porównując ze wzorem (17) widzimy, że ze zbioru n -elementowego możemy wybrać $\binom{n}{k}$ podzbiorów k -elementowych.

Ważną własność współczynników dwumianowych wyraża wzór

$$(18) \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Aby go udowodnić wystarczy skorzystać z postaci (16) współczynnika dwumianowego i wykonać dodawanie ułamków, sprowadziwszy je uprzednio do wspólnego mianownika. Szczegóły rachunkowe pozostawiamy Czytelnikowi.

W dalszym ciągu dla oznaczenia sumy postaci $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ będziemy używali skróconego zapisu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Liczbę k nazywamy *wskaznikiem sumacyjnym*.

Wzór dwumianowy Newtona³ ma postać

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

czyli w postaci skróconej

$$(19) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(przyjmujemy, że $a^0 = b^0 = 1$ dla dowolnych a, b). Udowodnimy go stosując metodę indukcji.

Dla $n = 1$ prawa strona wzoru ma postać

$$\binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$$

jest więc równa lewej. Aby przeprowadzić drugą część dowodu indukcyjnego przyjmiemy (19) jako założenie indukcyjne. Teza indukcyjna, którą należy udowodnić w oparciu o założenie indukcyjne ma postać

$$(20) \quad \begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \\ &= a^{n+1} + \sum_{r=1}^n \binom{n+1}{r} a^{n+1-r} b^r + b^{n+1}. \end{aligned}$$

³Sir Isaak Newton (1642 - 1727), matematyk i fizyk angielski, jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego. Z jego nazwiskiem związane są trzy zasady dynamiki oraz prawo powszechnego ciążenia.

Mnożąc obustronnie (19) przez $(a + b)$ dostajemy

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

co można inaczej zapisać jako

$$(21) \quad \begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} a^{n+1-r} b^r \\ &+ \sum_{r=1}^n \binom{n}{r-1} a^{n+1-r} b^r + b^{n+1} \end{aligned}$$

(w pierwszej sumie oznaczyliśmy wskaźnik sumacyjny literą r zaś w drugiej sumie podstawiliśmy $r = k + 1$). Grupując po prawej stronie wyrazy z tymi samymi potęgami liczb a, b i korzystając z własności (18) współczynników dwumianowych dostajemy z (21) tezę indukcyjną (20). Dowód indukcyjny jest zakończony. \square

Ze współczynników dwumianowych można ułożyć trójkątną tablicę (zwaną *trójkątem Pascala*⁴) w ten sposób, że w n -tym wierszu ($n \geq 1$) wypisujemy kolejno współczynniki występujące w rozwinięciu $(a + b)^{n-1}$ według wzoru (19). Wygląda ona następująco:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Reguła budowania trójkąta Pascala jest prosta. W wierzchołku trójkąta występuje liczba 1, dalej mamy wiersz składający się z dwóch jedynek. Każdy następny wiersz zaczynamy i kończymy liczbą 1, zaś pozostałe jego wyrazy obliczamy dodając dwa sąsiednie wyrazy poprzedniego wiersza zgodnie z regułą (18). Zauważmy, że z definicji (16) mamy natychmiast

$$(22) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

skąd wynika, że w trójkącie Pascala liczby jednakowo oddalone od końców wiersza są równe.

9. Liczby całkowite, wymierne, niewymierne. Niech q będzie dowolną liczbą naturalną. Liczbę $b \in \mathbb{R}$ nazywamy *pierwiastkiem stopnia q z liczby rzeczywistej a* , jeżeli $b^q = a$. Zapisujemy

$$b = \sqrt[q]{a}$$

⁴Blaise Pascal (1623 - 1662), matematyk i filozof francuski, współtwórca rachunku prawdopodobieństwa.

lub

$$b = \sqrt{a}$$

gdy $q = 2$. A oto przykłady:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \text{bo} \quad (-2)^3 = -8; \\ \sqrt[4]{625} = 5 \quad \text{oraz} \quad \sqrt[4]{625} = -5, \quad \text{bo} \quad 5^4 = (-5)^4 = 625. \end{aligned}$$

Jeżeli obie liczby a , b są dodatnie, to mówimy, że b jest *pierwiastkiem arytmetycznym stopnia q z liczby a* . W dalszym ciągu przez $\sqrt[q]{a}$, względnie \sqrt{a} (gdzie $a > 0$) będziemy zawsze rozumieli pierwiastek arytmetyczny.

Mówimy, że liczba $x \in \mathbb{R}$ jest *całkowita*, jeżeli albo $x = 0$ albo jedna z liczb x , $-x$ jest liczbą naturalną. Liczbami całkowitymi są więc na przykład liczby

$$0, -6, \sqrt{25}, 8, \sqrt[3]{-27}.$$

Zbiór wszystkich liczb całkowitych oznaczamy przez Z .

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę rzeczywistą postaci $p \cdot \frac{1}{q}$ (co zapisujemy jako ułamek $\frac{p}{q}$), gdzie $p \in Z, q \in \mathbb{N}$. A oto przykłady liczb wymiernych:

$$-10, \frac{1}{17}, -\sqrt{\frac{50}{18}}, \sqrt[4]{16}, \frac{\sqrt{121}}{7}.$$

Zbiór wszystkich liczb wymiernych będziemy oznaczać przez Q .

Liczbę rzeczywistą, która nie jest wymierna, nazywamy *liczbą niewymierną*. Udowodnimy przez sprowadzenie do niedorzeczności, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Przypuśćmy bowiem, że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

gdzie $p, q \in \mathbb{N}$ przy czym prawa strona jest ułamkiem nieskracalnym. Mnożąc obustronnie przez mianownik i podnosząc do kwadratu dostajemy

$$2q^2 = p^2,$$

skąd wynika, że prawa strona jest liczbą parzystą. Wobec tego p jest liczbą parzystą,⁵ zatem czynnik 2 występuje po lewej stronie conajmniej dwa razy, skąd wynika że również

⁵Opieramy się tu na twierdzeniu o jednoznaczności rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze (por. W.Narkiewicz, Teoria liczb, rozdz.I§1 Warszawa 1990).

q jest liczbą parzystą. Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny.⁶
♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Opierając się na aksjomatach określających zbiór \mathbb{R} udowodnić że
 - a.) liczba 1 określona w aksjomacie (7a) jest jedyna,
 - b.) liczba odwrotna do danej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ jest jedyna,
 - c.) $0 > -1$,
 - d.) $(-1) \cdot (-1) = 1$,
 - e.) jeżeli $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x > y$ oraz $z < 0$ to $xz < yz$ (jest to *reguła mnożenia nierówności przez liczbę ujemną*),
 - f.) $x^2 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,
 - g.) jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$ to $-x < -y$,
 - h.) jeżeli $x > 0$, to $-x < 0$,
 - i.) jeżeli $x < 0$, to $-x > 0$.

2. Opierając się na aksjomatach określających zbiór \mathbb{R} udowodnić, że iloczyn liczb rzeczywistych jest równy zeru wtedy i tylko wtedy gdy co najmniej jeden z czynników jest równy zeru.

3. Przyjmując oznaczenia $\max(x_1, \dots, x_n) =$ największa z liczb x_1, \dots, x_n , $\min(x_1, \dots, x_n) =$ najmniejsza z liczb x_1, \dots, x_n sprawdzić słuszność wzorów

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),$$

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

4. Udowodnić, że nierówność

$$|x - a| \leq \varepsilon$$

jest równoważna podwójnej nierówności

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon.$$

Sformułować analogiczne twierdzenie dla nierówności

$$|x - a| < \varepsilon.$$

⁶Niewymierność liczby $\sqrt{2}$ można również udowodnić opierając się na twierdzeniu z geometrii elementarnej mówiącym, że bok i przekątnia kwadratu są odcinkami niewspółmiernymi. Bliższe szczegóły można znaleźć w książce: J. Mioduszewski, Ciągłość, Warszawa 1996.

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej obu tych nierówności.

5. Dowieść, że $|x + y| = |x - y|$ wtedy i tylko wtedy gdy $xy = 0$. Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

6. Dla jakich x spełnione są nierówności

$$|ax + b| < c$$

oraz

$$\frac{a|x| + 1}{x} < 1.$$

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

7. Dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b wyrażenie

$$A = \frac{a + b}{2}$$

nazywamy ich *średnią arytmetyczną*, wyrażenie

$$G = \sqrt{ab}$$

- *średnią geometryczną*, zaś wyrażenie

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

- *średnią harmoniczną*. Udowodnić, że

$$a \leq H \leq G \leq A \leq b$$

przy czym znak równości zachodzi tylko wtedy gdy $a = b$.

8. Załóżmy, że

$$a < b, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \\ \alpha + \beta = 1.$$

Wyrażenie

$$w = \alpha a + \beta b$$

nazywamy *kombinacją wypukłą* liczb a, b . Udowodnić, że

(i) $a \leq w \leq b$,

(ii) każda liczba $w \in [a, b]$ daje się przedstawić jednoznacznie jako kombinacja wypukła liczb a, b . Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

9. Załóżmy, że w punkcie x_j na osi liczbowej umieszczono masę m_j ($j = 1, \dots, n$). Wówczas punkt

$$X = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j x_j \quad (M = \sum_{j=1}^n m_j)$$

nazywamy *środkiem masy* układu punktów materialnych $(x_1, m_1), \dots, (x_n, m_n)$.

Sprawdzić, że punkt w określony w zadaniu 8 jest środkiem masy układu punktów materialnych $(a, \alpha), (b, \beta)$.

10. Które z następujących zbiorów są induktywne

- (a) $A_1 = \{0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2} + 1, 3, \sqrt{2} + 2, 4, \sqrt{2} + 3, 5, \dots\}$,
- (b) $A_2 = \{-3, -2, 0, 2, 3, 4, 5, \dots\}$,
- (c) zbiór wszystkich liczb nieparzystych?

11. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą tożsamości

- (a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
- (b) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- (c) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

12. Udowodnić tożsamość

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

13. Ktoś "udowodnił" następujące twierdzenie:

dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$T(n) : \quad 2n < 2n - 1.$$

A oto "dowód" indukcyjny: Załóżmy, że słuszna jest nierówność $T(n)$. Dodając 2 do obu stron otrzymujemy

$$T(n+1) : \quad 2(n+1) < 2(n+1) - 1.$$

Pokazać na przykładzie, że twierdzenie jest fałszywe. Na czym polega błąd w dowodzie indukcyjnym?

14. Udowodnić metodą indukcji, że dla $x \neq 1$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Jak można udowodnić tą równość bez pomocy indukcji?

15. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczby postaci

$$\text{a.) } 4^n - 1, \quad \text{b.) } \frac{1}{2} \cdot 4^n + 1$$

są podzielne przez 3.

16. Opierając się na własnościach liczb rzeczywistych wynikających z aksjomatów określających zbiór \mathbb{R} udowodnić metodą indukcji, że $n \geq 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

17. Korzystając z trójkąta Pascala napisać rozwinięcie dwumianu

$$\text{(i) } (a + b)^7 \quad \text{ii) } (x + y)^{11}$$

Porównać ze wzorem dwumianowym Newtona.

18. Udowodnić, że

$$\binom{n}{k} \leq n^k$$

dla $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

19. Opierając się na wzorze dwumianowym Newtona udowodnić, że

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \\ \text{(ii)} \quad & \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0. \end{aligned}$$

20. Ile różnych podzbiorów (wliczając zbiór pusty) można wybrać ze zbioru n -elementowego?

Wskazówka. Wykorzystać interpretację kombinatoryczną współczynników dwumianowych (punkt 8) oraz zadanie 19.

21. Wykazać, że dla $a \geq 0$ nierówność Bernoulliego wynika ze wzoru dwumianowego Newtona.

22. Udowodnić, że nierówność Bernoulliego jest spełniona również dla $-2 \leq a < -1$. Pokazać na przykładzie, że nie jest ona na ogół prawdziwa dla $a < -2$.

Wskazówka. Zbadać, w jakich przedziałach osi rzeczywistej leżą liczby $b_n = (1 + a)^n$ oraz $c_n = 1 + na$ jeżeli $n \geq 2$.

23. Udowodnić następującą modyfikację zasady indukcji zupełnej:
Niech D będzie induktywnym zbiorem liczb rzeczywistych spełniającym warunki

- (i) $0 \in D$,
- (ii) $D \subset \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Wówczas $D = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Wskazówka. Rozważyc zbiór $D_1 = D \setminus \{0\}$.

24. Jeszcze jedna modyfikacja zasady indukcji zupełnej:
Niech D będzie zbiorem liczb naturalnych spełniającym warunki

- (i) *istnieje liczba naturalna k taka, że $k \in D$,*
- (ii) *jeżeli $n \in D$, to $n + 1 \in D$.*

Wówczas $\{n \in \mathbb{N} : n \geq k\} \subset D$.

Wskazówka. Dla dowodu rozważyc zbiór

$$D_1 = \{1, 2, \dots, k - 1\} \cup D.$$

25. Sprawdzić, dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{2}.$$

Wskazówka. Sprawdzić nierówność dla $n = 1, 2, 3$. Następnie zastosować zmodyfikowaną zasadę indukcji zupełnej opierając się na zadaniu 24.

26. Udowodnić tożsamość

$$(22) \quad \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

(jakie wartości t należy wykluczyć?)

Wskazówka. Zastosować metodę indukcji, zaczynając od $n = 0$ (por. zadanie 23).

27. Podać i udowodnić analogiczny do (22) wzór dla sumy

$$\sin t + \sin 2t + \dots + \sin nt.$$

28. Niech w będzie liczbą wymierną ($w \neq 0$) i niech x będzie liczbą niewymierną. Wykazać, że liczby $w + x$ oraz wx są niewymierne.

29. Udowodnić nierówność

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$$

dla $a \geq 1$.

30. Niech

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{dla } n > 2$$

(liczby a_n tworzą *ciąg Fibonacciego*⁷). Udowodnić metodą indukcji, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{2^n} \right).$$

Wskazówka. Zacząć indukcję od $n = 2$ (por. zadanie 24).

⁷Leonardo z Pizy zwany czasami Fibonacci (ok. 1180 -1240), matematyk włoski, zajmował się arytmetyką i algebrą oraz zastosowaniami algebry do geometrii, wprowadził do Europy cyfry arabskie. Ciąg $\{a_n\}$ został podany przez Fibonacciego w książce "Liber abbaci" (wyd. 1202 r.) jako rozwiązanie następującego zagadnienia. Para królików daje raz w miesiącu przychówek w postaci dwojga królicząt (samca i samiczki), przy czym nowonarodzone króliki dają przychówek po upływie dwóch miesięcy. Zakładamy, że na początku była tylko jedna para królików oraz że króliki nie umierają. Wówczas a_n ($n = 1, 2, \dots$) oznacza ilość par królików po $n - 1$ miesiącach.



§2. Aksjomat kresu i jego konsekwencje.

1. Zbiory ograniczone. Kres górny i dolny zbioru. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z dołu*, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista p , że dla wszystkich $a \in A$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad p \leq a.$$

Liczbę p nazywamy *ograniczeniem dolnym* zbioru A . Sens geometryczny podanej definicji jest jasny - zbiór A interpretowany na osi liczbowej zawiera się w półprostej, której lewym końcem jest punkt p (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku).

Analogicznie mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z góry*, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista P , że

$$(2) \quad a \leq P$$

dla wszystkich $a \in A$. Liczbę P nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A . Zbiór A interpretowany na osi liczbowej jest wówczas zawarty w półprostej, której prawym końcem jest punkt P .

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony* jeżeli jest ograniczony z dołu i z góry, to znaczy jeżeli istnieją takie liczby rzeczywiste p, P , że

$$(3) \quad p \leq a \leq P$$

dla wszystkich $a \in A$. Geometrycznie oznacza to, że zbiór A interpretowany na osi liczbowej zawiera się w odcinku o końcach p, P .

Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że przedział $[p, P]$ został zastąpiony przedziałem większym, symetrycznym względem początku układu współrzędnych. Dlatego definicja zbioru ograniczonego może być również sformułowana następująco:

Zbiór A nazywamy *ograniczonym*, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia Q , że

$$(4) \quad |a| \leq Q$$

dla wszystkich $a \in A$.

Oczywiście każdy zbiór ograniczony z góry ma nieskończenie wiele ograniczeń górnych - nierówność (2) pozostanie słuszną jeżeli liczbę P zastąpimy przez $P+r$ gdzie r jest dowolną liczbą dodatnią. Podobnie zbiór ograniczony z dołu ma nieskończenie wiele ograniczeń dolnych, gdyż nierówność (1) pozostaje prawdziwa po zastąpieniu p przez $p-r$.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry. Najmniejsze z jego ograniczeń górnych nazywamy *kresem górnym* zbioru A i oznaczamy $\sup A$. Liczba

$$M = \sup A$$

(czytamy: supremum A) ma więc następujące własności:

(i) dla dowolnego $a \in A$ zachodzi nierówność

$$a \leq M$$

(liczba M jest więc ograniczeniem górnym zbioru A),

(ii) dla dowolnej liczby $M' < M$ można znaleźć taką liczbę $a' \in A$, że

$$M' < a'$$

(zatem każda liczba mniejsza od M nie jest już ograniczeniem górnym zbioru A).

Podaną definicję kresu górnego można sformułować w sposób równoważny następująco:

Liczba M jest *kresem górnym* zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (sup1) dla dowolnego $a \in A$ zachodzi nierówność

$$(5) \quad a \leq M,$$

(sup2) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $a_\varepsilon \in A$ takie, że

$$(6) \quad M - \varepsilon < a_\varepsilon.$$

Jeżeli $A \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem ograniczonym z dołu, to zupełnie podobnie możemy zdefiniować jego *kres dolny* - należy tylko w podanych definicjach zmienić kierunek nierówności. A więc *kresem dolnym* zbioru A (oznaczamy $\inf A$, czytamy: infimum A) nazywamy największe z jego ograniczeń dolnych. Zatem liczba

$$m = \inf A$$

ma następujące własności:

(i) dla dowolnego $a \in A$ zachodzi nierówność

$$m \leq a$$

(liczba m jest ograniczeniem dolnym zbioru A),

(ii) dla dowolnej liczby $m' > m$ można znaleźć taką liczbę $a' \in A$, że

$$a' < m'$$

(żadna liczba większa od m nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A). A oto równoważne sformułowanie podanej definicji:

Liczba m jest *kresem dolnym* zbioru A wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki (inf1) dla dowolnego $a \in A$ zachodzi nierówność

$$(7) \quad m \leq a,$$

(inf2) do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $a_\varepsilon \in A$, że

$$(8) \quad a_\varepsilon < m + \varepsilon.$$

2. Aksjomat kresu. Zdefiniowaliśmy kres górny ograniczonego z góry zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jako liczbę najmniejszą w zbiorze wszystkich jego ograniczeń górnych. Nie jest jednak rzeczą oczywistą, że taka liczba istnieje, gdyż bardzo łatwo podać przykłady zbiorów nie mających liczby najmniejszej.

Przykład. W przedziale otwartym $\mathbb{I} = (0, 1)$ nie ma ani liczby najmniejszej ani liczby największej. Jeżeli bowiem $c \in \mathbb{I}$, to

$$0 < \frac{c}{2} < c < \frac{c+1}{2} < 1,$$

a więc do każdej liczby z przedziału \mathbb{I} istnieją liczby większa i mniejsza, również należące do tego przedziału.

Istnienie kresu górnego dowolnego zbioru liczb rzeczywistych ograniczonego z góry gwarantuje *aksjomat kresu* zapowiedziany w §1. Sformułujemy go następująco:

(14a) Każdy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z góry ma w zbiorze liczb rzeczywistych kres górny.

Jak już zauważyliśmy, w aksjomatach (1a) - (13a) sformułowane są własności liczb rzeczywistych dobrze znane ze szkolnej praktyki rachunkowej. Wszystkie te własności mają w szczególności liczby wymierne. Inaczej przedstawia się sprawa w przypadku sformułowanego przed chwilą aksjomatu (14a). Zastępując w nim zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} przez zbiór wszystkich liczb wymiernych W otrzymalibyśmy twierdzenie fałszywe, jak wskazuje następujący prosty przykład:

Niech A będzie zbiorem przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem liczby $\sqrt{2}$ (w §1 punkt 9 udowodniliśmy, że jest to liczba niewymierna). Zbiór $A \subset W$ jest ograniczony z góry (ograniczeniem górnym jest $\sqrt{2}$) natomiast nie zawiera on liczby największej, gdyż do każdego przybliżenia dziesiętnego z niedomiarem można znaleźć przybliżenie z niedomiarem zawierające o jedną liczbę po przecinku więcej, a więc większe od poprzedniego.

W aksjomacie kresu sformułowana jest więc pewna nowa własność zbioru liczb rzeczywistych \mathbb{R} która odróżnia go w istotny sposób od zbioru wszystkich liczb wymiernych W .

3. Własności kresu górnego i dolnego zbioru. Dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ przyjmijmy oznaczenie

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : x = -a, a \in A\}.$$

Łatwo sprawdzić że

(s₁) zbiór A jest ograniczony z góry (z dołu) wtedy i tylko wtedy gdy zbiór $-A$ jest ograniczony z dołu (z góry),

(s_2) jeżeli A jest ograniczony z góry i $\sup A = M$, to $\inf(-A) = -M$,

(s_3) jeżeli A jest ograniczony z dołu i $\inf A = m$, to $\sup(-A) = -m$.

Dla przykładu udowodnimy stwierdzenie (s_2). Z warunku (sup1) otrzymujemy dla dowolnego $a \in A$

$$-M \leq -a$$

zatem $-M$ jest ograniczeniem dolnym zbioru $-A$. Z warunku (sup2) wynika że do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $a_\varepsilon \in A$ takie, że

$$-a_\varepsilon < -M + \varepsilon.$$

Zatem liczba $-M$ spełnia oba warunki (inf1), (inf2) z zastąpieniem A przez $-A$, jest więc kresem dolnym zbioru $-A$. Dowody stwierdzeń (s_1), (s_3) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Z aksjomatu kresu (14a) i ze stwierdzeń (s_1) (s_2) wynika natychmiast

Twierdzenie 1. *Każdy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z dołu ma w zbiorze liczb rzeczywistych kres dolny.*

DOWÓD. Wobec (s_1) zbiór $-A$ jest ograniczony z góry, zatem na mocy aksjomatu kresu ma w zbiorze \mathbb{R} kres górny M . Ze stwierdzenia (s_2) wynika, że liczba $-M$ jest kresem dolnym zbioru $-(-A) = A$. \square

Z przyjętych definicji wynika, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nie jest ograniczony z góry, jeżeli żadna liczba rzeczywista nie jest jego ograniczeniem górnym. Oznacza to, że do dowolnej liczby rzeczywistej P można dobrać liczbę $a_P \in A$ taką, że

$$a_P > P.$$

Przyjmijmy w takim przypadku, że

$$\sup A = \infty.$$

Podobnie, zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nie jest ograniczony z dołu, jeżeli nie ma on żadnego ograniczenia dolnego, co można sformułować inaczej następująco: do dowolnej liczby rzeczywistej p można dobrać liczbę $a_p \in A$ taką, że

$$a_p < p.$$

W tym przypadku przyjmijmy, że

$$\inf A = -\infty.$$

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 2 (zasada Archimedesesa).¹ *Do dowolnej liczby rzeczywistej r można dobrać liczbę naturalną większą od niej.*

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Należy okazać, że zbiór liczb naturalnych \mathbb{N} nie jest ograniczony z góry. Przypuśćmy, że jest to nieprawdą, wówczas na mocy aksjomatu kresu istnieje liczba $M = \sup \mathbb{N}$. Na mocy warunku (sup1) dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$n \leq M.$$

Zastępując w tej nierówności n przez $n + 1$ dostajemy

$$n \leq M - 1$$

dla dowolnej liczby naturalnej n . Wynika stąd że liczba $M - 1$ jest ograniczeniem górnym zbioru \mathbb{N} , co przeczy definicji kresu górnego. \square

4. Zasada Dedekinda.² Niech A, B będą takimi niepustymi zbiorami liczb rzeczywistych, że

$$(9) \quad \mathbb{R} = A \cup B$$

Rozkład zbioru \mathbb{R} określony wzorem (9) nazywamy *przekrojem*, jeżeli ma następujące własności:

- (1p) zbiory A, B nie mają elementów wspólnych,
- (2p) dla dowolnych liczb $a \in A, b \in B$ zachodzi nierówność

$$a < b.$$

Zachodzi

Twierdzenie 3 (zasada Dedekinda). *Jeżeli rozkład (9) jest przekrojem, to zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości:*

- (i) w zbiorze A istnieje liczba największa,
- (ii) w zbiorze B istnieje liczba najmniejsza.

DOWÓD. Okażemy najpierw, że warunki (i), (ii) nie mogą być spełnione jednocześnie. Gdyby bowiem tak było, to istniałaby liczba M_1 największa w zbiorze A oraz liczba M_2

¹Archimedes (287 - 212 p.n.e.), urodzony w Syrakuzach, jeden z najwybitniejszych uczonych starożytności. Zajmował się obliczaniem powierzchni figur płaskich i objętości brył, podał oszacowanie liczby π , był twórcą statyki i hydrostatyki oraz wynalazcą urządzeń mechanicznych. Rozwinał i udoskonalił stworzoną przez Eudoksosa metodę wyczerpywania.

²Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), urodzony w Brunszwiku, w 1852 r. obronił pracę doktorską z rachunku całkowego (promotorem był F. Gauss), był profesorem na uniwersytecie w Getyndze a potem na politechnice w Zurichu i w Brunszwiku. Z nazwiskiem Dedekinda związane są: podana przez niego konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych oraz pojęcia współczesnej algebry (ciało, moduł, krata, pierścień Dedekinda).

najmniejsza w zbiorze B . Z warunku (2p) wynikałoby wówczas nierówność $M_1 < M_2$, wobec czego przyjmując

$$M_0 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$$

mielibyśmy

$$M_1 < M_0 < M_2.$$

Z definicji liczb M_1 , M_2 wynikałoby zatem, że liczba M_0 nie należy do żadnego ze zbiorów A , B - co jest sprzeczne z warunkiem (9).

Udowodnimy teraz, że jeden z warunków (i), (ii) jest zawsze spełniony. Wobec warunku (2p) zbiór A jest ograniczony z góry, zatem na mocy aksjomatu kresu istnieje liczba $M = \sup A$. Z warunku (sup1) wynika

$$(10) \quad a \leq M$$

dla dowolnego $a \in A$. Podobnie dla dowolnego $b \in B$ mamy

$$(11) \quad M \leq b.$$

Przypuśćmy bowiem, że istnieje liczba $\bar{b} \in B$ spełniająca nierówność przeciwną

$$\bar{b} < M,$$

wówczas zgodnie z (2p) mamy dla dowolnego $a \in A$

$$a < \bar{b} < M.$$

Zatem liczba \bar{b} jest ograniczeniem górnym zbioru A mniejszym od M , co przeczy definicji kresu górnego. Na mocy (1p) zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości: albo $M \in A$ albo $M \in B$. W pierwszym przypadku z (10) wynika że liczba M jest największa w zbiorze A , w drugim przypadku wobec (11) liczba M jest najmniejsza w zbiorze B . \square

5. Funkcja część całkowita (entier). Dla danej liczby rzeczywistej x symbolem $[x]$ (czytamy: *część całkowita x* , bywa również używany francuski termin *entier x*) oznaczamy największą liczbę całkowitą m spełniającą nierówność

$$(12) \quad m \leq x.$$

Dla przykładu:

$$\left[\frac{5}{2}\right] = 2, \quad \left[\frac{1}{3}\right] = 0, \quad \left[-\frac{3}{2}\right] = -2.$$

Z definicji liczby $[x] = k$ wynika natychmiast nierówność

$$k \leq x < k + 1.$$

Jeżeli narysujemy oś liczbową zaznaczając na niej liczby całkowite, to z rysunku widać że zbiór \mathbb{R} daje się przedstawić jako suma rozłącznych przedziałów postaci $[m, m + 1)$ gdzie

$m \in Z$. Ustalona dowolnie liczba rzeczywista x leży zatem w jednym z tych przedziałów, przy czym jego lewy koniec ma współrzędną $[x]$.

Podana definicja liczby $[x]$ może nasuwać wątpliwości. Zauważmy, że istnienie liczby największej w danym zbiorze liczbowym (w naszym przypadku w zbiorze liczb całkowitych k spełniających nierówność (12)) nie jest bynajmniej oczywiste. Łatwo przecież podać przykład zbioru nie mającego tej własności, na przykład w przedziale $(0, 1)$ nie istnieje liczba największa. Opierając się na aksjomacie kresu udowodnimy, że przyjęta przez nas definicja liczby $[x]$ jest poprawna.

Twierdzenie 4. *W zbiorze A liczb całkowitych m spełniających warunek (12) istnieje liczba największa.*

DOWÓD. Zbiór A nie jest pusty. Gdyby bowiem dla dowolnej liczby całkowitej m zachodziła nierówność $m > x$, to przyjmując $m = -n$, $n \in \mathbb{N}$ otrzymalibyśmy jako wniosek

$$n < -x$$

dla dowolnego n naturalnego, co byłoby sprzeczne z zasadą Archimedesesa (twierdzenie 2). Ponieważ z definicji zbiór A jest ograniczony z góry, na mocy aksjomatu (14a) istnieje liczba rzeczywista $k = \sup A$. Przypuśćmy teraz, że w zbiorze A nie istnieje liczba największa. Wobec tego $k \notin A$ a ponadto z definicji kresu górnego wynika istnienie takiej liczby $m_1 \in A$, że

$$k - 1 < m_1 < k.$$

Ponieważ założyliśmy że w A nie ma liczby największej, zatem istnieje z kolei liczba $m_2 \in A$ spełniająca nierówność

$$(13) \quad k - 1 < m_1 < m_2 < k.$$

Z (13) wynika że liczba całkowita $m_2 - m_1$ spełnia nierówność

$$0 < m_2 - m_1 < 1,$$

z której wynika, że $m_2 - m_1$ jest liczbą naturalną. Jest to jednak niemożliwe. Na mocy definicji bowiem zbiór \mathbb{N} jest najmniejszym zbiorem induktywnym zawierającym liczbę 1, nie może więc należeć do niego żadna liczba z przedziału $(0, 1)$. \square

6. Liniowa gęstość zbioru liczb wymiernych. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi, $a < b$. Przy pomocy funkcji *część całkowita* łatwo skonstruować liczbę wymierną w spełniającą nierówność

$$(14) \quad a < w < b.$$

Ustalając mianowicie liczbę naturalną n oznaczmy $[na] = k$, wówczas

$$k \leq na < k + 1$$

a zatem

$$(15) \quad \frac{k}{n} \leq a < \frac{k+1}{n}$$

skąd wynika, że

$$(16) \quad \frac{k+1}{n} - a \leq \frac{1}{n}.$$

Obierzmy teraz liczbę naturalną $n > (b-a)^{-1}$ (jest to możliwe na mocy zasady Archimedesesa). Wówczas z (15), (16) wynika, że liczba $w = \frac{k+1}{n}$ spełnia nierówność (14).

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 5 (o liniowej gęstości zbioru liczb wymiernych). *W każdym przedziale otwartym $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $(a < b)$ leży co najmniej jedna liczba wymierna.*

□

7. Istnienie pierwiastka arytmetycznego z liczby dodatniej. Niech a będzie liczbą rzeczywistą dodatnią i niech $k \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy (por. §1 punkt 9), że *pierwiastkiem arytmetycznym stopnia k z liczby a* nazywamy liczbę dodatnią b taką, że $b^k = a$. W dalszym ciągu przez pierwiastek stopnia k będziemy zawsze rozumieli pierwiastek arytmetyczny, używając oznaczenia

$$b = \sqrt[k]{a}$$

lub

$$b = \sqrt{a}$$

gdy $k = 2$.

W §1 punkt 9 udowodniliśmy, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. Pierwiastek arytmetyczny może zatem nie istnieć w zbiorze liczb wymiernych. Okażemy teraz, że w zbiorze liczb rzeczywistych każda liczba dodatnia ma dokładnie jeden pierwiastek arytmetyczny.

Twierdzenie 6. *Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Do dowolnej liczby rzeczywistej $a > 0$ istnieje w zbiorze \mathbb{R} dokładnie jedna liczba $b > 0$ taka, że*

$$(17) \quad b^k = a.$$

DOWÓD. Liczba b , jeżeli istnieje, jest jedyna. Przypuśćmy bowiem, że istnieją dwie różne liczby dodatnie $b_1 < b_2$ o żądanej własności. Z reguły mnożenia wynika wówczas $b_1^k < b_2^k$, co przeczy równości (17).

W dowodzie istnienia liczby b będziemy korzystali z zasady Dedekinda (twierdzenie 3), które jak wiemy jest konsekwencją aksjomatu kresu (14a), oraz z zasady Archimedesesa (twierdzenie 2). Dla uproszczenia rachunków przyjmiemy $k = 3$ (dla innych wartości k rozumowanie jest podobne). Dowód rozbijemy na kilka punktów.

i) Niech

$$A = (-\infty, 0] \cup \{x : x > 0, x^3 < a\},$$

$$B = \{x : x > 0, x^3 \geq a\}.$$

Z definicji widać że zbiory A, B są rozłączne oraz że

$$(18) \quad \mathbb{R} = A \cup B.$$

ii) Zbiór A nie jest pusty na mocy definicji. Natomiast dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$(a + n)^3 \geq a^3 + 3a^2n \geq a$$

jeżeli obierzemy

$$n \geq \frac{a - a^3}{3a^2},$$

wobec tego również zbiór B nie jest pusty.

iii) Dla dowolnych $x \in A, y \in B$ zachodzi nierówność

$$x < y.$$

Jest to oczywiste gdy $x \leq 0$. Nierówność ta zachodzi również gdy obie liczby x, y są dodatnie, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy $x > y$ a więc $x^3 > y^3 \geq a$ wbrew założeniu że $x \in A$.

iv) W zbiorze A istnieją liczby dodatnie, np. liczby postaci $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{a}$, dla takich liczb zachodzi bowiem nierówność

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n} < a.$$

v) Z punktów i) - iii) wynika, że rozkład (18) jest przekrojem. Okażemy, że do każdej liczby $x \in A$ można dobrać $\bar{x} \in A, \bar{x} > x$ (czyli że w zbiorze A nie istnieje liczba największa). Jeżeli $x \leq 0$, to istnienie takiej liczby \bar{x} wynika z punktu iv). Załóżmy wobec tego, że $x > 0$. Mamy wówczas

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^3 = x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} + \frac{1}{n^3} <$$

$$< x^3 + \frac{w(x)}{n},$$

gdzie

$$w(x) = 3x^2 + 3x + 1 > 0.$$

Obierając

$$n > \frac{w(x)}{a - x^3},$$

co jest możliwe na mocy zasady Archimedesesa (twierdzenie 2), otrzymujemy

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^3 < a.$$

Zatem $\bar{x} = x + \frac{1}{n} \in A$.

vi) Z punktu v) wynika na mocy zasady Dedekinda (twierdzenie 3), że w zbiorze B istnieje liczba najmniejsza y_0 . Okażemy że y_0 jest szukaną liczbą b spełniającą warunek (17).

Przypuśćmy, że tak nie jest, wobec tego musi być

$$y_0^3 > a.$$

Okażemy, że przy odpowiednim wyborze liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(19) \quad \left(y_0 - \frac{1}{n}\right)^3 > a.$$

Istotnie, mamy

$$\left(y_0 - \frac{1}{n}\right)^3 > y_0^3 - \frac{3y_0^2 + 1}{n}$$

a zatem nierówność (19) jest spełniona dla

$$n > \frac{3y_0^2 + 1}{y_0^3 - a}$$

wbrew założeniu, że y_0 jest najmniejszą liczbą w zbiorze B . Musi być zatem $y_0^3 = a$, co kończy dowód. \square

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Znaleźć kres górny $M \leq \infty$ oraz kres dolny $m \geq -\infty$ następujących zbiorów:

$$A_1 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x - 3 \leq 0\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq x\}$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} : x \sin x \geq 0\} \cap [-4\pi, 2\pi)$$

$$A_5 = \{5 - n^2 : n \in \mathbb{N}\} \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$A_6 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right), n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. Udowodnić że w zbiorze liczb wymiernych należących do przedziału $(0, 1)$ nie istnieje liczba największa ani liczba najmniejsza. Porównać to stwierdzenie z aksjomatem kresu (14a) i z twierdzeniem 1.

3. Naszkicować wykres funkcji $y = [x]$.

4. Udowodnić, że \sqrt{n} ($n \in \mathbb{N}$) jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy gdy n jest kwadratem tzn. gdy $n = p^2$ gdzie $p \in \mathbb{N}$.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu o jednoznacznym rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze (por. notka §1 punkt 9).

5. Udowodnić że liczba $\sqrt{n^2 + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$) jest niewymierna.

Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 4.

6. Udowodnić twierdzenie:

Do dowolnych liczb rzeczywistych a, b ($a < b$) istnieje liczba niewymierna c taka, że

$$a < c < b.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu o liniowej gęstości zbioru liczb wymiernych i wykorzystać zadanie 5.

7. Udowodnić, że jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ spełniona jest nierówność

$$0 \leq a \leq \varepsilon$$

to $a = 0$.

Wskazówka. Zastosować twierdzenie 5.

8. Niech

$$A = (-\infty, 0) \cup \{1\}, \quad B = [0, 1) \cup (1, \infty).$$

Czy rozkład $\mathbb{R} = A \cup B$ jest przekrojem?

9. Wykazać, że liczby wymierne a, b, c spełniające warunek

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

muszą być wszystkie równe zero.

10. Wykazać, że liczba $a\sqrt{2} + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są wymierne, jest wymierna jedynie dla $a = b = 0$.

11. Mówimy, że liczba x daje się wyrazić wymiennie przez liczbę y , jeżeli istnieją wielomiany w_1, w_2 o współczynnikach wymiernych takie, że

$$x = \frac{w_1(y)}{w_2(y)}.$$

Udowodnić że

- a.) $\sqrt{2}$ nie daje się wyrazić wymiennie przez $\sqrt{3}$,
- b.) obie liczby $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ dają się wyrazić wymiennie przez $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

12. Udowodnić, że dla dowolnie ustalonego $a > 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych istnieją liczby \sqrt{a} oraz $\sqrt[4]{a}$.

Wskazówka. Przeprowadzić rozumowanie podobne jak w dowodzie twierdzenia 6.

13. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$|x| = [x].$$

Ciągi nieskończone

§1. Definicja i podstawowe własności ciągów.



1. Ciąg nieskończony jako funkcja. Niech X, Y będą zbiorami liczb rzeczywistych. Mówimy, że na zbiorze X jest określona funkcja f o wartościach w zbiorze Y , jeżeli każdej liczbie $x \in X$ została przyporządkowana liczba $y = f(x) \in Y$. Zapisujemy

$$f : X \rightarrow Y.$$

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych \mathbb{N} . Ciągi będziemy oznaczali literami a, b, c, \dots używając przy tym zapisu

$$a_n = a(n).$$

Liczbę a_n będziemy nazywali *n -tym wyrazem ciągu* zaś dla funkcji $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy używali oznaczenia $\{a_n\}$. Ciąg $\{a_n\}$ będziemy niekiedy zapisywali w postaci

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Zapis ten uwidacznia kilka początkowych wyrazów ciągu i bywa wygodny przy rozważaniu konkretnych przykładów.

Niekiedy będziemy rozważali ciągi, których n -ty wyraz jest określony nie dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ a tylko dla $n \geq k$, gdzie k jest pewną ustaloną liczbą naturalną. Czytelnik z łatwością zauważy, że wszystkie podane dalej definicje i twierdzenia stosują się również do takich ciągów. Dla przykładu - założmy, że w ciągu $\{b_n\}$ mamy

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0, \quad b_n \neq 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 4$$

i niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem. Wówczas iloraz $\frac{a_n}{b_n}$ jest określony dla $n \geq 4$.

2. Granica ciągu. Liczbę rzeczywistą g nazywamy *granica ciągu* $\{a_n\}$ jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $N \in \mathbb{R}$ taką, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

Nierówność (1) będziemy nazywali *nierównością epsilonową*. Może być ona zapisana w równoważny sposób jako nierówność podwójna

$$(2) \quad g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

(por. zadanie 4 rozdz.I §1). Z nierówności (2) wynika, że po odrzuceniu skończonej ilości początkowych wyrazów a_n ($n \leq N$) wszystkie pozostałe wyrazy ciągu $\{a_n\}$ leżą w przedziale $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ *jest zbieżny do granicy g* , zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

lub

$$a_n \rightarrow g.$$

Ciąg mający granicę nazywamy *ciągami zbieżnym*.

Przykład 1. Rozważmy ciąg stały

$$a_n = c.$$

Nierówność (1) jest spełniona dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jeżeli przyjmimy $g = c$. Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

□

Przykład 2. Niech

$$a_n = \frac{1}{n};$$

udowodnimy, że

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Nierówność epsilonowa przybiera postać

$$(4) \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Aby znaleźć liczbę N , o której mowa w definicji, rozwiążemy nierówność (4) względem n . Otrzymujemy

$$(5) \quad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

przy czym obie nierówności (4), (5) są równoważne. A zatem obierając

$$N = \frac{1}{\varepsilon}$$

widzimy, że dla $n > N$ zachodzi (4) co kończy dowód równości (3). \square

Obierzmy w szczególności

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{10}, \varepsilon_2 = \frac{1}{100}, \varepsilon_3 = \frac{7}{1000}.$$

Odpowiednie wartości liczby N wynoszą

$$N_1 = 10, N_2 = 100, N_3 = \frac{1000}{7}.$$

Widzimy więc, że zmniejszając liczbę ε (a więc zawężając przedział $\mathbb{P}_\varepsilon = (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$) musimy zwiększyć ilość wyrazów ciągu, które należy odrzucić tak, aby wszystkie pozostałe wyrazy spełniały nierówność epsilonową czyli mieściły się w przedziale \mathbb{P}_ε .

Przykład 3. Niech

$$(6) \quad a_n = (-1)^{n+1},$$

a zatem $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = -1$ ($n \in \mathbb{N}$). Ciąg (6) można inaczej zapisać w postaci

$$1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

Okażemy, że ciąg ten nie posiada granicy. Dowód przeprowadzimy przez sprowadzenie do nedorzeczności. Przypuśćmy, że istnieje liczba g będąca granicą ciągu (6). Jeżeli $g < 1$, to obierając $\varepsilon = \frac{1-g}{2}$ widzimy, że żaden wyraz a_{2n-1} nie spełnia nierówności (2), a więc g nie może być granicą. Podobnie okazujemy, że nie może być granicą żadna liczba $g \geq 1$. \square

Przykład 4. Zakładając

$$|q| < 1$$

udowodnimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Z założenia wynika, że $|q|^{-1} > 1$, wobec tego

$$|q|^{-1} = 1 + a$$

gdzie $a > 0$. Nierówność epsilonowa

$$|q^n| < \varepsilon$$

może być zapisana w postaci równoważnej jako

$$(7) \quad \frac{1}{\varepsilon} < |q|^{-n} = (1 + a)^n.$$

Z nierówności Bernoulliego mamy

$$(1 + a)^n \geq 1 + na,$$

zatem nierówność (7) będzie spełniona jeżeli

$$(8) \quad 1 + na > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Rozwiązując nierówność (8) względem n dostajemy

$$n > \frac{1 - \varepsilon}{a\varepsilon}.$$

Wobec tego przyjmując

$$N = \frac{1 - \varepsilon}{a\varepsilon}$$

widzimy, że dla $n > N$ zachodzi nierówność (7), co kończy dowód. \square

3. Ciąg ograniczony. Ciąg $\{a_n\}$ jest *ograniczony*, jeżeli istnieją liczby p, P takie, że

$$(9) \quad p \leq a_n \leq P$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg jest więc ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy zbiór jego wyrazów jest ograniczony. Podaną definicję można również sformułować następująco: ciąg $\{a_n\}$ jest *ograniczony*, jeżeli istnieje taka liczba $M > 0$, że

$$(10) \quad |a_n| \leq M$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Dowód równoważności obu sformułowań pozostawiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie 1. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

DOWÓD. Przyjmijmy $\varepsilon = 1$ w nierówności (2), wówczas istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że

$$g - 1 < a_n < g + 1$$

dla $n > k$. Oznaczając przez A największą z liczb $|a_1|, \dots, |a_k|$ mamy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$\min(-A, g - 1) \leq a_n \leq \max(A, g + 1)$$

czyli nierówność (9). \square

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 1 nie jest prawdziwe. Ciąg podany w przykładzie 3 jest ograniczony ale nie jest zbieżny.

4. Działania na granicach.

Twierdzenie 2. Załóżmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Wówczas

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ (twierdzenie o granicy sumy),
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ (twierdzenie o granicy iloczynu),
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n + db_n) = ca + db$ dla dowolnych $c, d \in \mathbb{R}$.

DOWÓD. Niech ε będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Wobec założonej zbieżności ciągów, po zastąpieniu w definicji granicy liczby ε przez $\frac{\varepsilon}{2}$, mamy

$$(11) \quad a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $n > N_1$ oraz

$$(12) \quad b - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $n > N_2$. Wobec tego dla $n > N = \max(N_1, N_2)$ zachodzą obie nierówności (11), (12). Dodając je stronami dostajemy

$$a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon$$

dla $n > N$, co daje (i). Aby udowodnić (ii) zauważmy, że

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$$

a zatem

$$(13) \quad |a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b|$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Na mocy twierdzenia 1 ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, zatem

$$(14) \quad |b_n| \leq M$$

dla pewnego $M > 0$ i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Z założenia zbieżności ciągu $\{a_n\}$ wynika, że do liczby ε można dobrać N_1 tak, by

$$(15) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

dla $n > N_1$. Podobnie, zakładając $a \neq 0$, możemy wobec zbieżności ciągu $\{b_n\}$ dobrać do liczby ε liczbę N_2 tak, by

$$(16) \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2a}$$

dla $n > N_2$. Wykorzystując (13), (14), (15), (16) otrzymujemy dla $n > N = \max(N_1, N_2)$ nierówność

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon.$$

Jeżeli $a = 0$ to ta sama nierówność wynika z (13), (14), (15) dla $n > N_1$. Punkt (ii) jest więc udowodniony. Punkt (iii) otrzymujemy wykorzystując kolejno punkty (i), (ii) oraz Przykład 1. \square

Przyjmując $c = 1$, $d = -1$ w punkcie (iii) dostajemy

Wniosek (twierdzenie o granicy różnicy). *Jeżeli*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

Twierdzenie 3 (o granicy ilorazu). *Załóżmy, że*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0.$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

DOWÓD. Wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku gdy $a_n = a = 1$ i zastosować następnie punkt (ii) twierdzenia 2. Przyjmując w definicji granicy $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ mamy

$$(17) \quad b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2}$$

dla $n \geq k$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną. Z nierówności (17) wynika, że dla takich n mamy

$$\frac{b}{2} < b_n$$

gdy $b > 0$ oraz

$$b_n < \frac{b}{2}$$

gdy $b < 0$. W obu przypadkach dla $n \geq k$

$$(18) \quad 0 < \frac{|b|}{2} < |b_n|.$$

Zatem iloraz $\frac{1}{b_n}$ jest określony dla takich n .

Obierzmy teraz dowolnie $\varepsilon > 0$. Mamy dla dowolnego $n \geq k$

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b}$$

czyli, z uwagi na (18)

$$(19) \quad \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2|b - b_n|}{b^2}.$$

Z założenia zbieżności ciągu $\{b_n\}$ wynika, że

$$(20) \quad |b - b_n| < \frac{b^2}{2} \varepsilon$$

dla $n > N$, gdzie N jest pewną liczbą dobraną do ε . Nierówności (19), (20) dają

$$|b - b_n| < \varepsilon$$

dla $n > \max(N, k)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie o granicy iloczynu można wzmocnić, jeżeli jeden z czynników jest zbieżny do zera.

Twierdzenie 4. *Iloczyn ciągu ograniczonego przez ciąg zbieżny do zera jest zbieżny do zera.*

DOWÓD. Zakładamy, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony oraz że

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Z założenia istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$(22) \quad |a_n| < M$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech ε będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Korzystając z (21) i zastępując w definicji granicy ε przez $\frac{\varepsilon}{M}$ mamy

$$(23) \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

dla $n > N$, gdzie liczba N jest dobrana do ε . Mnożąc stronami (22) i (23) otrzymujemy

$$|a_n b_n| < \varepsilon$$

dla $n > N$, co kończy dowód. □

Przykład 5. Wiemy, że ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ jest zbieżny do zera (por. Przykład 2). Ponadto ciąg $\{\cos(n\frac{\pi}{6})\}$ jest ograniczony, gdyż

$$|\cos(n\frac{\pi}{6})| \leq 1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos(n\frac{\pi}{6}) = 0.$$

5. Ciągi rozbieżne do nieskończoności. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do nieskończoności*, jeżeli do dowolnej liczby P można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(24) \quad a_n > P.$$

Zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

lub

$$a_n \rightarrow \infty.$$

Podobnie, ciąg $\{b_n\}$ jest *rozbieżny do minus nieskończoności*, jeżeli do dowolnej liczby p można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(25) \quad b_n < p.$$

Zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

lub

$$b_n \rightarrow -\infty.$$

Jeżeli ciąg jest rozbieżny do ∞ lub $-\infty$, to mówimy że ma on *granice niewłaściwą*.

Przykład 6.

a.) Ciąg

$$a_n = n^2 + 1$$

jest rozbieżny do ∞ . Aby to wykazać, należy do dowolnie ustalonego P dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność (24). Mamy

$$a_n \geq n + 1 > P$$

o ile

$$n > P - 1.$$

Wystarczy więc przyjąć $N = P - 1$. □

b.) Ciąg

$$b_n = 2 - \sqrt{n}$$

jest rozbieżny do $-\infty$, mamy bowiem

$$\sqrt{n} > q$$

o ile $n > q^2$, zaś dla takich n zachodzi nierówność

$$b_n < 2 - q.$$

Obierając dowolnie p i przyjmując $q = 2 - p$ widzimy, że nierówność (25) jest spełniona jeżeli $n > N$ gdzie

$$N = (2 - p)^2.$$

□

c.) Wykazaliśmy, że ciąg rozważany w Przykładzie 3 nie ma granicy, nie jest więc zbieżny. Łatwo sprawdzić, że nie ma on również granicy niewłaściwej. Istotnie, przyjmując $P = 2$ widzimy, że żaden wyraz ciągu nie spełnia warunku (24). Podobnie obierając $p = -2$ widzimy, że nierówność (25) nie jest spełniona dla żadnego n . □

6. Przykłady obliczania granic ciągów. Pokażemy na przykładach, w jaki sposób można zastosować twierdzenia o działaniach na granicach do obliczania granicy ciągu.

Przykład 7. Niech

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n + 1}{2 - n^2}.$$

Ciąg w liczniku

$$b_n = 3n^2 + 5n + 1$$

jest rozbieżny do ∞ , mamy bowiem dla dowolnie obranego P

$$b_n > 5n + 1 > P$$

o ile

$$n > N = \frac{P-1}{5}.$$

Natomiast ciąg w mianowniku

$$c_n = 2 - n^2$$

jest rozbieżny do $-\infty$, gdyż dla dowolnie obranego p zachodzi

$$c_n < 2 - n < p$$

jeżeli

$$n > N = 2 - p.$$

Nie możemy zatem stosować do ciągu $\{a_n\}$ twierdzenia o granicy ilorazu, gdyż ciągi w liczniku i w mianowniku nie są zbieżne. Możemy jednak przekształcić ułamek a_n , dzieląc licznik i mianownik przez n^2 , co daje

$$(26) \quad a_n = \frac{b'_n}{c'_n}$$

gdzie

$$b'_n = 3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2},$$

$$c'_n = \frac{2}{n^2} - 1.$$

Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

(por. Przykład 2), wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = 0$$

na podstawie twierdzenia o granicy iloczynu. Do ciągów $\{b'_n\}$, $\{c'_n\}$ możemy zastosować twierdzenie 2 otrzymując

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = -1.$$

Wobec tego do ciągu $\{a_n\}$ zapisanego w postaci (24) można zastosować twierdzenie 3, co daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3.$$

□

Przykład 8. Niech

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Do ciągu $\{a_n\}$ nie można zastosować twierdzenia o granicy różnicy, gdyż oba ciągi

$$c_n = \sqrt{n+1}, \quad d_n = \sqrt{n-1}$$

są rozbieżne (dowód, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

pozostawiamy Czytelnikowi). Przekształcimy wyrażenie a_n mnożąc je i dzieląc przez $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$. Po wykorzystaniu wzoru skróconego mnożenia i redukcji otrzymujemy

$$(27) \quad a_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

Korzystając z postaci (27) okażemy, że

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ustalając dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ musimy do niej dobrać N tak, aby dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(29) \quad a_n < \varepsilon$$

(ponieważ $a_n > 0$, możemy opuścić znak wartości bezwzględnej). Nierówność (29) jest równoważna nierówności

$$(30) \quad \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Ponieważ

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} > \sqrt{n},$$

nierówność (30) jest spełniona dla $n > 4\varepsilon^{-2}$. Zatem wystarczy przyjąć $N = 4\varepsilon^{-2}$, co kończy dowód stwierdzenia (28). □

Przykład 9. Niech

$$a_n = \frac{b_n + c_n}{d_n},$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_n &= 2n^2 + 1, \\ c_n &= n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right), \\ d_n &= 3n^2 + 1. \end{aligned}$$

Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty.$$

O ciągu $\{c_n\}$ udowodnimy, że nie ma on w ogóle granicy, nawet niewłaściwej. Istotnie, jego kilka początkowych wyrazów ma postać

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{5\sqrt{2}}{2}, -6, -\frac{7\sqrt{2}}{2}, 0, \dots$$

Jak łatwo sprawdzić, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$c_{4n} = 0, \quad c_{8n+2} = 8n + 2, \quad c_{8n+6} = -8n - 6.$$

Dowolnie obrana liczba $g \in \mathbb{R}$ nie może być granicą ciągu $\{c_n\}$, gdyż przyjmując $\varepsilon = 2$ widzimy, że wyrazy c_{8n+2} nie spełniają nierówności epsilonowej (2), o ile $n \geq \frac{1}{8}g$. Ciąg $\{c_n\}$ nie ma również żadnej z dwóch granic niewłaściwych, gdyż nierówność (24) dla $P > 0$ nie może być spełniona przez wyrazy c_{8n+6} , natomiast nierówności (25) dla $p < 0$ nie mogą spełniać wyrazy c_{8n+2} . Ponieważ żaden z ciągów $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ nie jest zbieżny, do ciągu $\{a_n\}$ nie można stosować twierdzeń o działaniach na granicach. Możemy jednak przekształcić wyrażenie a_n dzieląc licznik i mianownik przez n^2 . Otrzymujemy

$$a_n = \frac{b'_n + c'_n}{d'_n}$$

gdzie

$$\begin{aligned} b'_n &= 2 + \frac{1}{n^2}, \\ c'_n &= \frac{1}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right), \\ d'_n &= 3 + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d'_n = 3$$

oraz na mocy twierdzenia 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = 0.$$

Korzystając z twierdzeń o granicy sumy i granicy ilorazu dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

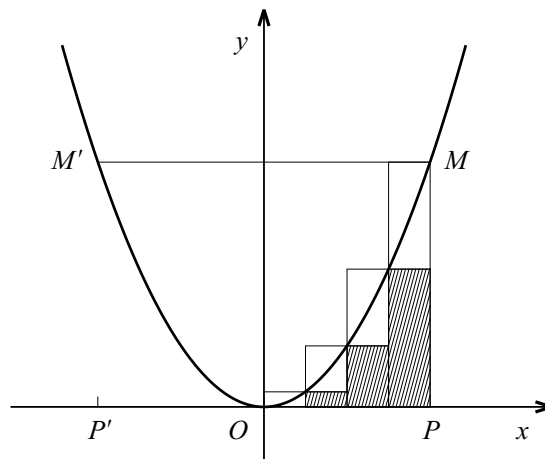
□

Przykład 10. Dana jest parabola o równaniu

$$y = ax^2 \quad (a > 0)$$

i na niej punkty $M = (x, y)$ oraz $M' = (-x, y)$. Oznaczmy przez P, P' rzuty prostopadłe na oś x -ów punktów M, M' odpowiednio. Znaleźć pole (rys. 1)

- figury OPM ograniczonej łukiem paraboli oraz odcinkami OP i PM ,
- figury $M'OM$ ograniczonej łukiem paraboli i odcinkiem MM' .



[rys. 1]

a.) Dzieląc odcinek OP na n równych części zbudujemy dwie figury R_n i Q_n złożone z prostokątów takie, że

$$R_n \subset OPM \subset Q_n$$

(na rysunku $n = 4$, figura R_n zakreskowana). Z rysunku widać, że różnica pól figury Q_n i R_n jest równa polu największego prostokąta, czyli

$$\frac{x}{n} \cdot y,$$

zatem dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$. Ponieważ

$$|R_n| < |OPM| < |Q_n|$$

(pionowe kreski oznaczają pole figury), więc

$$(31) \quad |OPM| = \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n|$$

o ile jedna z tych granic istnieje. Obliczymy drugą z nich. Pole j -tego prostokąta o podstawie $[\frac{j-1}{n}x, \frac{j}{n}x]$ i wysokości $y_j = a(\frac{j}{n}x)^2$ ($j = 1, 2, \dots, n$) wynosi

$$\frac{x}{n}y_j = a\frac{x^3}{n^3}j^2$$

zatem

$$|Q_n| = a\frac{x^3}{n^3}(1 + 4 + \dots + n^2)$$

czyli (por. zadanie 10 b.) rozdz. I §1)

$$|Q_n| = \frac{ax^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Po wykonaniu dzielenia

$$|Q_n| = \frac{ax^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

co po przejściu do granicy daje zgodnie z (31)

$$|OPM| = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}.$$

b.) Ze względu na symetrię figury OPM i $OP'M'$ mają równe pola. Pole prostokąta $P'PMM'$ wynosi $2xy$, zatem

$$|M'OM| = 2\left(xy - \frac{xy}{3}\right) = \frac{4}{3}xy.$$

Przy okazji zauważmy, że

$$|M'OM| = \frac{2}{3}|P'PMM'|.$$

Wynik ten był znany Archimedesowi. □

7. Przechodzenie do granicy w nierównościach.

Twierdzenie 5. *Jeżeli*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

oraz dla $n \geq k$ (gdzie k jest pewną liczbą naturalną) zachodzi nierówność

$$(32) \quad a_n \leq b_n$$

to

$$(33) \quad a \leq b.$$

DOWÓD. Przypuśćmy, że zachodzi nierówność przeciwna do (33)

$$b < a$$

i przyjmijmy w definicji granicy $\varepsilon = \frac{1}{4}(a - b)$. Z założenia zbieżności obu ciągów wynika istnienie liczby N (dobrej do ε) takiej, że dla $n > \max(k, N)$ zachodzą nierówności

$$b_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_n$$

co przeczy nierówności (32). □

Przykład 11. Niech

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Dla $n > 1$ ciągi te spełniają nierówność

$$a_n < b_n$$

ale mają tę samą granicę zero. □

Przykład ten wskazuje, że w twierdzeniu 5 nie można w nierównościach (32), (33) zastąpić znaku \leq przez $<$. *Przy przejściu granicznym z ostrych nierówności otrzymuje się na ogół słabe.*

Bardzo pożyteczne przy obliczaniu granic jest

Twierdzenie 6 (o trzech ciągach). *Założmy, że dla $n \geq k$ (gdzie k jest pewną liczbą naturalną) zachodzi nierówność podwójna*

$$(34) \quad a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g.$$

Wówczas ciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

Twierdzenie to można zapisać w postaci schematu

$$\begin{array}{ccc} a_n \leq & b_n \leq & c_n \\ \searrow & \Downarrow & \swarrow \\ & g & \end{array}$$

Strzałki pojedyncze oznaczają założenia, strzałka podwójna oznacza tezę twierdzenia.

DOWÓD. Niech ε będzie dowolnie obraną liczbą dodatnią. Stosując do ciągów $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ nierówność (2) mamy

$$g - \varepsilon < a_n$$

dla $n > N_1$ oraz

$$c_n < g + \varepsilon$$

dla $n > N_2$, przy czym liczby N_1, N_2 są dobrane do ε . Wobec nierówności (34) mamy zatem dla $n > \max(k, N_1, N_2)$

$$g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon$$

a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

□

Przykład 12. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(35) \quad 1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Opierając się na twierdzeniu o trzech ciągach wnioskujemy z (35), że (por. przykład 2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

□

Przykład 13. Dla $a > 0$ mamy

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Dla dowodu założmy, że $a \geq 1$. Wówczas również $\sqrt[n]{a} \geq 1$ a więc

$$(37) \quad \sqrt[n]{a} = 1 + d_n$$

gdzie $d_n \geq 0$. Podnosząc obie strony do n -tej potęgi i wykorzystując nierówność Bernoulliego (rozd. I §2) otrzymujemy

$$a = (1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n$$

skąd wynika, że

$$(38) \quad 0 \leq d_n \leq \frac{1}{n}(a - 1)$$

Do nierówności (38) możemy zastosować twierdzenie o trzech ciągach, które daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

a stąd wobec (37) wynika (36). Jeżeli $a < 1$ to mamy

$$(39) \quad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$$

gdzie $b = \frac{1}{a} > 1$. Ponieważ wiemy już, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1,$$

równość (36) dostajemy z (39) przez zastosowanie twierdzenia o granicy ilorazu. \square

Przykład 14. Okażemy, że

$$(40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie mamy $\sqrt[n]{n} \geq 1$, a zatem

$$\sqrt[n]{n} = 1 + d_n,$$

gdzie $d_n \geq 0$. Podnosząc obie strony do n -tej potęgi dostajemy

$$n = (1 + d_n)^n$$

a stąd, po rozwinięciu prawej strony według wzoru dwumianowego Newtona

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} d_n^2.$$

Wobec tego

$$(41) \quad 0 \leq d_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Przy dowolnie obranym $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$$

o ile

$$n > N = 2\varepsilon^{-2} + 1.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$$

i stosując do nierówności (41) twierdzenie o trzech ciągach dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

skąd wynika (40). □

♡ ♡ ♡

8. Prosta rozszerzona \mathbb{R}_∞ i definicja otoczeniowa granicy ciągu. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie ustalonym punktem osi liczbowej. Każdy przedział otwarty (a, b) zawierający x_0 będziemy nazywali *otoczeniem punktu x_0* . W szczególności przedział

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

o środku w x_0 i długości 2ε nazwiemy *otoczeniem epsilonowym punktu x_0* . Definicja granicy ciągu podana na początku tego paragrafu może być sformułowana w języku "geometrycznym" następująco:

Liczba g jest *granica ciągu $\{a_n\}$* , jeżeli do każdego otoczenia epsilonowego $U_\varepsilon(g)$ punktu g można dobrać N w taki sposób, by

$$a_n \in U_\varepsilon(g)$$

dla $n > N$.

Oczywiście każde otoczenie $U(g)$ punktu g zawiera w sobie pewne otoczenie epsilonowe. Wobec tego definicję granicy można sformułować w następujący, równoważny sposób:

Liczba g jest *granica ciągu $\{a_n\}$* , jeżeli do każdego otoczenia $U(g)$ można dobrać liczbę N tak, by

$$a_n \in U(g)$$

dla $n > N$.

Załóżmy teraz, że oś liczbową \mathbb{R} została uzupełniona dwoma elementami niewłaściwymi ∞ oraz $-\infty$. Rozszerzymy przy tym relację $<$ określoną w zbiorze liczb rzeczywistych przyjmując

$$-\infty < x < \infty$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy w ten sposób *oś liczbową rozszerzoną* (inaczej: *prostą rozszerzoną*) którą oznaczamy \mathbb{R}_∞ . Zatem

$$\mathbb{R}_\infty = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

(możemy sobie wyobrazić, że "punkty" ∞ oraz $-\infty$ zostały doczepione na obu "końcach" prostej \mathbb{R}). Otoczeniem $U(\infty)$ punktu ∞ nazwiemy każdy przedział (P, ∞) , podobnie przez otoczenie $U(-\infty)$ punktu $-\infty$ będziemy rozumieli każdy przedział $(-\infty, p)$. Podaną poprzednio definicję granicy niewłaściwej możemy teraz następująco sformułować:

Ciąg $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do ∞* , jeżeli do każdego otoczenia $U(\infty)$ można dobrać N tak, by

$$a_n \in U(\infty)$$

dla $n > N$.

Ciąg $\{b_n\}$ jest *rozbieżny do $-\infty$* , jeżeli do każdego otoczenia $U(-\infty)$ można dobrać N tak, by

$$b_n \in U(-\infty)$$

dla $n > N$.

Korzystając z pojęcia osi liczbowej rozszerzonej możemy teraz podać jednolitą definicję granicy:

Ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ma granicę $g \in \mathbb{R}_\infty$ (a więc być może niewłaściwą), jeżeli do każdego otoczenia $U(g)$ można dobrać liczbę N tak, by

$$a_n \in U(g)$$

dla $n > N$.

Zadania.

1. Udowodnić, że ciąg nieskończony może mieć co najwyżej jedną granicę (właściwą lub niewłaściwą).

Wskazówka. Zaprzeczając tezę i obierając odpowiednio ε w nierówności (1) dojść do sprzeczności.

2. Znaleźć liczbę N taką, że dla $n > N$ zachodzi nierówność (1), jeżeli

$$\text{a.) } a_n = \frac{2n}{3n+1}, \quad g = \frac{2}{3}, \quad \text{b.) } a_n = 3^{-2n}, \quad g = 0$$

przyjmując

$$\varepsilon = 0,1; \quad \varepsilon = 0,01; \quad \varepsilon = 500^{-1}.$$

Napisać pięć pierwszych wyrazów każdego z tych ciągów.

3. Opierając się na definicji granicy ciągu udowodnić, że

$$\text{a.) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{5n+1} = \frac{1}{5}, \quad \text{b.) } \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{-n^2+1} = 0.$$

4. Zakładając

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

udowodnić, że ciąg

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

(zwany *przeplatanką* ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$) jest również zbieżny do granicy g .

5. Udowodnić, że ciąg

$$a_n = n^4 - 2n^2 - 3n + 2$$

jest rozbieżny do $+\infty$.

6. Niech

$$a_n = (n^2 - 4n - 5)^{-1}.$$

Zbadać

- a.) dla jakich n określony jest n -ty wyraz ciągu,
- b.) dla jakich n zachodzi nierówność

$$(42) \quad a_n > 0.$$

Obliczyć granicę ciągu $\{a_n\}$. Czy nierówność (42) zachowuje się po przejściu do granicy?

7. Udowodnić, że następujące ciągi są zbieżne do granicy g :

- a.) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad g = 0,$
- b.) $b_n = \frac{(-1)^n + n + 3}{n+2}, \quad g = 1,$
- c.) $c_n = (-1)^{n^2+2}(n^2+5)^{-1}, \quad g = 0,$
- d.) $d_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}, \quad g = \frac{1}{2}.$

Wskazówka. Przy badaniu ciągu $\{d_n\}$ wykorzystać zadanie 10 rozdz. I §1.

8. Zakładając, że $0 < a < b$ określimy ciągi

- (i) $a_1 = a, a_2 = b, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \quad \text{dla } n > 1,$
- (ii) $g_1 = a, g_2 = b, g_{n+1} = \sqrt{g_n \cdot g_{n-1}} \quad \text{dla } n > 1,$
- (iii) $h_1 = a, h_2 = b, h_{n+1} = \frac{2h_n \cdot h_{n-1}}{h_n + h_{n-1}} \quad \text{dla } n > 1.$

Udowodnić, że każdy z tych ciągów jest ograniczony i podać najmniejszy przedział, w którym leżą jego wyrazy.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 7 rozdz. I §1.

9. Zakładając, że

$$0 < a < b, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

określimy ciąg $\{w_n\}$ następująco

$$\begin{aligned} w_1 &= a, & w_2 &= b, \\ w_{n+1} &= \alpha w_{n-1} + \beta w_n & \text{dla } n > 1. \end{aligned}$$

Udowodnić, że ciąg ten jest ograniczony i podać najmniejszy przedział w którym leżą jego wyrazy począwszy od $n = 3$.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 8 rozdz. I §1. Rozważyć oddzielnie przypadek, gdy jedna z liczb α, β jest zerem.

10. Udowodnić, że

$$\begin{aligned} \text{a.) } & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin(n\sqrt{2}\pi) = 0 \\ \text{b.) } & \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n^2\pi)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0. \end{aligned}$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 4.

11. Niech

$$a_{nm} = [\cos(n!\pi x)]^{2m}.$$

Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} \right) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych.} \end{cases}$$

12. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \sqrt[n]{1 + 5^n}, \quad b_n = \sqrt[n]{2^{-n} + 3^{-n}},$$

$$c_n = \sqrt[n]{2 + \sin \frac{n\pi}{2}}.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie o trzech ciągach i przykład 13.

13. Okazać, że następujące ciągi nie mają granicy, nawet niewłaściwej:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 + (-1)^n}{n} + [1 - (-1)^n]n, \\ b_n &= (-1)^n n^2, \quad c_n = \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

14. Udowodnić twierdzenie:

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do nieskończoności, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

15. Udowodnić, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do ∞ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = \begin{cases} \infty & \text{dla } c > 0, \\ -\infty & \text{dla } c < 0. \end{cases}$$

16. Zbadać zachowanie się ciągu

$$a_n = q^n$$

w zależności od liczby q , zakładając że $|q| \geq 1$.

17. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{2n} + a^{4n}}.$$

Wskazówka. Rozróżnić przypadki $0 < a < 1$ oraz $a \geq 1$ i zastosować twierdzenie o trzech ciągach oraz przykład 13.

18. Niech

$$A = \max(a_1, \dots, a_p)$$

gdzie a_j ($j = 1, \dots, p$) są liczbami dodatnimi. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n} = A.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie o trzech ciągach i wykorzystać przykład 13.

19. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{1^k + 2^k + \dots + n^k}$$

gdzie k jest daną liczbą całkowitą.

Wskazówka. Rozróżnić przypadki $k > 0$, $k < 0$, $k = 0$. Wykorzystać twierdzenie o trzech ciągach i przykład 14.

20. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{c_n}}$$

gdzie

$$c_n = (-1)^n.$$

Wskazówka - jak w zadaniu 18.

21. Niech

$$w_n = \frac{p_n}{q_n}$$

będzie ułamkiem nieskracalnym (p_n całkowite, q_n naturalne). Zakładamy, że ciąg $\{w_n\}$ jest zbieżny do liczby niewymiernej. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = 0.$$

Wskazówka. Z zaprzeczenia tezy wywnioskować, że w ciągu $\{w_n\}$ występuje nieskończenie wiele wyrazów jednakowych.

22. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Wskazówka. Posługując się metodą indukcji udowodnić najpierw nierówność

$$\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

23. Udowodnić, że jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

gdzie a jest liczbą dodatnią, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Wskazówka. Udowodnić najpierw, że ciąg $\{\sqrt{a_n}\}$ jest dobrze określony dla dostatecznie dużych n . Następnie odpowiednio przekształcić i oszacować różnicę $\sqrt{a_n} - \sqrt{a}$.

24. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Wskazówka. Przekształcić odpowiednio wyrażenia a_n , b_n , c_n i zastosować zadanie 23.

25. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie o trzech ciągach, wykorzystując zadanie 24.

26. Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

Wskazówka. Po odpowiednim przekształceniu wyrażenia a_n wykorzystać zadanie 23.

27. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = 10^{10/n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \sqrt{10n}.$$

Wskazówka. Po odpowiednim przekształceniu wyrażenia a_n wykorzystać przykład 13 i zadanie 23.

28. Dla jakich wartości parametru a ciąg

$$u_n = \frac{n^a}{\sqrt[3]{n^{a^2} + n^{a+1} + n^2}}$$

jest zbieżny? W przypadku zbieżności podać granicę.

Wskazówka. Niech

$$A(a) = \max\left(\frac{2}{3}, \frac{a+1}{3}, \frac{a^2}{3}\right)$$

(por. zadanie 3 rozdz. I §1). Zacząć od sporządzenia wykresu funkcji

$$y = A(a),$$

następnie oszacować u_n z góry i z dołu.

§2. Dalsze własności ciągów.



1. Ciągi monotoniczne i ciągi ograniczone. Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy

rosnącym, jeżeli $a_n \geq a_k$ dla $n > k$;

ściśle rosnącym, jeżeli $a_n > a_k$ dla $n > k$;

malejącym, jeżeli $a_n \leq a_k$ dla $n > k$;

ściśle malejącym, jeżeli $a_n < a_k$ dla $n > k$.

Ciągi (ściśle) rosnące i malejące obejmujemy wspólną nazwą ciągów (*ściśle*) *monotonicznych*.

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy

ograniczonym z góry, jeżeli istnieje liczba P taka, że

$$a_n \leq P$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$;

ograniczonym z dołu, jeżeli istnieje liczba p taka, że

$$a_n \geq p$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Ciąg jest *ograniczony* (por. §1) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony z góry i z dołu. Liczbę P nazywamy *ograniczeniem górnym* a liczbę p *ograniczeniem dolnym* ciągu $\{a_n\}$.

2. Zstępujące ciągi przedziałów. Niech $\{\mathbb{I}P_n\}$ będzie ciągiem przedziałów na osi liczbowej. Mówimy, że ciąg $\{\mathbb{I}P_n\}$ jest ciągiem *zstępującym*, jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{I}P_{n+1} \subset \mathbb{I}P_n.$$

Oznaczając przez a_n, b_n końce przedziału $\mathbb{I}P_n$ ($a_n \leq b_n$) widzimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący, zaś ciąg $\{b_n\}$ jest malejący.

Twierdzenie 1 (Ascoliego).¹ *Każdy ciąg zstępujący przedziałów domkniętych ma niepustą część wspólną.*

DOWÓD. Należy okazać, że istnieje punkt na osi liczbowej należący do każdego przedziału $\mathbb{I}P_n$.

Zauważmy najpierw, że przy dowolnie ustalonym $m \in \mathbb{N}$ zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nierówność

$$(1) \quad a_n \leq b_m.$$

¹Giulio Ascoli (1843 -1896), matematyk włoski.

Mamy bowiem dla $n > m$

$$\mathbb{I}_n \subset \mathbb{I}_m,$$

a więc

$$a_n \leq b_n \leq b_m$$

ponieważ ciąg $\{b_n\}$ jest malejący. Natomiast dla $n = 1, 2, \dots, m$ zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq b_m$$

ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący.

Niech teraz

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Z nierówności (1) wynika, że ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym z góry (na przykład przez liczbę b_1). Wobec tego zbiór A jest ograniczony z góry, zatem na mocy aksjomatu kresu ma kres górny

$$x_0 = \sup A.$$

Zgodnie z definicją kresu górnego liczba x_0 jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A , stąd

$$a_n \leq x_0$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz, wobec (1)

$$x_0 \leq b_m$$

dla dowolnie obranego $m \in \mathbb{N}$. Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq x_0 \leq b_n.$$

Ponieważ z założenia \mathbb{I}_n jest przedziałem domkniętym, ostatnia nierówność oznacza, że $x_0 \in \mathbb{I}_n$. \square

Uwaga. Twierdzenie 1 przestaje być prawdziwe, jeżeli opuścimy założenie że przedziały \mathbb{I}_n są domknięte. Niech bowiem

$$\mathbb{I}_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

wówczas $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, a więc

$$\mathbb{I}_{n+1} \subset \mathbb{I}_n$$

ale nie istnieje liczba $x \in \mathbb{R}$ spełniająca nierówność

$$0 < x < \frac{1}{n}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

3. Ciągi wybrane, podciągi i twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych, zaś $\{n_k\}$ ciągiem liczb naturalnych rosnącym do nieskończoności przy $k \rightarrow \infty$. Wówczas ciąg

$$(2) \quad b_k = a_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

nazywamy *ciągiem wybranym z ciągu* $\{a_n\}$.

Przykład 1. Niech $\{n_k\}$ ma postać

$$4, 2, 8, 6, 12, 10, \dots$$

czyli

$$n_k = \begin{cases} 2k + 2 & \text{gdy } k = 2r - 1, \\ 2k - 2 & \text{gdy } k = 2r, \end{cases}$$

gdzie $r \in \mathbb{N}$. Obierając dowolnie liczbę P mamy

$$n_k > P$$

dla $k > \frac{1}{2}P + 1$, zatem $n_k \rightarrow \infty$ przy $k \rightarrow \infty$ i wobec tego ciąg $\{b_k\}$ określony wzorem (2) jest ciągiem wybranym z ciągu $\{a_n\}$. Ma on postać

$$a_4, a_2, a_8, a_6, a_{12}, a_{10}, \dots$$

(jak łatwo zauważyć, ciąg $\{b_k\}$ powstaje w następujący sposób: z ciągu $\{a_n\}$ wybieramy tylko wyrazy o numerach parzystych, łączymy je parami i przestawiamy kolejność w obrębie każdej pary). \square

Twierdzenie 2. *Jeżeli*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

gdzie

$$-\infty \leq g \leq \infty,$$

to każdy ciąg wybrany z ciągu $\{a_n\}$ ma tę samą granicę g .

DOWÓD. Załóżmy, że $g \in \mathbb{R}$, wówczas do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ zachodzi nierówność epsilonowa

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Ponieważ $n_k \rightarrow \infty$, do liczby N można z kolei dobrać K tak, by dla $k > K$ zachodziła nierówność

$$n_k > N.$$

Zatem

$$|b_k - g| < \varepsilon$$

dla $k > K$, przy czym liczba K została dobrana do ε - a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_k = g.$$

Dowód twierdzenia w przypadku granicy niewłaściwej $g = \infty$ lub $g = -\infty$ pozostawiamy Czytelnikowi. \square

Udowodnimy teraz

Lemat. Jeżeli $\{n_k\}$ jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to

$$(3) \quad n_k \geq k$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

DOWÓD przeprowadzimy metodą indukcji. Dla $k = 1$ nierówność (3) jest oczywista. Zakładając, że jest prawdziwa dla pewnego k , dostajemy

$$n_{k+1} > n_k \geq k$$

czyli

$$n_{k+1} \geq k + 1,$$

co kończy dowód indukcyjny. □

Jeżeli ciąg $\{n_k\}$ jest ściśle rosnący, to ciąg (2) nazywamy *podciągiem ciągu* $\{a_n\}$. Z udowodnionego lematu wynika, że podciąg jest szczególnym przypadkiem ciągu wybranego. Jako wniosek z twierdzenia 2 dostajemy

Twierdzenie 3 (o podciągach). Jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

gdzie

$$-\infty \leq g \leq \infty,$$

to każdy podciąg ciągu $\{a_n\}$ ma tę samą granicę g . □

Przykład 2. Rozważmy ciąg

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Przyjmując

$$n_k = 2k$$

dostajemy podciąg ciągu $\{a_n\}$ złożony z jego wyrazów o numerze parzystym. Ma on postać

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots, \frac{1}{4^k}, \dots$$

Przyjmując natomiast

$$n_k = 2k - 1$$

otrzymujemy podciąg ciągu $\{a_n\}$ złożony z jego wyrazów o numerze nieparzystym

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{32}, \dots, -\frac{1}{2^{2k-1}}, \dots$$

Twierdzenie o podciągach daje wygodną metodę dowodzenia, że dany ciąg nie ma granicy. Wystarczy w tym celu wybrać z niego dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Przykład 3. Wykazaliśmy, (por. Przykład 3 §1) że ciąg

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

nie ma granicy. Udowodnimy to ponownie, opierając się na twierdzeniu 2. Mamy dla $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n-1} = 1, \quad a_{2n} = -1$$

zatem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= -1. \end{aligned}$$

Z ciągu $\{a_n\}$ wybraliśmy dwa podciągi (podciąg wyrazów nieparzystych i podciąg wyrazów parzystych) zbieżne do różnych granic. Wobec tego ciąg $\{a_n\}$ nie ma granicy, nawet niewłaściwej. \square

Przykład 4. Niech dla $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n} = n, \quad a_{2n-1} = 1.$$

Ciąg $\{a_n\}$ wygląda następująco

$$1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, \dots$$

Podciąg złożony z wyrazów parzystych jest rozbieżny do ∞ , natomiast podciąg wyrazów nieparzystych ma granicę 1 jako ciąg stały. Zatem ciąg $\{a_n\}$ nie ma granicy. \square

Przykład 5. Rozważmy ciąg $\{a_n\}$ określony następująco

$$a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{n}, \quad a_{2n} = 1 - \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg ten jest ograniczony gdyż dla każdego naturalnego n mamy

$$-1 \leq a_n \leq 1.$$

Możemy z niego wybrać dwa podciągi zbieżne, bowiem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} &= -1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= 1 \end{aligned}$$

(ponieważ granice te są różne, ciąg $\{a_n\}$ nie może być zbieżny). Podobnie ciąg podany w Przykładzie 3 jest ograniczony i można z niego wybrać dwa podciągi zbieżne $\{a_{2n-1}\}$ oraz $\{a_{2n}\}$. \square

Zaobserwowane w Przykładzie 5 fakty nie są przypadkowe, zachodzi bowiem

Twierdzenie 4 (Bolzano² -Weierstrassa)³ *Z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.*

DOWÓD. Z założenia istnieją liczby p, P takie, że wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$ leżą w przedziale $\mathbb{I}_0 = [p, P]$. Jeżeli podzielimy przedział \mathbb{I}_0 na połowy, to przynajmniej jedna z nich zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Niech \mathbb{I}_1 będzie połową o tej własności i niech n_1 oznacza najmniejszą z liczb k takich, że $a_k \in \mathbb{I}_1$. Podzielmy następnie przedział \mathbb{I}_1 na połowy, przez \mathbb{I}_2 oznaczmy tę połowę, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu i wybierzmy liczbę naturalną n_2 jako najmniejszą z liczb $k > n_1$ takich, że $a_k \in \mathbb{I}_2$. Powtarzając opisane postępowanie otrzymujemy ciąg zstępujący przedziałów domkniętych $\{\mathbb{I}_k\}$ i ciąg rosnący liczb naturalnych $\{n_k\}$ takich, że

$$(4) \quad a_{n_k} \in \mathbb{I}_k,$$

przy czym długość przedziału \mathbb{I}_k wynosi $\frac{a}{2^k}$, gdzie $a = P - p$. Na mocy twierdzenia Ascoliego istnieje liczba x_0 taka, że

$$(5) \quad x_0 \in \mathbb{I}_k$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Z warunków (4), (5) wynika nierówność

$$(6) \quad |a_{n_k} - x_0| \leq \frac{a}{2^k}.$$

Ponieważ (por. lemat w punkcie 3)

$$(7) \quad 2^k \geq k$$

więc z (6), (7) wynika nierówność ε -owa

$$|a_{n_k} - x_0| < \varepsilon$$

dla $k > N = \frac{a}{\varepsilon}$. Zatem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x_0,$$

co kończy dowód. □

4. Twierdzenie o ciągu monotonicznym. Opierając się na twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa udowodnimy

²Bernard Bolzano (1781 - 1848), urodzony w Pradze, w 1804 r. został profesorem matematyki i nauczycielem religii na Uniwersytecie Karola w Pradze. Władze austriackie usunęły go z katedry z przyczyn światopoglądowych, zabraniając jednocześnie publikowania jego prac. Część tych prac wydano dopiero w XX wieku. Zajmował się analizą matematyczną i logiką. Był prekursorem wielu twierdzeń analizy matematycznej, odkrywanych później przez innych matematyków.

³Karol Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897), urodzony w Ostenfeld (Westfalia). Po nieudanych studiach prawniczych rozpoczął w 1839 r. studia matematyczne w Akademii w Münster, po ich ukończeniu pracował jako nauczyciel gimnazjalny. Równocześnie zajmował się matematyką, co doprowadziło go do uzyskania stopnia doktora w 1854 r. W latach 1856 - 1890 był profesorem na Uniwersytecie Przemysłowym w Berlinie, w 1856 r. został członkiem Berlińskiej Akademii Nauk. Zajmował się teorią funkcji zmiennej rzeczywistej i zmiennej zespolonej oraz teorią szeregów nieskończonych. Jego wykłady przyciągały licznych słuchaczy i często zawierały nigdy później nie publikowane przez niego nowe wyniki.

Twierdzenie 5. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

DOWÓD. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem spełniającym założenia twierdzenia. Dla ustalenia uwagi założymy, że jest on rosnący (dla ciągu malejącego dowód oparty jest na takim samym rozumowaniu). Na mocy twierdzenia 3 istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do pewnej granicy $g \in \mathbb{R}$. Wobec tego przy dowolnie ustalonym $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna l taka, że dla $k \geq l$ zachodzi nierówność

$$(8) \quad g - \varepsilon < a_{n_k} < g + \varepsilon.$$

Ponieważ $n_k \geq k$ (por. lemat w punkcie 3), więc

$$a_{n_k} \geq a_k$$

zatem z nierówności (8) wynika, że

$$(9) \quad a_k < g + \varepsilon$$

dla $k \geq l$. Oprócz tego dla $k \geq n_l$ mamy

$$a_k \geq a_{n_l}$$

a więc na mocy (8)

$$(10) \quad g - \varepsilon < a_k.$$

Obie nierówności (9), (10) zachodzą dla

$$k \geq \max(l, n_l) = n_l,$$

a to oznacza, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = g.$$

□

5. Liczba e. Twierdzenie 4 daje metodę dowodzenia zbieżności ciągu. Zastosujemy ją do ciągu

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(i) Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona dostajemy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$(11) \quad d_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

oraz

$$(12) \quad \begin{aligned} d_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &> \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}. \end{aligned}$$

Okażemy, że

$$(13) \quad d_{n+1} \geq d_n.$$

Wobec (11), (12) wystarczy w tym celu okazać, że nierówność

$$(14) \quad \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \geq \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

zachodzi dla $0 \leq k \leq n$. Dla $k = 0, 1$ obie strony nierówności (14) są równe 1. Dla $2 \leq k \leq n$ mamy

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k},$$

czyli po wykonaniu dzielenia

$$(15) \quad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

natomiast po podobnym przekształceniu

$$(16) \quad \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Ponieważ dla $j = 1, 2, \dots, k-1$ mamy

$$1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}$$

więc z (15), (16) wynika (14). Udowodniona nierówność (13) oznacza, że ciąg $\{d_n\}$ jest *rosnący*.

(ii) Aby udowodnić, że ciąg $\{d_n\}$ jest *ograniczony* wystarczy okazać, że jest on ograniczony z góry (ograniczeniem dolnym jest pierwszy wyraz ciągu d_1). Oprzemy się na znanym z kursu szkolnego wzorze

$$(17) \quad 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1),$$

który sprawdzamy łatwo mnożąc obie strony przez mianownik. Zgodnie z (11), (15) mamy

$$d_n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}},$$

gdym

$$k! \geq 2^{k-1}$$

dla $k \geq 2$. Wobec tego stosując równość (17) dla $q = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$d_n \leq 3,$$

co kończy punkt (ii).

Okazaliśmy, że ciąg $\{d_n\}$ jest rosnący i ograniczony. Na podstawie twierdzenia 5 jest on zbieżny, jego granicę oznaczamy przez e . Przyjmujemy więc jako definicję liczby e równość

$$(18) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z nierówności

$$2 = d_1 \leq d_n \leq 3$$

dostajemy po przejściu do granicy

$$2 \leq e \leq 3.$$

Można udowodnić, że liczba e jest niewymierna. Podamy bez dowodu, że

$$2,71 < e < 2,72.$$

Przykład 6. Udowodnimy, że

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Mamy

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{a_n},$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Równość (19) otrzymujemy stosując twierdzenia o działaniach na granicach i korzystając z (18). \square

6. Warunek Cauchy'ego. Ciąg $\{a_n\}$ spełnia *warunek Cauchy'ego*⁴ jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, by dla $n, k > N$ zachodziła nierówność

$$|a_n - a_k| < \varepsilon.$$

Przykład 7. Mając dane dwie różne liczby rzeczywiste a, b określimy ciąg $\{u_n\}$ następująco:

$$(20) \quad \begin{aligned} u_1 &= a, & u_2 &= b, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_n) \quad \text{dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Aby okazać, że ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego zaczniemy od oszacowania różnicy dwóch sąsiednich wyrazów. Mamy

$$(21) \quad |u_2 - u_1| = |b - a|.$$

Udowodnimy metodą indukcji, że

$$(22) \quad |u_{n+1} - u_n| = \frac{|b - a|}{2^{n-1}}.$$

Dla $n = 1$ równość (22) ma postać (21). Zastępując w (21) liczbę n przez $n + 1$ mamy

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - u_{n+1}| &= \left| \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) - u_{n+1} \right| = \\ &= \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|, \end{aligned}$$

a stąd przyjmując (22) jako założenie indukcyjne dostajemy tezę indukcyjną w postaci

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \frac{|b - a|}{2^n}.$$

Równość (22) jest zatem prawdziwa dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Aby oszacować różnicę dwóch dowolnych wyrazów ciągu przyjmiemy $k = n + p$, wówczas

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n+p}| &\leq \\ &\leq |u_n - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p-1} - u_{n+p}| \end{aligned}$$

⁴Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), wybitny matematyk francuski. Po ukończeniu w 1810 r. szkoły inżynierskiej (École Polytechnique) prowadził samodzielnie badania matematyczne, zostając w 1815 r. profesorem matematyki w École Polytechnique. W 1830 r. ze względów politycznych opuścił Francję, wykładając następnie w Turynie a później w Pradze, po powrocie w 1838 r. do Paryża wykładał na Sorbonie. Pozostawił około 500 prac z zakresu matematyki, mechaniki i astronomii.

skąd na mocy (22)

$$|u_n - u_{n+p}| \leq \frac{|b-a|}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right).$$

Stosując do prawej strony wzór (17) otrzymujemy

$$(23) \quad |u_n - u_{n+p}| \leq \frac{|b-a|}{2^{n-2}}.$$

Ponieważ $2^{n-2} \geq n-2 > 0$ dla $n \geq 3$, więc przyjmując

$$N = \frac{|b-a|}{\varepsilon} + 2$$

dostajemy z (23)

$$|u_n - u_{n+p}| < \varepsilon$$

dla $n > N$ i dowolnego $p \in \mathbb{N}$. Wracając do oznaczenia $n+p = k$ widzimy, że

$$|u_n - u_k| < \varepsilon$$

dla $n, k > N$. Zatem ciąg $\{u_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. \square

Twierdzenie 6 (Cauchy'ego). *Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

DOWÓD. Udowodnimy najpierw, że warunek Cauchy'ego jest warunkiem koniecznym zbieżności ciągu. Zakładając, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

i obierając dowolnie $\varepsilon > 0$ mamy dla $n, k > N$

$$|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

a stąd

$$|a_n - a_k| \leq |a_n - g| + |g - a_k| < \varepsilon.$$

Aby udowodnić dostateczność warunku Cauchy'ego założmy, że jest on spełniony dla ciągu $\{a_n\}$ i przyjmijmy $\varepsilon = 1$. Na mocy założenia istnieje liczba N_1 taka, że

$$(24) \quad |a_n - a_k| < 1$$

dla $n, k > N_1$. Ustalając $k = k_1$ możemy nierówność (24) zapisać w postaci

$$-1 + a_{k_1} < a_n < 1 + a_{k_1}.$$

Przyjmując

$$\max_{n \leq N_1} |a_n| = A$$

mamy zatem dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$\min(-1 + a_{k_1}, -A) \leq a_n \leq \max(1 + a_{k_1}, A)$$

a to oznacza, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony. Wobec tego opierając się na twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa możemy z ciągu $\{a_n\}$ wybrać podciąg zbieżny $\{a_{n_k}\}$. Niech

$$(25) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = g.$$

Opierając się na warunku Cauchy'ego udowodnimy, że g jest granicą ciągu $\{a_n\}$. Mamy

$$|a_n - g| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g|.$$

Niech ε będzie dowolnie obraną liczbą dodatnią. Wobec (25) istnieje liczba N_2 taka, że dla $k > N_2$

$$(26) \quad |a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

natomiast z warunku Cauchy'ego wynika istnienie liczby N_3 takiej, że dla $n_k, n > N_3$ zachodzi nierówność

$$(27) \quad |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ $n_k \geq k$ (por. lemat w punkcie 3), więc dla $n, k > N = \max(N_2, N_3)$ zachodzą obie nierówności (26), (27) a z nich wynika

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

dla $n > N$. Okazaliśmy zatem, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g.$$

□

Przy pomocy dość prostych rachunków wykazaliśmy, że ciąg rozważany w przykładzie 7 spełnia warunek Cauchy'ego - zatem zgodnie z twierdzeniem 6 jest to ciąg zbieżny. Mamy więc dowód istnienia granicy ciągu $\{u_n\}$, ale nie znamy jej wartości liczbowej. Obliczenie tej ostatniej wymaga nieco dłuższego rozumowania (por. zadanie 16).

W dowodzie dostateczności warunku Cauchy'ego oparliśmy się na twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa, które udowodniliśmy poprzednio opierając się na twierdzeniu Ascoliego. W dowodzie twierdzenia Ascoliego wykorzystaliśmy aksjomat kresu. Ostatecznie więc fakt, że z warunku Cauchy'ego wynika zbieżność ciągu, jest konsekwencją aksjomatu kresu, który jak wiemy opisuje istotną własność zbioru liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Pokażemy na przykładzie, że twierdzenie Cauchy'ego (a ściślej jego druga część - dostateczność warunku Cauchy'ego) nie jest prawdziwe jeżeli zbiór \mathbb{R} zastąpimy przez zbiór Q liczb wymiernych.

Przykład 8. Niech a będzie liczbą niewymierną i niech w_n będzie liczbą wymierną spełniającą nierówność

$$(28) \quad a + \frac{1}{2^{n+1}} < w_n < a + \frac{1}{2^n}$$

(liczba taka istnieje zgodnie z twierdzeniem 5 rozdz. I §2). Ponieważ (por. Przykład 3 §1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

stosując do nierówności (28) twierdzenie o trzech ciągach dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a.$$

Ciąg $\{w_n\}$ nie ma więc granicy w zbiorze liczb wymiernych. Natomiast spełnia on warunek Cauchy'ego, gdyż dla dowolnych $n, p \in \mathbb{N}$

$$|w_n - w_{n+p}| \leq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p+1}} < \frac{1}{2^n}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

więc

$$|w_n - w_{n+p}| < \varepsilon$$

dla $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$ i dowolnego $p \in \mathbb{N}$. □

♡ ♡ ♡

7*. Ułamki łańcuchowe. Dla ustalonej liczby rzeczywistej x utworzmy ciąg

$$(29) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{x - [x]}, \\ x_2 &= \frac{1}{x_1 - [x_1]}, \\ &\dots \\ x_n &= \frac{1}{x_{n-1} - [x_{n-1}]} \\ &\dots \end{aligned}$$

(przypominamy, że $[x]$ oznacza część całkowitą x - por. rozdz. I §2). Oczywiście liczba x_n jest poprawnie zdefiniowana tylko wtedy, gdy mianownik ułamka nie jest zerem tzn. gdy

x_{n-1} nie jest liczbą całkowitą. Z równości (29) otrzymujemy natychmiast

$$(30) \quad \begin{aligned} x &= [x] + \frac{1}{x_1} \\ x_1 &= [x_1] + \frac{1}{x_2} \\ &\dots \\ x_{n-1} &= [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n} \\ &\dots \end{aligned}$$

przy czym $x_j > 1$ dla dowolnego j .

Jeżeli x jest liczbą wymierną, to liczby x_1, x_2, \dots są również wymierne. Przypuśćmy, że dla pewnego j

$$x_j = \frac{p}{q}$$

nie jest liczbą całkowitą. Wówczas

$$x_j - [x_j] = \frac{k}{q}$$

gdzie $1 \leq k < q$, zatem na mocy (29)

$$x_{j+1} = \frac{q}{k}.$$

Widzimy więc, że mianowniki liczb x_j tworzą ciąg ściśle malejący. Wynika stąd, że jeżeli

$$x = \frac{l}{m} \quad (l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N})$$

jest ułamkiem nieskracalnym, to istnieje liczba n ($1 \leq n < m$) taka, że ciąg (29) jest ciągiem skończonym złożonym z wyrazów x_1, x_2, \dots, x_n , przy czym x_n jest liczbą całkowitą. Przyjmując oznaczenia

$$(31) \quad a_0 = [x], \quad a_j = [x_j] \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n$$

otrzymujemy z (30) kolejno

$$\begin{aligned}
 x &= a_0 + \frac{1}{x_1}, \\
 x &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}, \\
 x &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+ \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Każde z wyrażeń występujących po prawej stronie we wzorach (32) nazywamy *ułamkiem łańcuchowym skończonym*, zaś liczby a_j ($j = 1, 2, \dots$) jego *mianownikami*. Z ostatniego ze wzorów (32) wynika, że każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego o mianownikach naturalnych. Oczywiście z postaci prawej strony widać, że własność tą mają tylko liczby wymierne.

Przykład 9. Niech $x = \frac{25}{7}$, zatem

$$x = 3 + \frac{4}{7}$$

i ze wzorów (29) dostajemy

$$x_1 = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}, \quad x_3 = 3.$$

Mianowniki liczb x_j ($j = 1, 2, 3$) tworzą ciąg ściśle malejący 4, 3, 1, przy czym $n = 3$.

Wzory (30) przyjmują postać

$$\begin{aligned}x &= 3 + \frac{1}{x_1}, \\x_1 &= 1 + \frac{1}{x_2}, \\x_2 &= 1 + \frac{1}{x_3}, \\x_3 &= 3,\end{aligned}$$

skąd wynika rozkład liczby x na ułamek łańcuchowy

$$x = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

- zgodnie ze wzorami (31), (32).

Załóżmy teraz, że x jest liczbą niewymierną. Ze wzorów (29) wnioskujemy, że liczby $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ są również niewymierne, wobec tego mianowniki po prawej stronie nie znikają i wyrażenie x_n jest dobrze określone dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $\{x_n\}$ jest teraz ciągiem nieskończonym. Postępując podobnie jak w przypadku x wymiernego dostajemy odpowiednik wzorów (32) w postaci

$$(33) \quad x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{x_n}}}}}$$

Nasuwa się myśl, by przyjmując oznaczenia (29), (31) przyporządkować liczbie niewymiernej x ułamek łańcuchowy nieskończony

$$(34) \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Oczywiście wyrażenie (34) ma sens tylko wtedy, gdy określimy jego wartość liczbową. Dla dowolnego ciągu liczb dodatnich y_j ($j = 1, 2, \dots$) i dowolnego y_0 oznaczmy przez

$$R_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$$

ułamek łańcuchowy występujący w ostatnim wzorze (32), w którym a_j zastąpiono przez y_j . Mamy zatem

$$R_0 = y_0$$

$$R_n(y_0, y_1, \dots, y_n) = y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \dots + \frac{1}{y_{n-1} + \frac{1}{y_n}}}}$$

dla $n = 1, 2, \dots$. Umówimy się, że *wartością nieskończonego ułamka łańcuchowego* (34) jest granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

o ile ta granica istnieje. Wyrażenie

$$R_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

nazwiemy *n-tym reduktem* nieskończonego ułamka łańcuchowego (34).

Jak Czytelnik na pewno zauważył, ułamki łańcuchowe skończone mają dość skomplikowaną budowę. Okażemy teraz, że każdy taki ułamek można zapisać w postaci "zwykłego" ułamka, w którym licznik i mianownik są odpowiednio dobranymi wielomianami zmiennych a_j .

Twierdzenie 7. *Przyjmijmy dla dodatnich y_j ($j = 1, 2, \dots$) i dowolnego y_0*

$$(35) \quad \begin{aligned} P_0 &= y_0, & Q_0 &= 1, \\ P_1 &= y_0 y_1 + 1, & Q_1 &= y_1, \\ P_k &= y_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k &= y_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{aligned}$$

($k = 2, 3, \dots$)

Wówczas

$$(36) \quad R_n = \frac{P_n}{Q_n}.$$

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Równość jest łatwa do sprawdzenia dla $n = 0, 1$. Dla $n > 1$ można ją zapisać w postaci

$$(37) \quad R_n = \frac{y_n P_{n-1} + P_{n-2}}{y_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Ze wzorów (35) widać, że zmienna y_n nie występuje w wyrażeniach P_j, Q_j dla $j < n$. Wobec tego zamieniając y_n przez $y_n + \frac{1}{y_{n+1}}$ we wzorze (37) dostajemy

$$R_{n+1} = \frac{y_{n+1}(P_{n-1}y_n + P_{n-2}) + P_{n-1}}{y_{n+1}(Q_{n-1}y_n + Q_{n-2}) + Q_{n-1}}$$

czyli

$$R_{n+1} = \frac{y_{n+1}P_n + P_{n-1}}{y_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}$$

albo w równoważnej postaci

$$(38) \quad R_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Okazaliśmy zatem, że traktując (36) jako założenie indukcyjne otrzymujemy z niego tezę indukcyjną (38). Dowód indukcyjny jest zakończony. \square

Przyjmując w szczególności $y_j = a_j$ widzimy, że n -ty redukt $R_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ daje się zapisać jako ułamek $\frac{P_n}{Q_n}$ z zastąpieniem y_j przez a_j .

Udowodnimy teraz ważną własność nieskończonych ułamków łańcuchowych.

Twierdzenie 8. *Jeżeli x jest liczbą niewymierną, to*

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

(a zatem liczba x jest wartością przyporządkowanego jej nieskończonego ułamka łańcuchowego).

DOWÓD twierdzenia poprzedzimy lematami dotyczącymi wielomianów P_k, Q_k .

Lemat 1. *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$*

$$(39) \quad Q_k > 0,$$

$$(40) \quad Q_k P_{k-1} - P_k Q_{k-1} = (-1)^k.$$

DOWÓD. Nierówność (39) wynika z definicji wielomianów Q_k . Dla dowodu (40) oznaczmy lewą stronę przez S_k . Mamy

$$S_1 = -1$$

oraz po wykorzystaniu wzorów (35)

$$S_{k+1} = -S_k$$

skąd po zastosowaniu indukcji wynika (40). □

Lemat 2. *Jeżeli $y_j \geq 1$ dla $j = 1, 2, \dots$ to*

$$(41) \quad Q_k \geq Q_{k-1}$$

oraz

$$(42) \quad Q_k \geq k$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

DOWÓD. Ze wzorów (35) wynika

$$Q_0 \leq Q_1 < Q_2$$

oraz dla $k > 2$

$$Q_k = y_k Q_{k-1} + Q_{k-2} > y_k Q_{k-1} \geq Q_{k-1}.$$

Nierówność (42) udowodnimy metodą indukcji. Zgodnie z wzorami (35)

$$Q_0 > 0, \quad Q_1 \geq 1, \quad Q_2 = y_1 y_2 + 1 \geq 2.$$

Założmy teraz, że nierówność (42) jest prawdziwa dla $k = n - 1$ oraz $k = n$, gdzie $n \geq 2$. Wykażemy, że zachodzi ona po zastąpieniu n przez $n + 1$ czyli dla $k = n$ oraz $k = n + 1$. Oczywiście wystarczy rozważyć tylko przypadek $k = n + 1$. Mamy na mocy założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= y_{n+1} Q_n + Q_{n-1} \geq \\ &\geq n y_{n+1} + n - 1 \geq 2n - 1, \end{aligned}$$

a więc

$$Q_{n+1} \geq n + 1,$$

gdyż $2n - 1 \geq n + 1$ dla $n \geq 2$. □

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia 8. Oznaczmy przez $\bar{P}_n, \bar{Q}_n, \bar{R}_n$ wyrażenia P_n, Q_n, R_n w których zmienne y_j zastąpiono przez a_j . Zgodnie ze wzorem (33) mamy (po zastąpieniu n przez $n + 1$)

$$x = R_{n+1}(a_0, a_1, \dots, a_n, x_{n+1}),$$

a zatem wobec (35), (36)

$$(43) \quad x = \frac{x_{n+1} \bar{P}_n + \bar{P}_{n-1}}{x_{n+1} \bar{Q}_n + \bar{Q}_{n-1}}$$

oraz

$$(44) \quad \bar{R}_n = \frac{\bar{P}_n}{\bar{Q}_n}.$$

Odejmując (43), (44) dostajemy po wykorzystaniu równości (40)

$$(45) \quad x - \bar{R}_n = \frac{(-1)^n}{(x_{n+1}\bar{Q}_n + \bar{Q}_{n-1})\bar{Q}_n}.$$

Ponieważ zgodnie ze wzorami (30)

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}} > a_{n+1}$$

więc

$$x_{n+1}\bar{Q}_n + \bar{Q}_{n-1} > a_{n+1}\bar{Q}_n + \bar{Q}_{n-1} = \bar{Q}_{n+1},$$

zatem z (45) dostajemy oszacowanie

$$|x - \bar{R}_n| < \frac{1}{\bar{Q}_n\bar{Q}_{n+1}}.$$

Po uwzględnieniu lematu 2 z ostatniej nierówności wynika

$$(46) \quad |x - \bar{R}_n| < \frac{1}{\bar{Q}_n^2}$$

a stąd

$$|x - \bar{R}_n| < \frac{1}{n^2}.$$

Ostatnia nierówność kończy dowód twierdzenia. \square

W dalszym ciągu (punkt 9) będą podane przykłady rozwinięcia liczby niewymiernej na ułamek łańcuchowy.

Z otrzymanych oszacowań wynika twierdzenie dotyczące aproksymacji liczb niewymiernych przez wymierne, które będzie wykorzystane dalej.

Twierdzenie 9. *Niech x będzie liczbą niewymierną. Wówczas do dowolnego $m \in \mathbb{N}$ można dobrać liczby wymierne*

$$w = \frac{p}{q}, \quad w_1 = \frac{p_1}{q_1}$$

tak, by zachodziły nierówności

- (i) $q, q_1 > m$,
- (ii) $0 < x - w < \frac{1}{q^2}$,
- (iii) $0 < w_1 - x < \frac{1}{q_1^2}$,

przy czym oba ułamki w, w_1 są nieskracalne.

DOWÓD. Jak widać ze wzorów (35), wielomiany Q_k nie zależą od y_0 . Ponieważ $a_j = [x_j]$ dla $j = 1, 2, \dots$ jest liczbą naturalną (liczba $a_0 = [x]$ może być ujemna), drogą indukcji wnioskujemy, że dla każdego k wyrażenie \bar{P}_k jest liczbą całkowitą zaś wyrażenie \bar{Q}_k liczbą naturalną.

Dla dowodu twierdzenia zauważmy, że zgodnie z (45) wyrażenie $x - \bar{R}_n$ jest dodatnie dla n parzystych, ujemne dla n nieparzystych. Wystarczy zatem przyjąć

$$w = \bar{R}_{2k}, \quad w_1 = \bar{R}_{2k+1}$$

gdzie $2k > m$ i skorzystać z oszacowania (46). Zgodnie z lematem 2 mamy

$$q = \bar{Q}_{2k} \geq 2k > m$$

oraz

$$q_1 = \bar{Q}_{2k+1} \geq 2k + 1 > m$$

co kończy dowód własności (i) - (iii).

Pozostaje wykazać, że ułamek

$$\bar{R}_n = \frac{\bar{P}_n}{\bar{Q}_n}$$

jest nieskracalny dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wynika to natychmiast z równości (40). Przy-
puśćmy bowiem, że dla pewnego k mamy

$$\bar{P}_k = m_k p_k, \quad \bar{Q}_k = m_k q_k$$

gdzie m_k, q_k są liczbami naturalnymi, p_k jest całkowite oraz $m_k > 1$. Wówczas (40) daje

$$q_k \bar{P}_{k-1} - p_k \bar{Q}_{k-1} = \frac{(-1)^k}{m_k}$$

co jest niemożliwe, gdyż lewa strona jest liczbą całkowitą a moduł prawej strony należy do przedziału $(0, 1)$. \square

Z dowodu twierdzenia 9 wynika, że znając rozwinięcie liczby niewymiernej na ułamek łańcuchowy możemy otrzymać jej przybliżenie wymierne z dowolną, z góry daną dokładnością. Z oszacowań (ii), (iii) widać, że błąd przybliżenia może być mały przy niedużym mianowniku q .

8*. Ciąg $a_n = \{nx\}$. Niech $\{y\} = y - [y]$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej y . Zbadamy własności ciągu, którego n -ty wyraz dany jest wzorem

$$a_n = \{nx\},$$

w zależności od liczby $x \in \mathbb{R}$.

PRZYPADK 1: x wymierne.

Jeżeli x jest liczbą całkowitą, to $a_n = 0$ dla każdego n . Załóżmy wobec tego, że

$$(47) \quad x = \frac{p}{q} \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$$

jest ułamkiem nieskracalnym, przy czym $q \geq 2$. Liczbę x możemy przedstawić w postaci

$$x = P + \frac{p_0}{q}$$

gdzie $P = [x]$ jest liczbą całkowitą zaś p_0 liczbą naturalną z przedziału $(0, q)$, przy czym ułamek $\frac{p_0}{q}$ również jest nieskracalny. Wówczas

$$nx = nP + \frac{np_0}{q}$$

a więc

$$\{nx\} = \left\{ \frac{np_0}{q} \right\}.$$

Możemy wobec tego założyć od razu, że licznik p we wzorze (47) przyjmuje jedną z wartości $\{1, 2, \dots, q-1\}$.

(i) Liczby a_1, a_2, \dots, a_q są różne.

Dla dowodu przypuśćmy, że istnieją takie dwie liczby n, m występujące w ciągu

$$\{1, 2, \dots, q\},$$

że $n > m$ oraz $a_n = a_m$. Oznacza to, że

$$nx - [nx] = mx - [mx]$$

czyli

$$(n - m) \frac{p}{q} = Q,$$

gdzie $Q = [nx] - [mx]$ jest liczbą naturalną. Zatem

$$(n - m)p = Qq$$

a ponieważ założyliśmy, że liczby p, q są względnie pierwsze, więc musi być $Q = kp$ gdzie $k \in \mathbb{N}$. Po skróceniu dostajemy

$$n - m = kq$$

co jest niemożliwe, gdyż $kq \geq q$ i jednocześnie $n - m \leq q - 1$.

(ii) Liczby a_1, a_2, \dots, a_q dzielą odcinek $[0, 1)$ na q równych części.

Stwierdzenie to wynika natychmiast z udowodnionego przed chwilą punktu (i). Istotnie, każda z liczb a_1, a_2, \dots, a_q jest ułamkiem o mianowniku q , w którym licznik przyjmuje jedną z wartości $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$. Ponieważ są one różne, muszą to być liczby

$$(48) \quad \frac{0}{q}, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q},$$

być może ustawione w innej kolejności.

(iii) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_{q+n} = a_n.$$

Dowód jest natychmiastowy, gdyż

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{(n+q)p}{q} \right\} &= \left\{ \frac{np}{q} + p \right\} \\ &= \left\{ \frac{np}{q} \right\}. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że w przypadku gdy x jest liczbą wymierną, w ciągu $\{a_n\}$ mamy tylko skończoną ilość różnych wyrazów, które dzielą odcinek $[0, 1)$ na równe części.

Przeprowadzone rozumowanie ilustruje następujący

Przykład 10. Niech

$$x = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4},$$

wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\{nx\} = \left\{ n \cdot \frac{3}{4} \right\},$$

zatem

$$a_n = \{n x_1\} \quad \text{gdzie} \quad x_1 = \frac{3}{4}.$$

Mamy $q = 4$ oraz

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{2}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = 0.$$

Jak widać, są to liczby postaci $\frac{j}{4}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) ustawione w kolejności od największej do najmniejszej. Ze względu na (iii) liczby te powtarzają się (w podanej kolejności) nieskończenie wiele razy, zatem ciąg $\{a_n\}$ ma postać

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \dots$$

PRZYPADK 2: x niewymierne.

Niech $w = \frac{p}{q}$ będzie liczbą wymierną, o której mowa w twierdzeniu 9. Dla $n = 1, 2, \dots, q$ zachodzi nierówność

$$(49) \quad 0 < nx - nw < \frac{1}{q}.$$

Jak wynika z rozważań przypadku 1, do każdego $j = 0, 1, \dots, q - 1$ istnieją liczby $n_j \in \{1, 2, \dots, q\}$ oraz l_j całkowite takie, że

$$(50) \quad n_j w = l_j + \frac{j}{q}.$$

Z (49), (50) wynika

$$l_j + \frac{j}{q} < n_j x < l_j + \frac{j+1}{q}$$

a stąd

$$[n_j x] = l_j$$

oraz

$$\frac{j}{q} < a_{n_j} = \{n_j x\} < \frac{j+1}{q}.$$

Ostatnia nierówność oznacza, że w każdym przedziale

$$\mathbb{P}_j = \left(\frac{j}{q}, \frac{j+1}{q} \right)$$

leży (przy tym dokładnie jeden) wyraz ciągu $\{a_n\}$, gdzie $n = 1, 2, \dots, q$. Możemy teraz łatwo udowodnić

Twierdzenie 10. *Jeżeli x jest liczbą niewymierną, to do dowolnego $x_0 \in [0, 1]$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$a_{n_\varepsilon} = \{n_\varepsilon x\} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

DOWÓD. Wystarczy dobrać tak q , by dla pewnego $j \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$

$$\mathbb{P}_j \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Warunek ten będzie na pewno spełniony, jeżeli obierzemy

$$q > \frac{1}{\varepsilon}$$

a tą nierówność uzyskamy wybierając

$$m > \frac{1}{\varepsilon}$$

w twierdzeniu 9. □

Twierdzenie 10 można sformułować nieco inaczej:

Twierdzenie 10'. *Jeżeli x jest liczbą niewymierną, to wyrazy ciągu $\{a_n\}$ leżą gęsto w odcinku $[0, 1)$.*

9*. **Zastosowanie ułamków łańcuchowych do aproksymacji.** Dla uproszczenia oznaczeń nieskończony ułamek łańcuchowy (34) będziemy zapisywali w postaci

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$$

Zgodnie z twierdzeniem 8 każdą liczbę niewymierną można przedstawić w postaci takiego ułamka rozumianego jako granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Przykład 11. Przedstawić w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego liczbę $\sqrt{2}$. Ponieważ $1 < 2 < 4$ więc $1 < \sqrt{2} < 2$, zatem

$$a_0 = [\sqrt{2}] = 1.$$

Wobec tego

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},$$

co po pomnożeniu licznika i mianownika przez $\sqrt{2} + 1$ daje

$$x_1 = \sqrt{2} + 1.$$

Zatem $2 < x_1 < 3$, skąd

$$a_1 = [x_1] = 2.$$

Okażemy indukcyjnie, że

$$(51) \quad x_n = \sqrt{2} + 1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 1$ równość (51) została sprawdzona. Przyjmując (51) jako założenie indukcyjne dostajemy

$$x_{n+1} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1) - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

czyli

$$x_{n+1} = \sqrt{2} + 1.$$

Wobec tego $a_n = a_1 = 2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ czyli

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

Przykład 12. Przedstawić w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego liczbę $\sqrt{3}$.
Ponieważ $1 < 3 < 4$ więc $1 < \sqrt{3} < 2$, skąd

$$a_0 = [\sqrt{3}] = 1.$$

Rachując podobnie jak w przykładzie 11 dostajemy

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1),$$

zatem $1 < x_1 < \frac{3}{2}$, skąd

$$a_1 = [x_1] = 1.$$

Dalszy rachunek daje

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1,$$

a stąd $2 < x_2 < 3$, zatem

$$a_2 = [x_2] = 2.$$

Udowodnimy metodą indukcji, że

$$(52) \quad \begin{aligned} x_{2n-1} &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1), \\ x_{2n} &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n = 1$ równości (52) zostały już sprawdzone. Przyjmując (52) jako założenie indukcyjne otrzymujemy

$$x_{2n+1} = \frac{1}{(\sqrt{3} + 1) - 2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1),$$

a stąd po przekształceniu ułamka

$$x_{2n+2} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1,$$

co kończy dowód indukcyjny. Zatem

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= a_1 = 1, \\ a_{2n} &= a_2 = 2 \end{aligned}$$

co daje

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots].$$

W obu przykładach ciągi mianowników są okresowe. W Przykładzie 11 ciąg mianowników jest ciągiem stałym - okres zawiera tylko jeden wyraz 2. W Przykładzie 12 okres składa się z dwóch wyrazów 1, 2. Można udowodnić, że liczba niewymierna rozwija się na ułamek

łańcuchowy okresowy wtedy i tylko wtedy gdy jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych.⁵

Przykład 13. Dla liczby $\sqrt{3}$ znaleźć przybliżenia wymierne w z niedomiarem i w_1 z nadmiarem, z błędem nie przekraczającym $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Wystarczy przyjąć

$$w = \bar{R}_{2k}, \quad w_1 = \bar{R}_{2k+1}$$

obierając odpowiednio k . Dla przybliżenia z niedomiarem mamy

$$0 < x - w < \frac{1}{(\bar{Q}_{2k})^2} \leq \frac{1}{4k^2} \leq \varepsilon,$$

wystarczy zatem przyjąć $k = 1$. Dla przybliżenia z nadmiarem

$$0 < w_1 - x < \frac{1}{(\bar{Q}_{2k+1})^2} \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \varepsilon$$

skąd wynika, że również wystarczy $k = 1$. Ułamki w i w_1 znajdziemy posługując się twierdzeniem 6. Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 &= \bar{Q}_0 = 1, \\ \bar{P}_1 &= 2, & \bar{P}_2 &= 2\bar{P}_1 + \bar{P}_0 = 5, \\ & & \bar{P}_3 &= \bar{P}_2 + \bar{P}_1 = 7, \\ \bar{Q}_1 &= 1, & \bar{Q}_2 &= 2\bar{Q}_1 + \bar{Q}_0 = 3, \\ & & \bar{Q}_3 &= \bar{Q}_2 + \bar{Q}_1 = 4, \end{aligned}$$

stąd

$$w = \bar{R}_2 = \frac{5}{3}, \quad w_1 = \bar{R}_3 = \frac{7}{4}.$$

Przykład 14. Dla liczby $\sqrt{2}$ znaleźć przybliżenia wymierne w z niedomiarem i w_1 z nadmiarem, z błędem nie przekraczającym $\varepsilon = 0,1$. Rozumując podobnie, jak w przykładzie 10, otrzymujemy oszacowanie dla k

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{dla przybliżenia z niedomiarem,} \\ k &\geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{dla przybliżenia z nadmiarem.} \end{aligned}$$

Ponieważ $\sqrt{10} < \sqrt{16} = 4$, w obu przypadkach wystarczy przyjąć $k = 2$. Posługując się twierdzeniem 6 otrzymujemy kolejno

⁵Dowód można znaleźć w książce W. Narkiewicz, Teoria liczb, wyd. 2, Warszawa 1990, str. 293.

$$\begin{aligned}
\bar{P}_0 &= \bar{Q}_0 = 1 \\
\bar{P}_1 &= 3, & \bar{P}_2 &= 2\bar{P}_1 + \bar{P}_0 = 7 \\
& & \bar{P}_3 &= 2\bar{P}_2 + \bar{P}_1 = 17 \\
& & \bar{P}_4 &= 2\bar{P}_3 + \bar{P}_2 = 41 \\
& & \bar{P}_5 &= 2\bar{P}_4 + \bar{P}_3 = 99 \\
\bar{Q}_1 &= 2, & \bar{Q}_2 &= 2\bar{Q}_1 + \bar{Q}_0 = 5 \\
\bar{Q}_3 &= 2\bar{Q}_2 + \bar{Q}_1 = 12 \\
\bar{Q}_4 &= 2\bar{Q}_3 + \bar{Q}_2 = 29 \\
\bar{Q}_5 &= 2\bar{Q}_4 + \bar{Q}_3 = 70
\end{aligned}$$

zatem

$$w = \bar{R}_4 = \frac{41}{29}, \quad w_1 = \bar{R}_5 = \frac{99}{70}.$$

Znajdując przybliżenia dziesiętne ułamków stwierdzamy, że

$$1,413 < w < \sqrt{2} < w_1 < 1,415.$$

Błąd znalezionych przybliżeń jest więc w rzeczywistości mniejszy od założonej z góry wartości 0,1, nie przekracza bowiem 0,002.

10. Twierdzenie Stolza. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do granicy a i utwórzmy ciąg średnich arytmetycznych:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1, & s_2 &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \\
&\dots\dots\dots \\
s_n &= \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Powstaje pytanie, czy ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny do tej samej granicy, co ciąg $\{a_n\}$? Pytanie to ma prostą interpretację fizyczną. Przypuśćmy, że a jest wartością jakiejś wielkości fizycznej zaś wyrazy a_n są liczbami otrzymanymi z pomiarów tej wielkości, przy czym ze wzrostem n wzrasta dokładność pomiaru. Rozważając abstrakcyjną sytuację nieskończenie wielu pomiarów mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Intuicyjnie wydaje się oczywiste, że biorąc średnie arytmetyczne pomiarów otrzymamy również dobre przybliżenia wartości a tzn. że ciąg $\{s_n\}$ jest również zbieżny do granicy a . Spróbujemy udowodnić to formalnie.

Założmy na chwilę, że a jest liczbą dodatnią oraz że

$$(53) \quad a_n > \frac{a}{2}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ (z definicji granicy wynika, że nierówność ta jest słuszna począwszy od pewnego wskaźnika $n = n_0$, będzie więc spełniona dla wszystkich n po odrzuceniu pewnej skończonej ilości początkowych wyrazów ciągu $\{a_n\}$). Wobec (53)

$$a_1 + \cdots + a_n > \frac{na}{2}$$

skąd wynika, że ciąg po lewej stronie jest rozbieżny do ∞ . Zatem ciąg $\{s_n\}$ jest ilorazem dwóch ciągów rozbieżnych do ∞ i nie możemy zastosować do niego twierdzenia o granicy ilorazu. Mówimy, że wyrażenie s_n jest *nieoznaczonością typu $\frac{\infty}{\infty}$* . Do obliczania granicy takich ciągów bywa przydatne następujące

Twierdzenie 11 (Stolza).⁶ *Założmy, że ciąg $\{y_n\}$ jest ściśle rosnący, przy czym $y_n \neq 0$ (przynajmniej począwszy od pewnego wskaźnika $n = n_0$) oraz że spełniony jest jeden z warunków*

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty.$$

Wówczas

$$(54) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

przy założeniu, że istnieje granica g po prawej stronie (właściwa lub niewłaściwa).

DOWÓD. Odrzucając w rozważanych ciągach n_0 początkowych wyrazów (co, jak wiemy, nie wpływa na zbieżność) możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że

$$(55) \quad y_{n+1} > y_n, \quad y_n \neq 0$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy najpierw przypadek $g \in \mathbb{R}$ i obierzmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas liczba P (dobrana do ε) taka, że dla $k > P$ zachodzi nierówność epsilonowa

$$(56) \quad g - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < g + \frac{\varepsilon}{2},$$

zaś wobec (55) nierówność tą można zapisać w równoważnej postaci

$$(57) \quad \left(g - \frac{\varepsilon}{2}\right) (y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1} < \left(g + \frac{\varepsilon}{2}\right) (y_k - y_{k-1}).$$

⁶Otto Stolz (1842 - 1905), matematyk austriacki.

Obierając dowolnie $p > P$ oraz $n > p$ i dodając stronami nierówności (57) dla $k = p + 1, p + 2, \dots, n$ dostajemy po redukcji

$$(58) \quad \left(g - \frac{\varepsilon}{2}\right) (y_n - y_p) < x_n - x_p < \left(g + \frac{\varepsilon}{2}\right) (y_n - y_p)$$

Założmy teraz, że spełniony jest warunek (i) i ustalmy liczbę p . Przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ w nierówności (58) dostajemy

$$(59) \quad \left(g - \frac{\varepsilon}{2}\right) (-y_p) \leq -x_p \leq \left(g + \frac{\varepsilon}{2}\right) (-y_p).$$

Ponieważ ciąg $\{y_n\}$ jest ściśle rosnący i zbieżny do 0, jego wyrazy muszą być ujemne. Wobec tego, dzieląc nierówność (59) przez $-y_p$, dostajemy

$$g - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{x_p}{y_p} \leq g + \frac{\varepsilon}{2}$$

i stąd

$$\left| \frac{x_p}{y_p} - g \right| < \varepsilon$$

dla $p > P$. Udowodniliśmy więc (54) przy założeniu, że spełniony jest warunek (i) i że g jest granicą właściwą. Przechodząc do przypadku granicy niewłaściwej założymy, że $g = \infty$ i obierzmy dowolnie liczbę $M > 0$. Istnieje wówczas liczba P (dobrana do M) taka, że dla $k > P$ zachodzi nierówność

$$2M < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}},$$

którą można zapisać w równoważnej postaci

$$(60) \quad 2M(y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1}.$$

Dalej postępujemy podobnie, jak w przypadku granicy g właściwej. Ustalmy dowolnie liczbę $p > P$ i niech $n > p$. Dodając stronami nierówności (60) dla $k = p + 1, p + 2, \dots, n$ otrzymujemy po redukcji

$$2M(y_n - y_p) < x_n - x_p,$$

co po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ i podzieleniu nierówności przez $-y_p$ daje

$$2M \leq \frac{x_p}{y_p},$$

skąd wynika, że

$$M < \frac{x_p}{y_p}$$

dla $p > P$. Oznacza to, że (54) zachodzi przy założeniu (i) w przypadku, gdy $g = \infty$. Dowód dla $g = -\infty$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi.

Przejdziemy teraz do dowodu (54) przy założeniu, że spełniony jest warunek (ii). Rozważymy najpierw przypadek $g \in \mathbb{R}$. Wówczas nierówność (58) można po uwzględnieniu (55) zapisać w postaci

$$(61) \quad g - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_p}{y_n - y_p} < g + \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > p > P),$$

przy czym liczba P jest dobrana do ε .

W dalszym ciągu dowodu będziemy korzystać z następującego lematu, którego dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Lemat. Jeżeli $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

□

Aby oszacować różnicę

$$\frac{x_n}{y_n} - g$$

przekształcimy najpierw wyrażenie

$$X_{n,p} = \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_n - x_p}{y_n - y_p}.$$

Mamy

$$X_{n,p} = \frac{x_p y_n - x_n y_p}{y_n (y_n - y_p)}$$

skąd, dodając i odejmując w liczniku $x_p y_p$, dostajemy

$$X_{n,p} = \frac{x_p (y_n - y_p) + y_p (x_p - x_n)}{y_n (y_n - y_p)}$$

czyli

$$(62) \quad X_{n,p} = \frac{x_p}{y_n} + \frac{y_p}{y_n} \cdot \frac{x_p - x_n}{y_n - y_p}.$$

Ustalając p stwierdzamy na mocy lematu, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_p}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_p}{y_n} = 0,$$

ponadto, zgodnie z nierównością (61) ciąg $\{u_n\}$, gdzie

$$u_n = \frac{x_p - x_n}{y_n - y_p},$$

jest ograniczony. Zatem drugi wyraz po prawej stronie (62) dąży do 0 przy $n \rightarrow \infty$ jako iloczyn ciągu zbieżnego do 0 przez ciąg ograniczony (por. twierdzenie 4 §1) i w konsekwencji (przy ustalonym $p > P$) mamy

$$(63) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n,p} = 0.$$

Wobec (63) istnieje liczba $N > p$ taka, że dla $n > N$ zachodzi nierówność epsilonowa

$$(64) \quad |X_{n,p}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ

$$(65) \quad \left| \frac{x_n}{y_n} - g \right| \leq |X_{n,p}| + \left| \frac{x_n - x_p}{y_n - y_p} - g \right|,$$

uwzględniając (61), (64), (65) dostajemy

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - g \right| < \varepsilon$$

dla $n > N$, gdzie liczba N jest dobrana do ε , a to daje tezę twierdzenia przy założeniu (ii), jeżeli g jest granicą właściwą.

Pozostaje do rozważenia przypadek przy założeniu (ii), gdy granica g po prawej stronie (54) jest niewłaściwa.

Jeżeli $g = \infty$, to istnieje taka liczba r , że dla $n > r$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

a więc wobec (58)

$$(66) \quad x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0.$$

Nierówność (66) możemy napisać kolejno dla $n = r + 1, r + 2, \dots, k$. Dodając stronami otrzymane nierówności dostajemy

$$x_k - x_r > y_k - y_r$$

skąd wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k = \infty.$$

Ponadto z (66) widać, że ciąg $\{x_n\}$ jest, przynajmniej począwszy od wyrazu x_r , ciągiem ściśle rosnącym. Zatem ciąg $\{x_n\}$ spełnia założenia uczynione w twierdzeniu o ciągu $\{y_n\}$. Ponieważ założyliśmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \infty,$$

więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0,$$

a to pozwala zastosować udowodnioną już część twierdzenia w przypadku $g = 0$ z zamianą ról ciągów $\{x_n\}, \{y_n\}$. Zatem

$$(67) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0.$$

Ponieważ oba ciągi są rozbieżne do ∞ , więc przynajmniej dla dostatecznie dużych n mamy

$$x_n > 0, \quad y_n > 0.$$

Opierając się na lemacie 2 dostajemy z (67)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty,$$

co daje tezę w przypadku $g = \infty$.

Jeżeli $g = -\infty$, to przyjmując $z_n = -x_n$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-z_n + z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = -\infty$$

a zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \infty$$

i stosując już udowodnioną część twierdzenia dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{y_n} = \infty$$

a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$$

co kończy dowód. □

Możemy teraz wrócić do postawionego poprzednio pytania dotyczącego zbieżności ciągu średnich arytmetycznych.

Twierdzenie 12 (o średniej arytmetycznej). *Jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do granicy a (właściwej lub niewłaściwej), to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a.$$

DOWÓD otrzymujemy natychmiast z twierdzenia Stolza przyjmując

$$x_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad y_n = n$$

gdyż

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n.$$

□

11. Granica górna i dolna ciągu. Liczbę α nazywamy *liczbą graniczną ciągu* $\{a_n\}$,⁷ jeżeli jest ona granicą pewnego podciągu ciągu $\{a_n\}$. Na przykład ciąg

$$(68) \quad 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

ma dwie liczby graniczne $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$, bowiem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$(69) \quad a_{2n-1} = 1, \quad a_{2n} = 0$$

zatem

$$\alpha_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}, \quad \alpha_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$$

przy czym łatwo zauważyć, że każdy podciąg zbieżny wyjęty z ciągu (68) musi być od pewnego miejsca identyczny z jednym z podciągów (69).

Liczbę G nazywamy *granica górną* ciągu $\{a_n\}$, jeżeli ciąg ten jest ograniczony z góry i G jest największą jego liczbą graniczną. Zapisujemy

$$G = \overline{\lim} a_n$$

lub

$$G = \limsup a_n.$$

Liczbę g nazywamy *granica dolną* ciągu $\{a_n\}$, jeżeli ciąg ten jest ograniczony z dołu i g jest najmniejszą jego liczbą graniczną. Zapisujemy

$$g = \underline{\lim} a_n$$

lub

$$g = \liminf a_n.$$

Twierdzenie 13. *Każdy ciąg ograniczony ma granicę górną i dolną.*

DOWÓD. Z założenia istnieją liczby m, M takie, że

$$(70) \quad m \leq a_n \leq M$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb granicznych ciągu $\{a_n\}$. Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa zbiór ten nie jest pusty, natomiast z nierówności (70) wynika, że jest on zbiorem ograniczonym. Wobec tego (por. rozdz.I §2) zbiór A ma kres górny G i kres dolny g . Okażemy, że

$$(71) \quad G = \limsup a_n, \quad g = \liminf a_n.$$

⁷Używany jest również termin *punkt skupienia ciągu* $\{a_n\}$.

Udowodnimy najpierw pierwszą z równości (71). Z definicji kresu górnego (warunek (sup1))

$$\alpha \leq G$$

dla dowolnej liczby granicznej α . Wystarczy wobec tego okazać, że G jest liczbą graniczną. Wykorzystamy teraz ponownie definicję kresu górnego przyjmując $\varepsilon_1 = 1$ w warunku (sup2). Wynika z niego istnienie liczby granicznej α_1 takiej, że

$$G - 1 < \alpha_1 \leq G < G + 1.$$

Ponieważ α_1 jest granicą pewnego podciągu wyjętego z ciągu $\{a_n\}$, w przedziale $(G - 1, G + 1)$ leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Oznaczmy przez a_{n_1} wyraz o najniższym numerze. Mamy

$$G - 1 < a_{n_1} < G + 1.$$

Przyjmując $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ i powtarzając opisaną rozumowanie możemy znaleźć $n_2 > n_1$ takie, że

$$G - \frac{1}{2} < a_{n_2} < G + \frac{1}{2}.$$

Postępując podobnie dla $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ($k = 3, 4, \dots$) konstruujemy ciąg ściśle rosnący wskaźników $\{n_k\}$ o tej własności, że

$$(72) \quad G - \frac{1}{k} < a_{n_k} < G + \frac{1}{k}$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Z nierówności (72) wynika na mocy twierdzenia o trzech ciągach, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = G.$$

Zatem G jest liczbą graniczną.

Dla dowodu drugiej równości (71) zauważmy, że zgodnie z definicją kresu dolnego (warunek (inf1))

$$g \leq \alpha$$

dla dowolnej liczby granicznej α . Pozostaje wykazać, że g jest również liczbą graniczną, podobnie jak G . Dowód jest podobny i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Podobnie, jak w przypadku granicy ciągu, można wprowadzić niewłaściwe granice górną i dolną. Mówimy, że

$$\limsup a_n = \infty,$$

jeżeli istnieje podciąg ciągu $\{a_n\}$ rozbieżny do ∞ . Podobnie

$$\liminf a_n = -\infty,$$

jeżeli z ciągu $\{a_n\}$ można wyjąć podciąg rozbieżny do $-\infty$.

Zachodzi łatwe do udowodnienia

Twierdzenie 14.

(i) Ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z góry wtedy i tylko wtedy gdy

$$\limsup a_n = \infty,$$

(ii) ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z dołu wtedy i tylko wtedy gdy

$$\liminf a_n = -\infty.$$

DOWÓD. Udowodnimy punkt (i); dowód (ii) przebiega tak samo i pozostawiamy go Czytelnikowi. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z góry, to do dowolnego $M > 0$ istnieją wyrazy ciągu spełniające nierówność

$$(73) \quad a_n \geq M.$$

Wyrazów tych jest nieskończenie wiele. Przypuśćmy bowiem, że tak nie jest i (73) zachodzi jedynie dla skończonej ilości wyrazów a_{n_1}, \dots, a_{n_p} . Wówczas nierówność (73) nie będzie spełniona dla żadnego n jeżeli zastąpimy M przez

$$M_1 = \max(M, a_{n_1}, \dots, a_{n_p}).$$

Niech teraz $M = 1$ i niech n_1 oznacza najmniejszy wskaźnik taki, że

$$a_{n_1} \geq 1.$$

Przyjmując dalej $M = 2$ wybierzemy z pośród nieskończenie wielu wyrazów ciągu spełniających (73) wyraz a_{n_2} , gdzie n_2 jest najmniejszym wskaźnikiem większym od n_1 . Mamy zatem

$$a_{n_2} \geq 2, \quad n_2 > n_1.$$

Kontynuując opisaną postępowanie otrzymujemy ściśle rosnący ciąg wskaźników $\{n_k\}$ taki, że

$$(74) \quad a_{n_k} \geq k.$$

Ciąg $\{a_{n_k}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\}$, przy czym z nierówności (74) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = \infty.$$

Na odwrót - jeżeli z ciągu $\{a_n\}$ można wybrać podciąg $\{a_{n_k}\}$ rozbieżny do ∞ , to do dowolnego M można dobrać liczbę k_0 tak, by

$$a_{n_k} > M$$

dla $k > k_0$. Zatem ciąg $\{a_n\}$ nie jest ograniczony z góry. □

Niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}$. Mówimy, że

(i) wyrazy tego ciągu mają własność (w) dla prawie wszystkich n , jeżeli istnieje liczba n_0 taka, że a_n ma własność (w) dla $n > n_0$;

(ii) wyrazy ciągu mają własność (w) dla nieskończenie wielu n , jeżeli istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że a_{n_k} ma własność (w) dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Przykład 15.

(A) Ciąg $\{a_n\}$ ma postać

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

W ciągu tym jest nieskończenie wiele wyrazów równych zeru, natomiast nie jest prawdą, że prawie wszystkie wyrazy są równe zeru.

(B) Niech

$$a_n = \begin{cases} (11-n)^{-1} & \text{dla } n \leq 9 \\ (-1)^n & \text{dla } n > 9. \end{cases}$$

Ciąg $\{a_n\}$ ma więc postać

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}, 1, -1, 1, -1, \dots$$

W ciągu tym

- a.) jest nieskończenie wiele wyrazów dodatnich,
- b.) prawie wszystkie wyrazy są całkowite,
- c.) jest nieskończenie wiele wyrazów równych -1 .

Posługując się wprowadzoną terminologią można następująco sformułować podaną w §1 definicję granicy ciągu: Liczba a jest *granica ciągu* $\{a_n\}$ jeżeli dla dowolnego dodatniego ε nierówność

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

jest spełniona dla prawie wszystkich n . Pokażemy teraz, że również granice górną i dolną można zdefiniować przy pomocy nierówności epsilonowej.

Twierdzenie 15. Liczba G jest *granica górną* ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

- a.) nierówność

$$G - \varepsilon < a_n$$

jest spełniona dla nieskończenie wielu n oraz

- b.) nierówność

$$a_n < G + \varepsilon$$

jest spełniona dla prawie wszystkich n .

DOWÓD. Załóżmy że

$$G = \overline{\lim} a_n,$$

wówczas istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że

$$G = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$$

skąd wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ nierówność a.) jest spełniona przez prawie wszystkie wyrazy podciągu, a więc przez nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Zgodnie z definicją granicy górnej ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, zatem istnieje liczba M taka, że

$$a_n \leq M$$

dla wszystkich n . Przypuśćmy teraz, że warunek b.) nie jest spełniony dla pewnego ε_0 , wobec tego dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność

$$G + \varepsilon_0 \leq a_n \leq M.$$

Wyrazy ciągu spełniające ostatnią nierówność tworzą ciąg ograniczony, na podstawie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa można więc z niego wyjąć podciąg zbieżny. Ale to oznacza, że z ciągu $\{a_n\}$ można wyjąć podciąg zbieżny do liczby $\alpha \in [G + \varepsilon_0, M]$, G nie jest więc największą liczbą graniczną wbrew założeniu.

Przypuśćmy teraz, że są spełnione warunki a.), b.) podane w twierdzeniu. Przyjmując $\varepsilon = 1$ w warunku b.) widzimy, że co najwyżej skończona ilość wyrazów ciągu $\{a_n\}$ jest większa od liczby $G + 1$, zatem ciąg ten jest ograniczony z góry. Przyjmując w warunkach a.), b.) kolejno $\varepsilon = \frac{1}{k}$, ($k = 1, 2, \dots$) możemy skonstruować ciąg ściśle rosnący wskaźników $\{n_k\}$ taki, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$G - \frac{1}{k} < a_{n_k} < G + \frac{1}{k}$$

(por. rozumowanie w dowodzie twierdzenia 13). Zatem

$$G = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$$

co oznacza, że G jest liczbą graniczną. Gdyby istniała liczba graniczna $G_1 > G$, to przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{2}(G_1 - G)$ otrzymalibyśmy dla nieskończenie wielu n nierówność

$$a_n > G_1 - \varepsilon = G + \varepsilon$$

co przeczy warunkowi b.). A więc G jest największą liczbą graniczną czyli granicą górną. \square

W podobny sposób można udowodnić

Twierdzenie 16. Liczba g jest granicą dolną ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

a.) nierówność

$$g - \varepsilon < a_n$$

jest spełniona dla prawie wszystkich n oraz

b.) nierówność

$$a_n < g + \varepsilon$$

jest spełniona dla nieskończenie wielu n .

DOWÓD pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Twierdzenie 17. *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę dolną g i granicę górną G , to*

$$(75) \quad g \leq G$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy ciąg jest zbieżny.

DOWÓD. Nierówność (75) wynika bezpośrednio z definicji. Jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

to a jest jedyną liczbą graniczną (por. twierdzenie 3), zatem

$$g = G = a.$$

Na odwrót, jeżeli $g = G$, to zbieżność ciągu wynika natychmiast z twierdzeń 15 (warunek b.)) i 16 (warunek a.)). \square

Przykład 16. Wróćmy do ciągu

$$a_n = \{nx\}$$

rozważanego w punkcie 8. Jeżeli $x = \frac{p}{q}$ (ułamek nieskracalny, $q \geq 2$), to ciąg $\{a_n\}$ ma q różnych liczb granicznych

$$\alpha_j = \frac{j}{q} \quad (j = 0, 1, \dots, q-1),$$

zatem

$$\liminf a_n = 0, \quad \limsup a_n = \frac{q-1}{q}.$$

Jeżeli zaś x jest niewymierne, to z twierdzenia 10 wynika, że każda liczba z przedziału $[0, 1]$ jest liczbą graniczną, wobec tego

$$\liminf a_n = 0, \quad \limsup a_n = 1.$$

Przykład 17. Niech

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ n & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Wówczas

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \infty.$$

Ciąg jest ograniczony z dołu, nieograniczony z góry. Jedyną liczbą graniczną jest 0, zatem

$$\liminf a_n = 0, \quad \limsup a_n = \infty.$$

Warto zauważyć, że twierdzenia o działaniach na granicach (§1 punkt 4) nie są prawdziwe dla granic górnej i dolnej.

Przykład 18. Niech

$$a_{2n} = b_{2n+1} = 1, \quad a_{2n+1} = b_{2n} = 0.$$

Wówczas

$$a_n + b_n = 1, \quad a_n b_n = 0$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\limsup a_n = \limsup b_n = 1$$

oraz

$$\liminf a_n = \liminf b_n = 0$$

a więc

$$\limsup a_n + \limsup b_n = 2,$$

$$\liminf a_n + \liminf b_n = 0,$$

$$(\limsup a_n)(\limsup b_n) = 1.$$

Natomiast oba ciągi $\{a_n + b_n\}$ oraz $\{a_n b_n\}$ są stałe, a więc zbieżne i zgodnie z twierdzeniem 17 mamy

$$\limsup(a_n + b_n) = \liminf(a_n + b_n) = 1$$

oraz

$$\limsup(a_n b_n) = \liminf(a_n b_n) = 0.$$

Zadania.

1. Podać przykłady

- a.) ciągu rosnącego zbieżnego,
- b.) ciągu malejącego zbieżnego,
- c.) ciągu rosnącego rozbieżnego do ∞ ,
- d.) ciągu malejącego rozbieżnego do $-\infty$.

2. Pokazać na przykładzie, że ciąg rozbieżny do ∞ może nie być rosnący.

3. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \sqrt[n^2]{n^2}, \quad b_n = 3^{\frac{1}{2n+1}}.$$

Wskazówka. Wykorzystać przykłady 13, 14 §1 oraz twierdzenie o podciągach.

4. Zbadać zbieżność ciągów

$$a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sqrt[n]{n}, \quad b_n = (-1)^n (1 + (-1)^n) \frac{n}{4n^2 + 1}.$$

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie o podciągach, twierdzenie 4 §1 oraz przykład 14 §1.

5. Które z podanych ciągów przedziałów są zstępujące? Znaleźć ich część wspólną i porównać wynik z twierdzeniem Ascoliego.

$$\begin{aligned} \text{a.) } \mathbb{P}_n &= \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right], & \text{b.) } \mathbb{P}_n &= \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right], \\ \text{c.) } \mathbb{P}_n &= \left[-\frac{2}{n}, \frac{3}{n^2} \right] & \text{d.) } \mathbb{P}_n &= (1, 1 + 2^{-n}). \end{aligned}$$

6. Udowodnić, że przy założeniach twierdzenia Ascoliego część wspólna wszystkich przedziałów \mathbb{P}_n jest przedziałem $[x_0, x_1]$, gdzie

$$\begin{aligned} x_0 &= \sup A, & A &= \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \\ x_1 &= \inf B, & B &= \{b_n : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

7. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Wskazówka. Wykorzystać punkt 5, twierdzenie o podciągach i zadanie 23 §1.

8. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{6n}.$$

Wskazówka. Wykorzystać punkt 5 oraz twierdzenie o podciągach.

9. Sprawdzić, dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Wskazówka. Wykorzystać punkt 5.

10. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Wskazówka. Wykorzystując punkt 5 udowodnić najpierw nierówność

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq e.$$

Następnie wykorzystać przykład 13 §1.

11. Udowodnić zbieżność ciągu $\{a_n\}$ spełniającego warunki

- i.) $0 \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$,
 ii.) $|a_{2n} - a_{2n-1}| \leq \frac{1}{n}$
 dla $n \in \mathbb{N}$.

Wskazówka. Udowodnić najpierw zbieżność ciągu $\{a_{2n+1}\}$, następnie zastosować zadanie 4 §1.

12. Udowodnić, że następujące ciągi są zbieżne do zera:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^k}{a^n} && \text{przy ustalonych } a > 1, k \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{p^n}{n!} && \text{przy ustalonym } p > 0, \\ c_n &= \frac{n^n}{(n!)^2}, \\ d_n &= \frac{n!}{n^n}. \end{aligned}$$

Wskazówka. Udowodnić, że każdy z tych ciągów jest ograniczony z dołu i malejący począwszy od pewnego wyrazu, następnie oprzeć się na twierdzeniu 5. W celu obliczenia granicy ciągu znaleźć najpierw związek między n -tym i $(n+1)$ -szym wyrazem ciągu.

13. Zakładając, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

udowodnić, że ciąg

$$y_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$$

ma również granicę a .

Wskazówka. Opierając się na zadaniu 18 rozdz. I §1 przedstawić najpierw wyrażenie y_n w postaci

$$y_n = z_n + a$$

gdzie

$$z_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x_k - a).$$

Dowód równości

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

zacząć od okazania, że przy ustalonym k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \binom{n}{k} = 0,$$

opierając się na zadaniu 17 rozdz.I §1 i zadaniu 12.

14. Zbadać zbieżność ciągu określonego wzorem rekurencyjnym

$$x_n = \frac{a}{1 + x_{n-1}} \quad \text{dla } n > 1$$

zakładając, że $x_1 > 0$ oraz że a jest daną liczbą dodatnią.

Wskazówka. Przewidywana granica g spełnia równanie

$$g = \frac{a}{1 + g}.$$

Rozważając przypadki

$$\text{a.) } x_1 < g, \quad \text{b.) } x_1 > g$$

udowodnić, że każdy z podciągów $\{x_{2k}\}$ oraz $\{x_{2k+1}\}$ jest monotoniczny i ograniczony. Następnie oprzeć się na twierdzeniu 5 i wykorzystać zadanie 4 §1.

15. Udowodnić zbieżność i obliczyć granicę ciągu $\{u_n\}$ określonego następująco (przy ustalonym $c > 0$):

$$(76) \quad \begin{aligned} u_1 &= \sqrt{c}, \\ u_{n+1} &= \sqrt{c + u_n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wskazówka. Udowodnić najpierw (metodą indukcji) nierówności

$$\sqrt{c} < u_n < \sqrt{c} + 1, \quad u_{n-1} < u_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wywnioskować stąd, że ciąg jest zbieżny, następnie przejść do granicy w (76) opierając się na zadaniu 23 §1.

16. Wykazać, że ciąg określony następująco (por. przykład 7):

$$\begin{aligned} u_1 &= a, \quad u_2 = b \quad (a \neq b) \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_n) \quad \text{dla } n \geq 2 \end{aligned}$$

ma granicę

$$g = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b.$$

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

Wskazówka. Ciąg $\{u_n\}$ był rozważany w Przykładzie 7, gdzie wykazaliśmy że spełnia warunek Cauchy'ego, zatem na podstawie twierdzenia 6 jest zbieżny, przy czym

$$g = \lim u_{2n+1}$$

(dlaczego?). Aby obliczyć tą ostatnią granicę należy najpierw, zakładając że $a < b$, udowodnić indukcyjnie nierówność

$$u_{2n-1} < u_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

następnie korzystając z równości (22) wyrazić różnicę

$$u_{2n+1} - u_{2n-1}$$

przy pomocy wyrażenia $b - a$ i skorzystać z przedstawienia

$$u_{2n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^n (u_{2k+1} - u_{2k-1}).$$

W dalszych rachunkach należy wykorzystać równość (17) i Przykład 4 §1. Przypadek $a > b$ sprowadzić do poprzedniego rozważając ciąg $v_n = u_{n+1}$.

17. Obliczyć granicę ciągu $\{h_n\}$ określonego następująco (por. zadanie 8 §1):

$$\begin{aligned} h_1 &= a, & h_2 &= b, \\ h_{n+1} &= \frac{2h_n \cdot h_{n-1}}{h_n + h_{n-1}} \quad \text{dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

(zakładamy, że a, b są różnymi liczbami dodatnimi). Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

Wskazówka. Rozważyc ciąg

$$u_n = \frac{1}{h_n}$$

i skorzystać z zadania 16.

18. Udowodnić zbieżność ciągu

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 5.

19. Dla danych $a > b > 0$ określimy dwa ciągi

$$(77) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{a+b}{2}, & b_1 &= \sqrt{ab} \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że oba ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy leżącej w przedziale (b, a) (zwanej *średnią arytmetyczno - geometryczną* liczb a, b).

Wskazówka. Opierając się na zadaniu 7 rozdz.I §1 udowodnić najpierw, że oba ciągi są monotoniczne i ograniczone. Zastosować twierdzenie 5 i przejść do granicy w równościach (77).

20. Dla danych $a > b > 0$ określmy ciągi

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a+b}{2}, & b_1 &= \frac{2ab}{a+b} \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &= \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}. \end{aligned}$$

Udowodnić, że oba ciągi są zbieżne do tej samej granicy równej \sqrt{ab} .

Wskazówka. Zbieżność ciągów i równość ich granic udowodnić podobnie, jak w zadaniu 19. W celu obliczenia granicy udowodnić najpierw indukcyjnie równość

$$a_n b_n = ab \quad (n \in \mathbb{N}).$$

21*. Udowodnić następujące rozwinięcia na ułamki łańcuchowe:

$$\begin{aligned} \text{a.)} \quad \sqrt{5} &= [2; 4, 4, 4, \dots] \\ \text{b.)} \quad \sqrt{6} &= [2; 2, 4, 2, 4, \dots] \\ \text{c.)} \quad \sqrt{7} &= [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]. \end{aligned}$$

22*. Opierając się na zadaniu 21 znaleźć dla liczb $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ przybliżenia wymierne z nadmiarem i z niedomiarem z błędem nie przekraczający $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

23. Niech

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}), \\ A_n &= \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n). \end{aligned}$$

Pokazać, że

$$(78) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{2}$$

natomiast ciąg $\{a_n\}$ nie ma granicy. Porównać z twierdzeniem 12.

Wskazówka. W dowodzie (78) wykorzystać zadanie 4 §1.

24. Obliczyć granice

$$\begin{aligned} \text{a.)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \sqrt{5} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[n]{5} \right), \\ \text{b.)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n} \right), \\ \text{c.)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right), \\ \text{d.)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n^n} \right). \end{aligned}$$

25. Obliczyć granice ciągów

$$a_n = \frac{1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n},$$

$$b_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!},$$

$$c_n = \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + \cdots + n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(n+2)},$$

$$d_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu Stolz'a. Przy badaniu ciągu $\{d_n\}$ wykorzystać wzór dwumianowy Newtona.

26. Znaleźć granice górną i dolną ciągów

$$a_n = \frac{2 + (-1)^n n^2}{n(3n+1)},$$

$$b_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$c_n = \left[1 + (-1)^n\right] \left(n - \frac{1}{n}\right)^2.$$

27. Udowodnić, że ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich spełniający jeden z warunków

$$(w_1) \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

$$(w_2) \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

jest zbieżny do zera.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 15 i wykorzystać Przykład 4 §1.

28. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym. Udowodnić, że

$$\limsup(\lambda a_n) = \begin{cases} \lambda \limsup a_n & \text{dla } \lambda > 0 \\ \lambda \liminf a_n & \text{dla } \lambda < 0. \end{cases}$$

29. Załóżmy, że ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ są ograniczone i że zachodzi nierówność

$$a_n \leq b_n \quad (s \in \mathbb{N}).$$

Udowodnić, że

$$\limsup a_n \leq \limsup b_n,$$

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n.$$

30. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma postać

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots$$

Wskazówka. Najpierw znaleźć ogólny wzór dla wyrazów parzystych oraz dla wyrazów nieparzystych ciągu $\{a_n\}$, następnie wykorzystać Przykład 13 §1, twierdzenie o podciągach i zadanie 4 §1.

Funkcje zmiennej rzeczywistej.



§1. Funkcje elementarne.

1. Przykłady funkcji. W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy ciąg nieskończony jako funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych \mathbb{N} i przyjmującą wartości należące do zbioru liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Obecnie przejdziemy do rozważania funkcji określonych na całym zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} lub na jego podzbiorze i przyjmujących wartości rzeczywiste. Wiele przykładów takich funkcji poznał już Czytelnik podczas nauki w szkole.

Zbiór $D \subset \mathbb{R}$ na którym określona jest funkcja f nazywamy *dziedziną* tej funkcji. Dla oznaczenia *wartości* funkcji f w punkcie $x \in D$ będziemy używali oznaczenia $f(x)$ lub y (to drugie jest wygodniejsze w rachunkach). Zmienną x nazywamy *argumentem* funkcji f . Zbiór wartości przyjmowanych przez funkcję f na zbiorze $A \subset D$ będziemy oznaczać przez $f(A)$. Najczęściej będziemy mieli do czynienia z funkcjami, których dziedziną jest przedział (ograniczony lub nie).

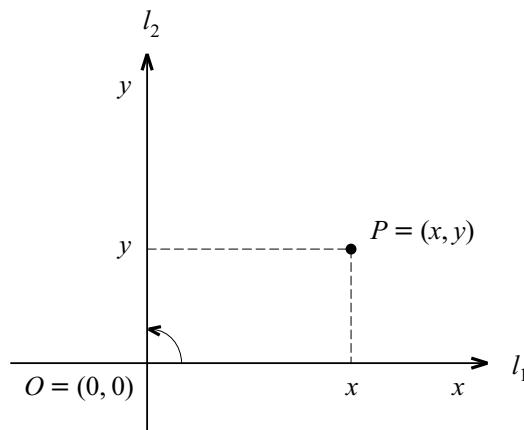
Wprowadźmy na płaszczyźnie układ dwóch prostopadłych osi liczbowych l_1, l_2 przecinających się w punkcie 0, które nazwiemy osią x -ów i osią y -ów. Dla dowolnie ustalonego punktu P płaszczyzny niech P_x będzie jego rzutem prostopadłym na oś x -ów, zaś P_y - rzutem prostopadłym na oś y -ów. Oznaczmy dalej przez x współrzędną punktu P_x na osi x -ów oraz przez y współrzędną punktu P_y na osi y -ów. Liczby x, y nazywamy *współzrędnymi prostokątnymi* punktu P (x jest *odciętą*, y jest *rzędną* punktu P), zaś układ osi l_1, l_2 - *prostokątnym układem współrzędnych*. Płaszczyznę z wprowadzonym prostokątnym układem współrzędnych będziemy oznaczali przez \mathbb{R}^2 . Zgodnie z twierdzeniem sformułowanym w punkcie 3 rozdz. I §1 każdej parze liczb rzeczywistych (x, y) odpowiada dokładnie jeden punkt P płaszczyzny \mathbb{R}^2 taki, że x jest odciętą zaś y rzędną punktu P . Wobec tego możemy używać zapisu

$$P = (x, y)$$

utożsamiając punkty płaszczyzny \mathbb{R}^2 z parami liczb rzeczywistych.

Punkt przecięcia osi $O = (0, 0)$ nazywamy *początkiem układu współrzędnych*. Umówimy się, że dodatnia półoś x -ów po obrocie o kąt prosty wykonanym przeciwnie do ruchu

wskazówek zegara pokrywa się z dodatnią półosią y -ów (rys. 2). Umowa ta określa *orientację układu współrzędnych* (zwaną orientacją dodatnią).



[rys. 2]

Wykresem funkcji f będziemy nazywali zbiór punktów płaszczyzny \mathbb{R}^2 postaci (x, y) , gdzie $y = f(x)$, $x \in D$.

A oto parę przykładów funkcji:

(i) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$
określona dla $x \in [-1, 1]$;

(ii) $g(x) = \log|x|(1-|x|)$
określona dla $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ (przez \log rozumiemy tu logarytm dziesiętny);

(iii) $h(x) = \frac{2x}{x^2 - 7x + 10}$
określona dla $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty)$ (jak łatwo sprawdzić, mianownik jest zerem dla $x = 2$ oraz $x = 5$);

(iv) $d(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \end{cases}$
określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Funkcję d , zwaną *funkcją Dirichleta*¹, można również określić jako granicę pewnego ciągu o wyrazach zależnych od x (por. zadanie 11 rozdz. II §1).

Omówimy teraz dokładniej funkcje, które zazwyczaj obejmuje się wspólną nazwą *funkcji elementarnych*.

2. Wielomiany. Dla ustalonej liczby całkowitej nieujemnej n funkcję

$$w(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

¹Peter Gustaw Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), matematyk niemiecki, w 1826 r. został docentem na uniwersytecie we Wrocławiu, w późniejszych latach był profesorem uniwersytetu w Berlinie, następnie w Getyndze. Zajmował się teorią liczb, teorią szeregów i rachunkiem całkowym. Jako jeden z pierwszych zastosował metody analityczne w teorii liczb.

nazywamy *wielomianem stopnia n* , zaś liczby rzeczywiste a_j ($j = 0, 1, \dots, n$) *współczynnikami* wielomianu w . Wielomian jest funkcją określoną dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

W szczególności wielomian stopnia $n \leq 1$ jest *funkcją liniową*

$$(1) \quad f(x) = ax + b,$$

wielomian stopnia $n = 0$ jest *funkcją stałą*

$$f(x) = c.$$

Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta, wykresem funkcji stałej jest prosta równoległa do osi x -ów.

3. Funkcje wymierne. *Funkcją wymierną* nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie P, Q są wielomianami, przy czym Q nie jest funkcją stałą. Funkcja wymierna jest określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ nie będącego miejscem zerowym mianownika.

4. Funkcje monotoniczne i funkcja odwrotna. Mówimy, że funkcja f jest *rosnąca*, jeżeli

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$

ściśle rosnąca, jeżeli

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$

malejąca, jeżeli

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$

ściśle malejąca, jeżeli

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2.$$

Funkcje (ściśle) rosnące lub (ściśle) malejące obejmujemy wspólną nazwą funkcji (*ściśle*) *monotonicznych*.

Przykład 1. Funkcja stała jest jednocześnie rosnąca i malejąca. Funkcja liniowa (1) jest ściśle rosnąca, gdy $a > 0$, ściśle malejąca, gdy $a < 0$, rosnąca i malejąca, gdy $a = 0$ (wtedy oczywiście jest funkcją stałą).

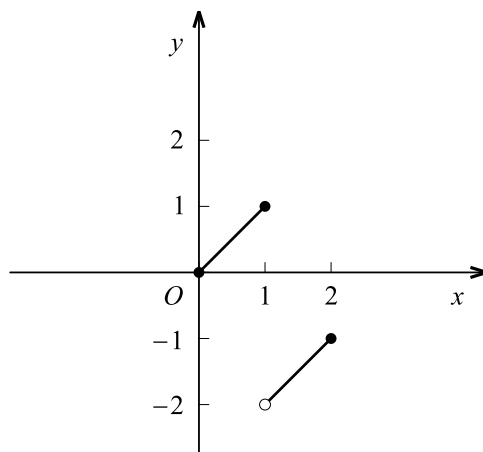
Mówimy, że funkcja f jest *różnowartościowa*, jeżeli

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 \neq x_2.$$

Oczywiście każda funkcja ściśle monotoniczna jest różnowartościowa, ale nie na odwrót. Na przykład funkcja

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 3 & \text{dla } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

jest różnowartościowa ale nie jest ściśle monotoniczna w przedziale $[0, 2]$ (rys. 3).



[rys. 3]

Jeżeli f jest funkcją różnowartościową, to możemy określić nową funkcję g przyjmując

$$(3) \quad g(y) = x$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(4) \quad f(x) = y.$$

Funkcja g jest dobrze określona na zbiorze wartości funkcji f , gdyż na mocy założenia każdej liczbie y należącej do tego zbioru odpowiada dokładnie jedna liczba x taka, że zachodzi (4). Funkcję g nazywamy *funkcją odwrotną* do funkcji f . Używane jest oznaczenie

$$g = f^{-1}.$$

Aby znaleźć funkcję odwrotną f^{-1} należy rozwiązać równanie (4) względem x (nie zawsze można to zrobić efektywnie).

Przykład 2. Niech

$$f(x) = ax + b$$

gdzie $a \neq 0$. Funkcja f jest ściśle monotoniczna (por. Przykład 1), a więc różnowartościowa. Rozwiązując równanie

$$y = ax + b$$

względem x otrzymujemy

$$x = \frac{y - b}{a}$$

zatem

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

Funkcja odwrotna jest również liniowa. Obie funkcje f , f^{-1} są określone na całym zbiorze \mathbb{R} .

Twierdzenie 1. *Jeżeli f jest funkcją ściśle rosnącą (ściśle malejącą), to f^{-1} ma tę samą własność.*

DOWÓD. Dowód podamy dla funkcji ściśle rosnącej. Załóżmy, że

$$y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$$

wobec tego

$$x_1 = f^{-1}(y_1), \quad x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Gdyby było $x_1 \geq x_2$, to na mocy założenia otrzymalibyśmy

$$y_1 \geq y_2$$

wbrew założeniu. □

5. Funkcja $\sqrt[n]{x}$. Funkcja

$$(5) \quad f(x) = x^n$$

zwana *funkcją potęgową o wykładniku naturalnym n* jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Z reguły mnożenia nierówności wynika, że

$$0 < x_1^n < x_2^n$$

dla $0 \leq x_1 < x_2$, zatem f jest ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$ i przyjmuje w tym przedziale wartości dodatnie. Zgodnie z rozważaniami punktu 7 rozdz. I §2 równanie

$$y = x^n$$

ma dla dowolnego $y \geq 0$ dokładnie jedno rozwiązanie

$$x = \sqrt[n]{y}.$$

Wobec tego

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

jest funkcją odwrotną do funkcji potęgowej f danej wzorem (5). Funkcja g jest określona w całym przedziale $[0, \infty)$.

6. Potęga o wykładniku wymiernym. Potęgę

$$a^w \quad (w \in W)$$

określimy przy założeniu $a > 0$. Liczbę a nazywamy *podstawą potęgi*, liczbę w *wykładnikiem potęgi*.

Przyjmując

$$(6) \quad \begin{aligned} a^1 &= a, & a^{n+1} &= a^n \cdot a \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \\ a^0 &= 1, \\ a^w &= \sqrt[q]{a^p} \quad \text{gdzie } w = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N} \\ a^{-w} &= \frac{1}{a^w}, \end{aligned}$$

udowodnimy

Twierdzenie 2. *Potęga o wykładniku wymiernym ma następujące własności:*

$$(7) \quad \begin{aligned} (i) \quad & a^w > 0, \\ (ii) \quad & a^{w+v} = a^w a^v, \\ (iii) \quad & (a^w)^v = a^{wv} \quad (a, b > 0; w, v \in W) \\ (iv) \quad & (ab)^w = a^w b^w \\ (v) \quad & \text{jeżeli } w < v, \text{ to} \\ & a^w < a^v \quad \text{dla } a > 1, \\ & a^w > a^v \quad \text{dla } a < 1. \end{aligned}$$

DOWÓD. Punkt (i) wynika z definicji potęgi. Dla dowodu punktów (ii) - (iv) zauważmy najpierw, że dla wykładników v, w naturalnych wynikają one z przemienności i łączności mnożenia liczb rzeczywistych. Dowód dla dowolnych wykładników wymiernych poprzedzimy lematami.

Lemat 1. *Jeżeli*

$$a^q = b^q \quad (a, b > 0, q \in \mathbb{N})$$

to

$$a = b.$$

DOWÓD. Przypuśćmy, że $a > b$ - wówczas zgodnie z regułą mnożenia nierówności mamy $a^q > b^q$ wbrew założeniu. Podobnie okazujemy, że nie może być $a < b$. \square

Lemat 2. *Przyjmując*

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[q]{a}}, \quad \beta = \sqrt[q]{\frac{1}{a}} \quad (a > 0, q \in \mathbb{N})$$

mamy

$$\alpha = \beta.$$

DOWÓD. Zgodnie z wprowadzonym oznaczeniem

$$\sqrt[q]{a} = \frac{1}{\alpha}$$

zatem zgodnie z definicją pierwiastka (por. punkt 7 rozdz. I §2)

$$a = \frac{1}{\alpha^q}, \quad \frac{1}{a} = \beta^q$$

skąd wynika

$$\alpha^q = \beta^q$$

a to w oparciu o lemat 1 daje tezę. □

Lemat 3. *Dla $a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ mamy*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

DOWÓD. Dla $p \geq 0$ teza lematu wynika ze wzorów (6). Jeżeli $p < 0$, to zgodnie ze wzorami (6)

$$a^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}}$$

oraz

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^{-p}}}.$$

Korzystając z lematu 2 dostajemy tezę. □

Lemat 4. *Dla $a > 0, p \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}$ mamy*

$$(a^p)^s = a^{ps}.$$

DOWÓD. Dla $p \geq 0$ teza lematu wynika ze wzorów (6). Dla $p < 0$ mamy, ponownie korzystając ze wzorów (6) i opierając się na własnościach potęgi o wykładniku naturalnym

$$\begin{aligned} (a^p)^s &= \left(\frac{1}{a^{-p}}\right)^s \\ &= \frac{1}{a^{-ps}} = a^{ps}. \end{aligned}$$

□

Lemat 5. *Jeżeli $p, r \in Z$, to*

$$a^p a^r = a^{p+r}.$$

DOWÓD. Dla $p, r > 0$ teza lematu była już omawiana (jest to własność (ii) dla wykładników naturalnych). Jeżeli przynajmniej jedna z liczb p, r jest zerem, równość jest oczywista. Pozostają do rozważenia przypadki

a.) liczby p, r są różnych znaków, niech na przykład $p < 0, r > 0$;

b.) $p < 0, r < 0$.

W przypadku b.) mamy zgodnie z (6)

$$\begin{aligned} a^p a^r &= \frac{1}{a^{-p}} \frac{1}{a^{-r}} \\ &= \frac{1}{a^{-p-r}} = \frac{1}{a^{-(p+r)}} = a^{p+r} \end{aligned}$$

zaś w przypadku a.)

$$a^p a^r = \frac{1}{a^{-p}} a^r = \frac{a^r}{a^{-p}}.$$

W ostatnim ułamku mamy w liczniku i w mianowniku potęgę o wykładniku naturalnym. Po skróceniu (należy rozróżnić przypadki: $-p > r, -p = r, -p < r$) dostajemy tezę lematu. \square

Możemy teraz udowodnić własność (ii). Niech $w = \frac{p}{q}, v = \frac{r}{s}$ ($p, r \in Z; q, s \in \mathbb{N}$) i niech

$$x = a^{w+v}, \quad y = a^w, \quad z = a^v.$$

Wystarczy udowodnić, że

$$(8) \quad x^{qs} = (yz)^{qs}$$

i skorzystać z lematu 1. Zgodnie z lematem 3 mamy

$$(9) \quad x^{qs} = a^{p^s+r^q}.$$

Z drugiej strony opierając się na własnościach (iii), (iv) dla wykładników naturalnych oraz na lematach 4, 5 dostajemy

$$\begin{aligned} (10) \quad (yz)^{qs} &= (y^q)^s (z^s)^q = (a^p)^s (a^r)^q \\ &= a^{ps} a^{rq} = a^{ps+rq}. \end{aligned}$$

Równość (8) wynika z (9) i (10).

Dalszy ciąg dowodu twierdzenia poprzedzimy kolejnymi lematami.

Lemat 6. *Jeśli*

$$x = \sqrt[q]{ab}, \quad y = \sqrt[q]{a}, \quad z = \sqrt[q]{b},$$

$$a, b > 0, \quad q \in \mathbb{N}.$$

to zachodzi równość

$$x = yz.$$

DOWÓD. Z definicji pierwiastka wynika, że

$$x^q = ab, \quad y^q = a, \quad z^q = b$$

wobec tego (na mocy własności (iv) dla wykładników naturalnych)

$$x^q = y^q z^q = (yz)^q.$$

Stąd w oparciu o lemat 1 dostajemy tezę. □

Lemat 7. *Dla $a > 0, q, s \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$(\sqrt[q]{a})^s = \sqrt[q]{a^s}.$$

DOWÓD polega na indukcji względem s i wykorzystaniu lematu 6. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi. □

Lemat 8. *Zachodzi równość*

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r = a^{\frac{pr}{q}}$$

dla $a > 0, p, r \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

DOWÓD. Oznaczmy przez α, β odpowiednio lewą i prawą stronę równości. Dla $r = 0$ równość jest oczywista, gdyż $\alpha = \beta = 1$. Przeprowadzimy dowód dla $r \neq 0$ rozróżniając przypadki $r > 0$ oraz $r < 0$. Na mocy lematu 3 i definicji pierwiastka

$$\beta^q = a^{pr}.$$

Wystarczy zatem okazać, że

$$(11) \quad \alpha^q = a^{pr}$$

a następnie skorzystać z lematu 1.

Jeżeli $r > 0$, to opierając się na własności (iii) dla wykładników naturalnych mamy

$$\alpha^q = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{rq}.$$

Korzystając z lematów 3, 4, 7 otrzymujemy stąd kolejno

$$\begin{aligned} \alpha^q &= \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{rq} = \sqrt[q]{(a^p)^{rq}} = \\ &= \sqrt[q]{a^{prq}} = a^{pr}. \end{aligned}$$

Dla $r < 0$ mamy z definicji potęgi o wykładniku ujemnym

$$\alpha^q = \left(\frac{1}{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{-r}} \right)^q$$

a zatem na mocy (iii) dla wykładników naturalnych

$$\alpha^q = \frac{1}{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{-rq}}.$$

Ponownie korzystając z lematów 3, 4, 7 otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned} \alpha^q &= \frac{1}{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{-rq}} = \frac{1}{\sqrt[q]{\left(a^p\right)^{-rq}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-prq}}} = \frac{1}{a^{-pr}} = a^{pr}. \end{aligned}$$

Równość (11) została udowodniona w obu przypadkach. Dowód lematu jest zakończony. \square

Udowodnimy teraz własność (iii). Oznaczmy przez x, y odpowiednio lewą i prawą stronę równości i niech

$$w = \frac{p}{q}, \quad v = \frac{r}{s} \quad (p, r \in \mathbb{Z}; q, s \in \mathbb{N}).$$

Na mocy lematu 3

$$y = \sqrt[q^s]{a^{pr}}$$

zatem z definicji pierwiastka

$$(12) \quad y^{qs} = a^{pr}.$$

Ponownie korzystając z lematu 3 i definicji pierwiastka otrzymujemy

$$x^s = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r$$

a więc zgodnie z lematem 8

$$x^s = a^{\frac{pr}{q}}.$$

Wykorzystując lematy 3 i 7 oraz własność (iii) dla wykładników naturalnych dostajemy stąd

$$\begin{aligned} x^{qs} &= \left(x^s\right)^q = \left(a^{\frac{pr}{q}}\right)^q = \\ &= \left(\sqrt[q]{a^{pr}}\right)^q = \sqrt[q]{a^{prq}} \end{aligned}$$

skąd, ponownie korzystając z lematu 3,

$$(13) \quad x^{qs} = a^{pr}.$$

W oparciu o lemat 1 dostajemy z (12), (13) żadaną równość $x = y$. \square

Udowodnimy jeszcze dwa proste lematy.

Lemat 9. Dla $a > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość

$$a^p = \frac{1}{a^{-p}}.$$

DOWÓD. Dla $p = 0$ równość jest oczywista (obie strony są równe 1), dla $p < 0$ wynika z definicji potęgi o wykładniku wymiernym ujemnym, zaś dla $p > 0$ również na mocy tej definicji

$$\frac{1}{a^{-p}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)} = a^p.$$

□

Lemat 10. Dla dowolnych $a, b > 0, p \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość

$$(ab)^p = a^p b^p.$$

DOWÓD. Dla $p = 0$ obie strony są równe 1, zaś dla $p > 0$ jest to własność (iv) dla wykładników naturalnych. Natomiast dla $p < 0$ mamy, ponownie korzystając z (iv) dla wykładników naturalnych i z lematu 9

$$\begin{aligned} a^p b^p &= \frac{1}{a^{-p}} \frac{1}{b^{-p}} \\ &= \frac{1}{a^{-p} b^{-p}} = \frac{1}{(ab)^{-p}} = (ab)^p \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. □

Możemy teraz udowodnić własność (iv). Przyjmując

$$w = \frac{p}{q} \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$$

wprowadzimy oznaczenia

$$x = (ab)^{\frac{p}{q}}, \quad y = a^{\frac{p}{q}}, \quad z = b^{\frac{p}{q}}.$$

Aby udowodnić żadaną równość $x = yz$ wystarczy okazać, że

$$(14) \quad x^q = (yz)^q$$

i skorzystać z lematu 1. Z lematu 3 wynika, że

$$x = \sqrt[q]{(ab)^p}, \quad y = \sqrt[q]{a^p}, \quad z = \sqrt[q]{b^p}.$$

Wobec tego na mocy definicji pierwiastka

$$x^q = (ab)^p, \quad y^q = a^p, \quad z^q = b^p,$$

co po zastosowaniu lematu 10 daje

$$x^q = a^p b^p = y^q z^q$$

a stąd po wykorzystaniu (iv) dla wykładników naturalnych wynika (14).

Pozostała do udowodnienia własność (v). Najpierw zauważmy, że dla dowolnej liczby wymiernej w

$$1 = a^{w-w} = a^w a^{-w}$$

na mocy własności (ii), a stąd

$$(15) \quad a^{-w} = \frac{1}{a^w} \quad \text{dla} \quad a > 0, w \in W.$$

Dowód własności (v) podamy dla $a > 1$. Dla $a < 1$ rozumowanie jest podobne i pozostawiamy je Czytelnikowi. Korzystając z (15) i z własności (ii) możemy nierówność (7) zapisać w równoważnej postaci

$$(16) \quad a^{v-w} > 1$$

dla $w < v$, zaś dla dowodu (16) wystarczy okazać, że

$$(17) \quad a^w > 1$$

dla $a > 1$ i dowolnej liczby wymiernej $w > 0$. Dowód (17) nie nastręcza trudności. Przede wszystkim dla dowolnego $b > 1, q \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[q]{b} > 1$$

-gdymy bowiem zachodziła nierówność przeciwna, to podnosząc obie strony do q -tej potęgi otrzymalibyśmy $b \leq 1$, co przeczy założeniu. Jeżeli teraz $w = \frac{p}{q}$, ($p, q \in \mathbb{N}$), to na mocy (6)

$$a^w = \sqrt[q]{b}$$

gdzie $b = a^p > 1$, zatem (17) zachodzi i w tym przypadku.

Dowód twierdzenia jest zakończony. □

7. Potęga o dowolnym wykładniku rzeczywistym. Dla dowolnie ustalonych $a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ przyjmujemy

$$(18) \quad a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{w_n},$$

jeżeli $\{w_n\}$ jest ciągiem liczb wymiernych takim, że

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \alpha.$$

Podobnie jak w punkcie 6 liczbę a nazwiemy *podstawą potęgi* zaś liczbę α - *wykładnikiem potęgi*.

Oczywiście należy wykazać, że przyjęta definicja jest poprawna, co sprowadza się do udowodnienia, że

(A) dla dowolnie ustalonego $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg liczb wymiernych spełniający warunek (19);

(B) granica po prawej stronie (18) istnieje i nie zależy od wyboru ciągu $\{w_n\}$.

DOWÓD (A). Na mocy twierdzenia o liniowej gęstości zbioru liczb wymiernych (twierdzenie 5 rozdz. I §2) dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba wymierna w_n taka, że

$$(20) \quad \alpha - \frac{1}{n} < w_n < \alpha - \frac{1}{n+1}.$$

Z nierówności (20) i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że spełniony jest warunek (19). Ponadto z (20) wynika, że

$$w_n < \alpha - \frac{1}{n+1} < w_{n+1}$$

zatem $\{w_n\}$ jest ciągiem rosnącym. □

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że $a > 1$ (w przypadku $a \leq 1$ rozumowania przebiegają podobnie i pozostawiamy je Czytelnikowi jako ćwiczenie).

DOWÓD (B). Z twierdzenia 2 punkt (v) wynika, że ciąg $\{a^{w_n}\}$ jest również rosnący oraz że jest on ograniczony z góry, gdyż nierówność

$$w_n < \alpha < [\alpha] + 1 = M$$

pociąga za sobą

$$a^{w_n} < a^M.$$

Na podstawie twierdzenia 5 rozdz. II §2 ciąg $\{a^{w_n}\}$ jest zbieżny. Granica po prawej stronie (18) istnieje więc, gdy jako ciąg liczb wymiernych aproksymujący α obierzemy ciąg $\{w_n\}$ określony w dowodzie (A). Aby wykazać, że granica ta nie zależy od wyboru ciągu aproksymującego wykładnik α udowodnimy najpierw

Lemat 11. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$|a^w - 1| < \varepsilon$$

dla wszystkich wymiernych w spełniających nierówność

$$|w| < \delta.$$

DOWÓD przeprowadzimy dla $w \geq 0$, dla $w < 0$ rozumowanie jest podobne i nie będziemy go powtarzać.

Jeśli liczba w spełnia nierówność

$$(21) \quad 0 \leq w \leq \frac{1}{n}$$

dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to zgodnie z twierdzeniem 2

$$(22) \quad 1 \leq a^w \leq \sqrt[n]{a}.$$

Przypomnijmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

(por. Przykład 13 rozdz. II §1). Wobec tego z (22) wynika, że do dowolnie ustalonego ε można dobrać $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby dla w spełniających (21) przy $n \geq n_\varepsilon$ zachodziła nierówność

$$1 < a^w < 1 + \varepsilon.$$

Zatem wystarczy przyjąć

$$\delta = \frac{1}{n_\varepsilon}$$

co kończy dowód lematu. □

Przypuśćmy teraz, że mamy inny ciąg liczb wymiernych $\{v_n\}$ również zbieżny do α . Na mocy twierdzenia 1 punkt (ii)

$$(23) \quad a^{v_n} = a^{w_n} a^{v_n - w_n}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - w_n) = 0,$$

więc do liczby δ , o której mowa w lemacie 11, można dobrać N tak, by dla $n > N$ było

$$(24) \quad |v_n - w_n| < \delta.$$

Zgodnie z lematem 11 z nierówności (24) wynika

$$|a^{v_n - w_n} - 1| < \varepsilon$$

dla $n > N$, a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{v_n - w_n} = 1.$$

Stosując do (23) twierdzenie o granicy iloczynu otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{w_n}$$

co kończy dowód (B). □

Uwaga. Jeżeli α jest liczbą wymierną, to w definicji (18) możemy przyjąć $w_n = \alpha$ dla $n \in \mathbb{N}$. Widać stąd, że dla wykładników wymiernych nowa definicja potęgi pokrywa się z poprzednią wprowadzoną w punkcie 6.

Twierdzenie 3. *Potęga o wykładniku rzeczywistym ma następujące własności:*

- (i) $a^\alpha > 0$,
- (ii) $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$,
- (iii) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$,
- (iv) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$,
- (v) jeżeli $\alpha < \beta$, to
 - $a^\alpha < a^\beta$ gdy $a > 1$,
 - $a^\alpha > a^\beta$ gdy $a < 1$,
- (vi) jeżeli $0 < a < b$, $\alpha > 0$ to
 - $a^\alpha < b^\alpha$ oraz $a^{-\alpha} > b^{-\alpha}$.

DOWÓD zaczniemy od punktów (ii) i (iv). Niech $\{w_n\}$, $\{v_n\}$ będą ciągami liczb wymiernych takimi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \beta.$$

Na mocy twierdzenia 1 mamy

$$a^{w_n+v_n} = a^{w_n} a^{v_n}$$

a stąd po przejściu do granicy dostajemy (ii). Podobnie przebiega dowód (iv).

Dowód (iii) zaczniemy od lematów.

Lemat 12. *Jeżeli $a > 0$ oraz $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunek*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

to

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[q]{a_n} = \sqrt[q]{a}$$

dla dowolnie ustalonego $q \in \mathbb{N}$.

DOWÓD. Przypuśćmy że nie jest prawdą (25), wobec tego (por. rozdz. II §1 punkt 2) istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że nierówność epsilonowa nie zachodzi dla $\varepsilon = \varepsilon_0$ po odrzuceniu dowolnej skończonej ilości wyrazów ciągu $\{\sqrt[q]{a_n}\}$. Zatem do dowolnego $k \in \mathbb{N}$ można dobrać wskaźnik $n_k > k$ tak, że zachodzi jedna z nierówności

$$\sqrt[q]{a_{n_k}} \leq \sqrt[q]{a} - \varepsilon_0$$

lub

$$\sqrt[q]{a_{n_k}} \geq \sqrt[q]{a} + \varepsilon_0$$

dla $k \in \mathbb{N}$. Z nierówności tych otrzymujemy

$$a_{n_k} \leq (\sqrt[q]{a} - \varepsilon_0)^q = a_1 < a$$

lub

$$a_{n_k} \geq (\sqrt[q]{a} + \varepsilon_0)^q = a_2 > a.$$

Oznacza to, że istnieje otoczenie (a_1, a_2) punktu a nie zawierające żadnego wyrazu podciągu $\{a_{n_k}\}$, co przeczy założeniu lematu. \square

Natychmiastowym wnioskiem z lematu 12 jest

Lemat 13. *Przy założeniach lematu 12*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^w = a^w$$

dla dowolnie ustalonej liczby wymiernej w .

DOWÓD. Niech

$$w = \frac{p}{q} \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}).$$

Na podstawie lematu 3 (punkt 6)

$$a_n^w = \sqrt[q]{a_n^p}.$$

Z twierdzeń o granicy iloczynu i ilorazu wynika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = a^p,$$

zatem na mocy lematu 12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^w = \sqrt[q]{a^p} = a^w.$$

□

Lemat 14. *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\eta > 0$ taka, że*

$$(26) \quad |a^\alpha - 1| < \varepsilon$$

dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$ spełniających nierówność

$$|\alpha| < \eta.$$

DOWÓD. Niech $\{w_n\}$ będzie ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do α i niech $\eta = \frac{1}{2}\delta$. Wówczas dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$|w_n| < \delta$$

zatem zgodnie z lematem 11 (z zastąpieniem ε przez $\frac{\varepsilon}{2}$)

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < a^{w_n} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przechodząc do granicy zgodnie z (18) dostajemy

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq a^\alpha \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$$

co daje (26).

□

Lemat 15. *Jeżeli $\{\alpha_n\}$ jest dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunek*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\alpha_n} = 1.$$

DOWÓD. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i niech η będzie liczbą dobraną do ε , o której mowa w lemacie 14. Na mocy założenia istnieje liczba N taka, że dla $n > N$

$$|\alpha_n| < \eta.$$

Z lematu 14 wynika, że wobec tego dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$|a^{\alpha_n} - 1| < \varepsilon$$

co kończy dowód lematu. □

Przechodząc do dowodu (iii) załóżmy, że

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \beta$$

gdzie w_n, v_n są liczbami wymiernymi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla dowolnie ustalonej liczby wymiernej w mamy

$$(a^{w_n})^w = a^{w_n w}$$

na mocy twierdzenia 2, skąd po przejściu do granicy wynika zgodnie z lematem 13

$$(28) \quad (a^\alpha)^w = a^{\alpha w}$$

dla dowolnego $w \in W$. Przyjmując $w = v_n$ w równości (28) i korzystając z udowodnionego już punktu (ii) otrzymujemy

$$(a^\alpha)^{v_n} = a^{(\alpha - w_n)v_n} a^{w_n v_n}$$

co po przejściu do granicy w oparciu o lemat 15 daje tezę (iii).

Udowodnimy teraz (v) zakładając $a > 1$ (dowód dla $a < 1$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie). Zauważmy najpierw, że ciągi $\{w_n\}, \{v_n\}$ spełniające (26) można obrać w taki sposób, by pierwszy z nich był ciągiem rosnącym a drugi ciągiem malejącym. Wystarczy w tym celu przyjąć

$$\alpha - \frac{1}{n} < w_n < \alpha - \frac{1}{n+1}, \quad \beta + \frac{1}{n+1} < v_n < \beta + \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, co jest możliwe wobec liniowej gęstości zbioru liczb wymiernych. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$w_n < v_n$$

a zatem na mocy twierdzenia 2

$$a^{u_n} < a^{v_n}$$

co po przejściu do granicy daje

$$(29) \quad a^\alpha \leq a^\beta.$$

Korzystając z udowodnionego już punktu (ii) i rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2 okazujemy, że dla dowodu (v) wystarczy okazać, że

$$(30) \quad a^\gamma > 1$$

dla $\gamma > 0$. Obierzmy liczbę $k \in \mathbb{N}$ tak, by

$$0 < \frac{1}{k} < \gamma$$

(jest to możliwe na mocy zasady Archimedesesa - por. twierdzenie 2 rozdz. I §2). Wówczas przyjmując $\alpha = \frac{1}{k}$, $\beta = \gamma$ w (29) dostajemy

$$a^{\frac{1}{k}} \leq a^\gamma.$$

Z drugiej strony na mocy twierdzenia 2 mamy

$$1 = a^0 < a^{\frac{1}{k}}.$$

Ostatnie dwie nierówności dają (30) co kończy dowód (v).

Możemy teraz udowodnić punkt (i). Jeżeli $\alpha \geq 0$ to zgodnie z (29)

$$a^\alpha \geq 1 > 0.$$

Jeżeli $\alpha < 0$, to korzystając z (ii) okazujemy łatwo, że

$$a^\alpha = \frac{1}{a^{-\alpha}}$$

a więc i w tym przypadku mamy nierówność (i).

Pozostał do udowodnienia punkt (vi). Z założenia mamy

$$\left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1 < \frac{b}{a}$$

wobec tego na mocy (v)

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{-\alpha} < 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$$

a z tej nierówności wynika (vi).

Twierdzenie jest udowodnione. □

8. Funkcje: wykładnicza, logarytm i potęgowa. Funkcją wykładniczą o podstawie a (gdzie $a > 0$ jest daną liczbą) nazywamy funkcję

$$(31) \quad f(x) = a^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Zgodnie z twierdzeniem 3 funkcja wykładnicza jest ściśle rosnąca gdy $a > 1$ i ściśle malejąca gdy $a < 1$. W dalszym ciągu będziemy rozważali wyłącznie funkcję wykładniczą o podstawie $a > 1$. Bardzo ważny w analizie jest przypadek gdy $a = e$ (por. rozdz. II §2 punkt 5) gdyż, jak zobaczymy w dalszym ciągu, taka funkcja wykładnicza ma szczególnie wygodne własności rachunkowe. Używane jest oznaczenie

$$e^x = \exp x.$$

Funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej (31) nazywamy *logarytmem* (lub *funkcją logarytmiczną*) o podstawie a . Przy założeniu $a > 1$ jest to funkcja ściśle rosnąca (por. twierdzenie 1). Z definicji równania

$$(32) \quad x = a^y$$

oraz

$$y = \log_a x$$

są równoważne. Funkcja \log_a jest określona na zbiorze wartości funkcji wykładniczej. Z twierdzenia 3 wynika, że zbiór ten zawiera się w przedziale $(0, \infty)$. W dalszym ciągu wykładu zobaczymy, że jest on identyczny z przedziałem $(0, \infty)$, zatem funkcja logarytm określona wzorem (33) jest określona dla wszystkich $x > 0$. W przypadku gdy $a = e$ wzory (32), (33) określają *logarytm naturalny* który oznaczamy symbolem \log (bez podawania podstawy). Z własności potęgi o wykładniku rzeczywistym wynikają własności rachunkowe logarytmu, które sformułujemy w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 4. Dla $a > 1$, $x, x_1, x_2 > 0$ oraz dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory

- (i) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,
- (ii) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

DOWÓD przeprowadzimy przy dodatkowym założeniu, że liczby x, x_1, x_2 należą do zbioru wartości funkcji wykładniczej (31). Wobec tego

$$x = a^y, \quad x_1 = a^{y_1}, \quad x_2 = a^{y_2}$$

dla pewnych $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a to oznacza, że

$$(34) \quad y = \log_a x, \quad y_1 = \log_a x_1, \quad y_2 = \log_a x_2.$$

Na mocy twierdzenia 3 punkt (ii)

$$x_1 x_2 = a^{y_1 + y_2}$$

zatem

$$(35) \quad y_1 + y_2 = \log_a(x_1 x_2)$$

zaś wobec punktu (iii) tegoż twierdzenia

$$x^\alpha = a^{\alpha y}$$

skąd

$$(36) \quad \alpha y \log_a x^\alpha.$$

Porównując (34), (35), (36) dostajemy tezę twierdzenia. □

Przy danej liczbie $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcję

$$f(x) = x^\alpha \quad (x > 0)$$

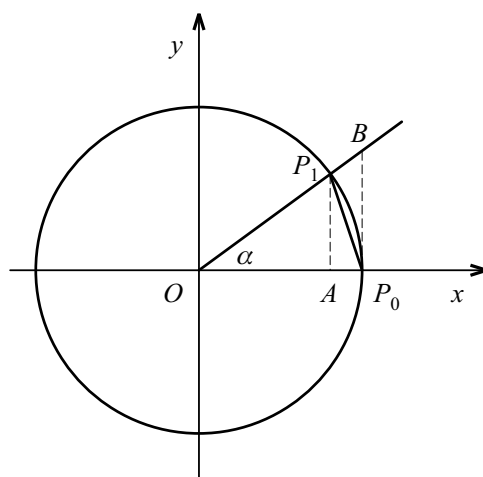
nazywamy *funkcją potęgową o wykładniku α* . Zgodnie z twierdzeniem 3 punkt (vi) jest ona ściśle rosnąca, gdy $\alpha > 0$ i ściśle malejąca, gdy $\alpha < 0$.

9. Funkcje trygonometryczne. Wprowadźmy na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych okrąg o środku w początku układu i promieniu jednostkowym, oznaczmy przez P_0 jego punkt przecięcia z dodatnią półosią x -ów (rys. 4) i niech $P_1 = (x_1, y_1)$ będzie dowolnie obranym punktem okręgu. Oznaczmy przez α kąt, o jaki należy obrócić półprostą OP_0 tak, by punkt P_0 pokrył się z punktem P_1 zaś przez $s(\alpha)$ długość łuku okręgu przebieganego przy tym obrocie przez punkt P_0 . Jako miarę kąta α (zwaną *miarą łukową*) przyjmujemy

(i) $s(\alpha)$ gdy obrót odbywał się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

(ii) $-s(\alpha)$ gdy obrót odbywał się zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

W dalszym ciągu miarę łukową kąta α będziemy oznaczać tą samą literą α .



[rys. 4]

Przypomnijmy znane z kursu szkolnego definicje funkcji trygonometrycznych kąta α (którego miara może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste, dodatnie lub ujemne)

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= y_1, & \cos \alpha &= x_1, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_1}{x_1} \quad (x_1 \neq 0), & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{x_1}{y_1} \quad (y_1 \neq 0)\end{aligned}$$

Z sensu geometrycznego podanych definicji łatwo wynikają własności tych funkcji:

$$\text{a.) okresowość} \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\text{b.)} \quad \sin 0 = \sin \pi = 0, \quad \sin \frac{1}{2}\pi = 1, \quad \sin \frac{3}{2}\pi = -1,$$

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{1}{2}\pi = \cos \frac{3}{2}\pi = 0, \quad \cos \pi = -1,$$

$$\text{c.)} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\text{d.)} \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Przypomnijmy jeszcze wzory

$$(37) \quad \begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

z których wynika po uwzględnieniu d.)

$$(38) \quad \begin{aligned}2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta), \\ 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \\ 2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Wzory (38) mają zastosowanie w rachunku całkowym.

Zakładając, że $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ udowodnimy teraz pewne nierówności. Oznaczmy przez A rzut prostopadły punktu P_1 na oś x -ów i przez B punkt przecięcia prostopadłej do osi x -ów wystawionej w punkcie P_0 z półprostą OP_1 (rys. 4). Z trójkąta P_1AP_0 wynika, że

$$|P_1A| < |P_0P_1|,$$

ponadto długość cięciwy P_0P_1 jest mniejsza niż długość łuku P_0P_1 , zatem

$$0 < \sin \alpha < \alpha.$$

Jak widać z rysunku, wycinek koła P_0OP_1 jest zawarty w trójkącie P_0OB , zaś odpowiednia nierówność dla pól ma postać

$$\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\operatorname{tg} \alpha.$$

Z dwóch ostatnich nierówności wynika, że

$$(39) \quad 0 < \sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$$

a stąd

$$(40) \quad \cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1.$$

Z trójkąta AOP_1 mamy ponadto

$$1 - y_1 < x_1$$

czyli

$$(41) \quad 1 - \sin \alpha < \cos \alpha < 1.$$

Nierówności (39), (40), (41) będą wykorzystane w dalszym ciągu przy badaniu funkcji trygonometrycznych.

10. Funkcje odwrotne do trygonometrycznych. Funkcje trygonometryczne

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x$$

są ściśle monotoniczne odpowiednio w przedziałach

$$\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right], \quad [0, \pi], \quad \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right), \quad (0, \pi)$$

istnieją więc w tych przedziałach funkcje odwrotne. Przyjmujemy, że

$$\begin{aligned} y = \arcsin x & \quad \text{gdy} \quad x = \sin y, \quad -\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi, \\ y = \arccos x & \quad \text{gdy} \quad x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi, \\ y = \operatorname{arctg} x & \quad \text{gdy} \quad x = \operatorname{tg} y, \quad -\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi, \\ y = \operatorname{arcctg} x & \quad \text{gdy} \quad x = \operatorname{ctg} y, \quad 0 < y < \pi. \end{aligned}$$

Wprowadzone w ten sposób funkcje odwrotne do trygonometrycznych noszą nazwę *funkcji kołowych* lub *cyklometrycznych*.

11. Funkcja złożona (superpozycja). Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$, zaś g funkcją określoną na zbiorze $f(D)$. Możemy wówczas utworzyć nową funkcję

$$h(x) = g(y) \quad \text{gdzie} \quad y = f(x), \quad x \in D$$

czyli

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in D.$$

Funkcję h nazywamy *superpozycją funkcji f, g* (lub *funkcją złożoną z funkcji f, g*). Używany jest zapis

$$h = g \circ f$$

oraz

$$h(x) = (g \circ f)(x).$$

Przykład 3. Niech

$$f(x) = 1 + \sin x, \quad g(y) = \sqrt{y}.$$

Funkcja g jest określona dla $y \geq 0$, zaś

$$f(x) \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wobec tego funkcja złożona

$$h(x) = \sqrt{1 + \sin x}$$

jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 4. Niech

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(y) = y^{\sqrt{3}}.$$

Funkcja potęgowa g jest określona dla $y > 0$. Wobec tego superpozycja $h = g \circ f$ jest określona tylko dla takich wartości argumentu x , dla których f przyjmuje wartości dodatnie. Aby je znaleźć rozwiązujemy nierówność

$$x^2 - 1 > 0,$$

którą można zapisać w równoważnej postaci

$$|x| > 1.$$

Wobec tego funkcja

$$h(x) = (x^2 - 1)^{\sqrt{3}}$$

jest określona na zbiorze $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Na zakończenie wprowadzimy jeszcze dwie definicje. Dla uproszczenia założymy, że funkcja f jest określona na całym zbiorze \mathbb{R} .

Funkcja f jest

parzysta jeżeli $f(-x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$,

nieparzysta jeżeli $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Jak łatwo zauważyć, podane definicje zachowują sens, gdy dziedzina funkcji D ma tę własność, że dla każdego $x \in D$ również $-x \in D$.

Przykładem funkcji parzystej jest funkcja cosinus, gdyż

$$\cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

funkcją nieparzystą jest sinus, gdyż

$$\sin(-x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi y -ów, wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. W jakich przedziałach funkcja

$$y = ax^2 + bx + c$$

jest ściśle monotoniczna? W każdym z tych przedziałów znaleźć funkcję odwrotną. Wskazówka. Przedstawić trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Udowodnić, że

$$(i) \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi,$$

$$(ii) \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{1}{2}\pi.$$

3. Które z podanych funkcji są

- a.) ściśle monotoniczne,
- b.) różnowartościowe.

Narysować ich wykresy. W przypadku funkcji różnowartościowej znaleźć funkcję odwrotną.

$$f(x) = x^2 \quad (x \geq 1),$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla } x \leq 0, \\ x-1 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1, \\ -2 & \text{dla } x = -2, \\ 2 & \text{dla } x = 2, \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}x - \frac{\pi}{2} & \text{dla } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Które z podanych funkcji są
 a.) parzyste,
 b.) nieparzyste?

$$f(x) = x \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x = -2\pi, \\ \cos x & \text{dla } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 1 & \text{dla } x = 2\pi, \end{cases}$$

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych.} \end{cases}$$

5. Na przykładzie funkcji

$$f(x) = x + \pi, \quad g(x) = \sin x$$

pokazać, że funkcje złożone $f \circ g$ oraz $g \circ f$ nie są identyczne (superponowanie funkcji nie jest działaniem przemienne).

6. Znaleźć dziedzinę podanych funkcji:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1},$$

$$g(x) = (x^2 + x - 2)^{\sqrt{2}},$$

$$h(x) = \frac{x \sin x}{x^2 - 2x},$$

$$p(x) = \sqrt{e^{1-x^2} - 1}.$$

Które z tych funkcji są

- a.) parzyste,
 b.) nieparzyste?

7. Niech

$$(A.) f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sin x - \frac{1}{2},$$

$$(B.) f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 - 4.$$

Znaleźć funkcje złożone $f \circ g$ oraz $g \circ f$ i podać ich dziedziny.

8. Udowodnić, że każda funkcja określona dla $x \in \mathbb{R}$ daje się przedstawić jako suma funkcji parzystej i nieparzystej.

Wskazówka. Zauważyć, że funkcja

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

jest parzysta, zaś funkcja

$$h(x) = f(x) - f(-x)$$

jest nieparzysta.

9. Niech f, g będą funkcjami liniowymi spełniającymi nierówności

$$f(a) \leq g(a), \quad f(b) \leq g(b) \quad (a < b).$$

Udowodnić, że nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

jest spełniona w całym przedziale $[a, b]$. Podać sens geometryczny.

§2. Granica funkcji.



1. Definicja granicy funkcji. Niech f będzie funkcją określoną w całym zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} i niech a, g będą dwoma elementami prostej rozszerzonej \mathbb{R}_∞ (a więc liczbami rzeczywistymi lub elementami "niewłaściwymi" $\infty, -\infty$.) Mówimy, że *funkcja f ma granicę g przy $x \rightarrow a$* , jeżeli dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{x_n\}$ spełniającego warunki

$$(\alpha) \quad x_n \neq a \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(\beta) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

zachodzi

$$(\gamma) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g.$$

W przypadku gdy $a \in \mathbb{R}$, zamiast *granica funkcji f przy $x \rightarrow a$* można mówić również *granica funkcji f w punkcie a* . Jeżeli $g = \infty$ lub $g = -\infty$, to mówimy, że funkcja f ma *granicę niewłaściwą przy $x \rightarrow a$* .

Przykład 1. Niech $a = \infty$, niech

$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

i niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki $(\alpha), (\beta)$. Oznacza to, że

$$(1) \quad x_n \rightarrow \infty,$$

zaś warunek (α) jest spełniony automatycznie, gdyż z założenia $x_n \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Okażemy, że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny do ∞ . Niech P będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Musimy udowodnić, że można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(2) \quad f(x_n) > P.$$

Z założenia (1) wynika, że do dowolnie obranej liczby Q można tak dobrać N_1 aby spełniony był warunek

$$x_n > Q \quad \text{dla} \quad n > N_1.$$

Zakładając, że $Q > 1$ mamy stąd

$$x_n^2 + 3x_n - 1 > 4Q - 1.$$

Nierówność (2) będzie spełniona, jeżeli obierzemy liczbę Q tak, by

$$4Q - 1 > P,$$

na przykład możemy przyjąć

$$Q = \max\left(1, \frac{1}{4}P + 1\right).$$

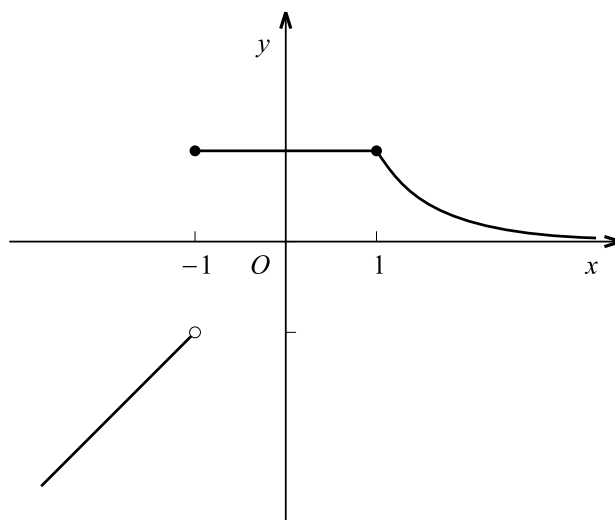
Wówczas przyjmując $N = N_1$ widzimy, że nierówność (2) jest spełniona dla $n > N$, co kończy dowód. Zatem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3x - 1) = \infty.$$

□

Przykład 2. Niech (rys. 5)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < -1, \\ 1 & \text{dla } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$



[rys. 5]

i niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem rozbieżnym do ∞ . Wobec tego do dowolnej liczby P można tak dobrać N , by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$x_n > P.$$

Przyjmując $P = 1$ mamy zatem dla $n > N_1$

$$(3) \quad f(x_n) = \frac{1}{x_n}.$$

Okażemy, że ciąg (3) jest zbieżny do zera. Niech ε będzie dowolnie obraną liczbą dodatnią. Nierówność epsilonowa

$$(4) \quad \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$$

będzie spełniona, jeżeli założymy, że

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon},$$

zaś ta ostatnia nierówność zachodzi dla $n > N_2$, gdzie N_2 jest dobrane do liczby $P = \frac{1}{\varepsilon}$.
Zatem nierówność epsilonowa (4) jest spełniona dla $n > \max(N_1, N_2)$ a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

Okazaliśmy więc, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

□

Zbadamy teraz granicę funkcji f przy $x \rightarrow -\infty$. Niech $\{y_n\}$ będzie dowolnym ciągiem rozbieżnym do $-\infty$. Wobec tego do dowolnej liczby p można dobrać N tak, by zachodziła nierówność

$$y_n < p$$

dla $n > N$. Zakładając, że $p < -1$ mamy wówczas dla $n > N$

$$f(y_n) = y_n < p,$$

a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -\infty.$$

Zatem

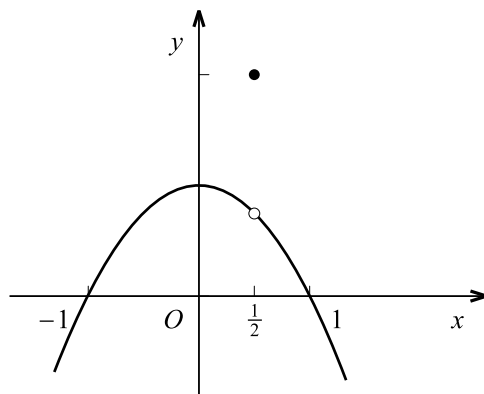
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

□

Przykład 3. Niech (rys. 6)

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{dla } x \neq \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$



[rys. 6]

Znajdziemy granicę funkcji f przy $x \rightarrow \frac{1}{2}$. Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}, \quad x_n \neq \frac{1}{2} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wobec tego

$$f(x_n) = 1 - x_n^2$$

i stosując twierdzenia o działaniach na granicach udowodnione dla ciągów (rozd. II §1) stwierdzamy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{3}{4}.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \frac{3}{4}.$$

□

Zauważmy, że w podanym przykładzie granica funkcji w punkcie $x = \frac{1}{2}$ nie jest równa wartości funkcji w tym punkcie.

Z definicji granicy funkcji wynika, że liczba g spełniająca (γ) musi być niezależna od sposobu w jaki wybieramy ciąg $\{x_n\}$ spełniający warunki (α) , (β) . Stąd prosty sposób okazywania, że granica funkcji przy $x \rightarrow a$ nie istnieje: wystarczy obrać dwa ciągi $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$, oba spełniające (α) , (β) , w taki sposób, by granice

$$g' = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$$

oraz

$$g'' = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$$

były różne.

Przykład 4. Okażemy, że nie istnieje

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x.$$

Przyjmijmy

$$x'_n = 2n\pi, \quad x''_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2},$$

wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = \infty,$$

oba ciągi spełniają więc warunki (α) , (β) . Natomiast

$$f(x'_n) = 1, \quad f(x''_n) = 0$$

zatem $g' = 1, g'' = 0$, a więc $g' \neq g''$. □

2. Sąsiedztwo punktu. Przez *sąsiedztwo* $S(a)$ punktu $a \in \mathbb{R}$ rozumiemy zbiór postaci

$$S(a) = U(a) \setminus \{a\},$$

gdzie $U(a)$ jest otoczeniem punktu a (por. rozdz.II §1 punkt 8). Jeżeli

$$c < a < d$$

oraz

$$U(a) = (c, d)$$

to zbiór $S(a)$ można zapisać w postaci

$$S(a) = (c, a) \cup (a, d).$$

W szczególności obierając jako otoczenie punktu a jego otoczenie epsilonowe

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

(gdzie ε jest ustaloną liczbą dodatnią) otrzymujemy *sąsiedztwo epsilonowe*

$$S_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

W przypadku $a = \infty$ lub $a = -\infty$ *sąsiedztwem punktu* a nazwiemy każde jego otoczenie, czyli

każdy przedział (P, ∞) gdy $a = \infty$

względnie

każdy przedział $(-\infty, p)$ gdy $a = -\infty$.

Podając w poprzednim punkcie definicję granicy funkcji f przy $x \rightarrow a$ założyliśmy, że funkcja f jest określona w całym zbiorze liczb rzeczywistych. Czytelnik z łatwością zauważy, że definicja ta pozostaje poprawna, gdy założymy, że funkcja f jest określona jedynie w pewnym sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$.

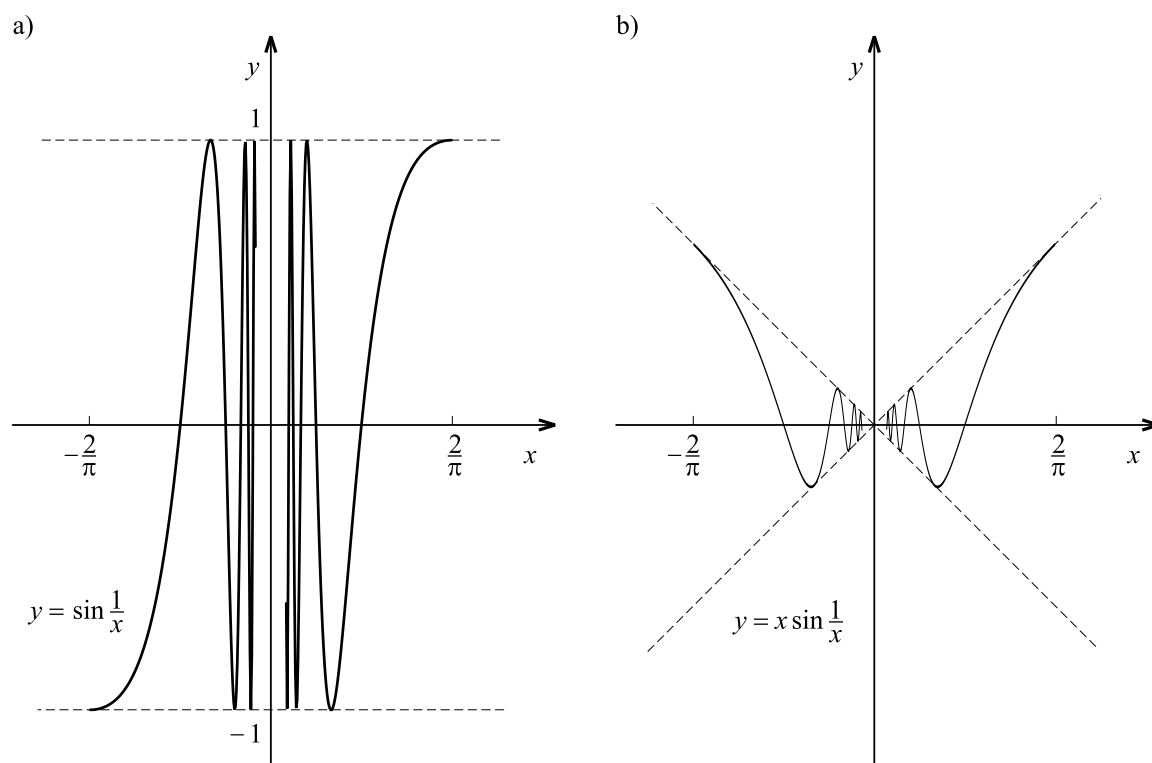
Przykład 5. Zbadamy istnienie granic

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

oraz

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

(rys. 7a, 7b).



[rys. 7]

Obie funkcje są określone dla $x \neq 0$ a więc w szczególności w zbiorze $(-\frac{2}{\pi}, 0) \cup (0, \frac{2}{\pi})$, który jest sąsiedztwem punktu $a = 0$.

W przykładzie (i) przyjmijmy

$$x'_n = \frac{1}{n\pi}, \quad x''_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}.$$

Oba ciągi spełniają warunki (α) , (β) punktu 1 dla $a = 0$, ale

$$\sin \frac{1}{x'_n} = 0, \quad \sin \frac{1}{x''_n} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

więc granice ciągów $\{\sin \frac{1}{x'_n}\}$ i $\{\sin \frac{1}{x''_n}\}$ są różne. Wobec tego granica w przykładzie (i) nie istnieje. \square

Przechodząc do przykładu (ii) założmy, że $\{x_n\}$ jest dowolnym ciągiem spełniającym warunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad x_n \neq 0.$$

Ponieważ

$$\left| \sin \frac{1}{x_n} \right| \leq 1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, więc na mocy twierdzenia 4 rozdz. II §1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sin \frac{1}{x_n} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

□

3. Działania na granicach. Twierdzenia o działaniach na granicach udowodnione dla ciągów w rozdz. II §1 przenoszą się łatwo na przypadek granicy funkcji. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 1. *Zakładamy, że funkcje f, g są określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ i że mają skończoną granicę przy $x \rightarrow a$. Wówczas istnieją granice przy $x \rightarrow a$ funkcji $f(x) \pm g(x)$ oraz $f(x)g(x)$, przy czym zachodzą równości*

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right).$$

Jeżeli założymy dodatkowo, że

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0,$$

to $g(x) \neq 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu a oraz istnieje granica przy $x \rightarrow a$ funkcji $\frac{f(x)}{g(x)}$, przy czym

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Twierdzenie 2. *Założmy, że funkcje f, g określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ spełniają nierówność*

$$f(x) \leq g(x)$$

oraz że funkcje te mają skończone granice przy $x \rightarrow a$. Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Prawdziwy jest również odpowiednik twierdzenia o trzech ciągach.

Twierdzenie 3 (o trzech funkcjach). *Załóżmy, że funkcje f, g, h określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ spełniają w tym sąsiedztwie nierówności*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

oraz że

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = G,$$

gdzie G jest liczbą rzeczywistą. Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G.$$

Udowodnimy twierdzenie 1 w przypadku ilorazu funkcji. Przypuśćmy, że nie istnieje sąsiedztwo punktu a o którym mowa w tezie twierdzenia. Oznacza to, że w każdym sąsiedztwie punktu a funkcja g ma miejsca zerowe. Wobec tego istnieje ciąg $\{b_n\}$ taki, że

$$b_n \neq a, \quad a - \frac{1}{n} < b_n < a + \frac{1}{n}$$

oraz

$$g(b_n) = 0.$$

Ciąg $\{b_n\}$ czyni zadość warunkom (α) , (β) punktu 1, zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0,$$

co przeczy poprzedniej równości. Zatem w pewnym sąsiedztwie punktu a funkcja g nie znika, a więc iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest dobrze określony.

Równości (5), (6), (7) oraz twierdzenia 2 i 3 otrzymujemy łatwo z definicji granicy funkcji stosując odpowiednie twierdzenia o ciągach. Szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. \square

Przykład 6. Udowodnimy, że

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Oprzemy się na nierówności (39) §1, z której wynika

$$0 < \sin x < x = |x|$$

dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Przyjmując $y = -x$ mamy

$$\sin y = -\sin x,$$

a stąd

$$-|y| = y < \sin y < 0$$

dla $-\frac{\pi}{2} < y < 0$. Zatem

$$(9) \quad -|x| < \sin x < |x|$$

dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Z nierówności (9) otrzymujemy (8) w oparciu o twierdzenie 3. \square

Przykład 7. Okażemy, że

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Z nierówności (41) §1 mamy

$$1 - \sin x \leq \cos x \leq 1$$

dla $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Wykorzystując parzystość funkcji \cos dostajemy

$$1 - \sin |x| \leq \cos x \leq 1$$

dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a stąd już wynika (10) w oparciu o Przykład 6 i twierdzenie 3. \square

Przykład 8. Okażemy, że

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Zauważmy, że funkcja

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

jest określona dla wszystkich $x \neq 0$, a więc w dowolnym sąsiedztwie punktu $x = 0$. Z nierówności (40) §1 mamy

$$(12) \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$, przy tym obie funkcje występujące w (12) są parzyste, a więc nie zmieniają wartości po zastąpieniu x przez $-x$. Wobec tego nierówność (12) jest prawdziwa dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Korzystając z Przykładu 7 i twierdzenia o trzech funkcjach (twierdzenie 3) otrzymujemy (11). \square

4. Definicja Cauchy'ego granicy funkcji.

Twierdzenie 4. Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie S punktu $a \in \mathbb{R}$ i niech g będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(C) do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, aby dla x spełniających nierówność

$$(14) \quad 0 < |x - a| < \delta$$

było

$$(15) \quad |f(x) - g| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Załóżmy najpierw, że spełniony jest warunek (C) i niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem zawartym w S i spełniającym warunki (α) , (β) punktu 1. Wówczas możemy dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$0 < |x_n - a| < \delta$$

a stąd na mocy warunku (C)

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon$$

dla $n > N$, co oznacza, że

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Udowodniliśmy więc (13).

Okażemy teraz, że z równości (13) wynika warunek (C). Dowód przeprowadzimy przez sprowadzenie do niedorzeczności. Załóżmy, że zachodzi (13) ale warunek (C) nie jest spełniony. Wobec tego istnieje liczba $\varepsilon_0 > 0$ taka, że przy dowolnym obiorze liczby $\delta > 0$ dla pewnego x_δ spełniającego (14) będzie zachodziła nierówność przeciwna do (15). Mamy zatem

$$0 < |x_\delta - a| < \delta$$

oraz

$$|f(x_\delta) - g| \geq \varepsilon_0.$$

Przyjmijmy w szczególności $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_\delta = x_n$, wówczas

$$(17) \quad 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

oraz

$$(18) \quad |f(x_n) - g| \geq \varepsilon_0.$$

Z nierówności (17) wynika na mocy twierdzenia o trzech ciągach, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunki (α) , (β) . Wobec założenia (13) ciąg $\{f(x_n)\}$ musi zatem spełniać warunek (γ) - ale to jest sprzeczne z nierównością (18). Dowód jest zakończony. \square

Podana w punkcie 1 definicja granicy funkcji, oparta na pojęciu granicy ciągu, pochodzi od E. Heinego¹ i nosi nazwę *definicji Heinego*. Podany w twierdzeniu warunek (C) bywa przyjmowany jako definicja granicy funkcji (zwana *definicją Cauchy'ego*). Z twierdzenia 4 wynika że obie definicje są równoważne.

Przykład 9. Dla dowolnie ustalonej liczby $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1.$$

Zgodnie z twierdzeniem 4 wystarczy udowodnić, że do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, że dla $x \in \mathbb{R}$ z warunku

$$0 < |x| < \delta$$

wynika

$$|a^x - 1| < \varepsilon.$$

Dowód był przeprowadzony w §1 (punkt 7, lemat 14). □

Twierdzenie 4 przenosi się na przypadek, gdy a jest elementem niewłaściwym ∞ lub $-\infty$ względnie gdy granica g jest niewłaściwa. Zachodzą mianowicie następujące twierdzenia:

Twierdzenie 5. Załóżmy, że funkcja f jest określona dla $x > r$, gdzie r jest odpowiednio dobraną liczbą. Wówczas

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \quad (g \in \mathbb{R})$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek

(A₁) do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę P tak, by dla $x > P$ zachodziła nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek

(A₂) do dowolnej liczby Q można dobrać liczbę P tak, by dla $x > P$ zachodziła nierówność

$$f(x) > Q.$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek

(A₃) do dowolnej liczby q można dobrać liczbę P tak, by dla $x > P$ zachodziła nierówność

$$f(x) < q.$$

Analogicznie

¹Heinrich Eduard Heine (1821 - 1881), urodzony w Berlinie, profesor na uniwersytetach w Bonn i w Halle. Zajmował się funkcjami zmiennej rzeczywistej i zmiennej zespolonej oraz równaniami różniczkowymi. W 1872 r. podał (niezależnie od G. Cantora) konstrukcję zbioru liczb rzeczywistych, jako uzupełnienia zbioru liczb wymiernych w zwykłej metryce.

Twierdzenie 6. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona dla $x < s$, gdzie s jest odpowiednio dobrane. Wówczas

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g \quad (g \in \mathbb{R})$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek

(B₁) do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę p tak, by dla $x < p$ zachodziła nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(B₂) do dowolnej liczby Q można dobrać liczbę p tak by dla $x < p$ zachodziła nierówność

$$f(x) > Q.$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(B₃) do dowolnej liczby q można dobrać liczbę p tak, by dla $x < p$ zachodziła nierówność

$$f(x) < q.$$

Ponadto zachodzi

Twierdzenie 7. Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(D₁) do dowolnej liczby Q można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x spełniających nierówność

$$0 < |x - a| < \delta$$

zachodziła nierówność

$$f(x) > Q;$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(D₂) do dowolnej liczby q można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x spełniających nierówność

$$0 < |x - a| < \delta$$

zachodziła nierówność

$$f(x) < q.$$

Dowody twierdzeń 5, 6, 7 przebiegają podobnie jak dowód twierdzenia 4, proponujemy zatem Czytelnikowi samodzielne ich przeprowadzenie. \square

Na zakończenie zauważmy, że twierdzenia 4 - 7 można sformułować krócej w następującej postaci:

Twierdzenie 8. Niech $a, g \in \mathbb{R}_\infty$ i niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu a . Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(C₁) do dowolnego otoczenia $U(g)$ punktu g można dobrać sąsiedztwo $S(a)$ punktu a tak, by

$$f(x) \in U(g)$$

dla $x \in S(a)$.

Przykład 10. Udowodnimy, że dla $a > 1$

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

oraz

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

Dla dowodu (19) przyjmijmy

$$a = 1 + b, \quad (b > 0)$$

wówczas z nierówności Bernoulliego (rozdz. I §1 punkt 7) mamy

$$a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz z własności funkcji wykładniczej

$$a^x > a^n$$

dla $x > n$. Wobec tego

$$a^x > Q$$

dla $x > n$, gdzie

$$n > \frac{Q - 1}{b}.$$

Wystarczy zatem w warunku (A₂) twierdzenia 5 przyjąć

$$P = \left[\frac{Q - 1}{b} \right] + 1.$$

Dla dowodu (20) trzeba okazać, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać tak liczbę p , by dla $x < p$ zachodziła nierówność

$$(21) \quad a^x < \varepsilon.$$

Wystarczy w tym celu zauważyć, że

$$a^x = \frac{1}{a^y}$$

gdzie $y = -x$. Wobec tego nierówność epsilonowa (21) zachodzi, jeżeli

$$(22) \quad a^y > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zgodnie z (19) do liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać P_ε tak, by (22) zachodziła dla $y > P_\varepsilon$. Oznacza to, że (21) zachodzi dla $x < -P_\varepsilon$, co kończy dowód (20). \square

5. Granica jednostronna funkcji. Dla ustalonego $a \in \mathbb{R}$ niech $U(a)$ będzie otoczeniem punktu a , zaś $S(a)$ - sąsiedztwem punktu a . Przyjmiemy następujące definicje:
otoczenie prawostronne punktu a

$$U^+(a) = \{x \in U(a) : x \geq a\},$$

otoczenie lewostronne punktu a

$$U^-(a) = \{x \in U(a) : x \leq a\},$$

sąsiedztwo prawostronne punktu a

$$S^+(a) = \{x \in S(a) : x > a\},$$

sąsiedztwo lewostronne punktu a

$$S^-(a) = \{x \in S(a) : x < a\}.$$

Jeżeli w szczególności $U(a) = U_\delta(a)$ oraz $S(a) = S_\delta(a)$ są odpowiednio otoczeniem i sąsiedztwem deltowym punktu a , to otoczenie i sąsiedztwo deltowe lewo- względnie prawostronne łatwo określić przy pomocy nierówności, mianowicie

$$U_\delta^+(a) = \{x : 0 \leq x - a < \delta\},$$

$$U_\delta^-(a) = \{x : 0 \leq a - x < \delta\},$$

$$S_\delta^+(a) = \{x : 0 < x - a < \delta\},$$

$$S_\delta^-(a) = \{x : 0 < a - x < \delta\}.$$

Zakładając, że funkcja f jest określona w sąsiedztwie prawostronnym punktu a wprowadzimy definicję granicy prawostronnej. Mówimy, że funkcja f ma *granicę prawostronną* $g \in \mathbb{R}_\infty$ przy $x \rightarrow a$ (lub *w punkcie a*), jeżeli dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{x_n\}$ spełniającego warunki

$$(\alpha_+) \quad x_n > a \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(\beta) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

zachodzi

$$(\gamma) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g.$$

Podobnie, zakładając że f jest określona w sąsiedztwie lewostronnym punktu a , definiujemy granicę lewostronną. Mówimy, że f ma *granicę lewostronną* $g \in \mathbb{R}_\infty$ przy $x \rightarrow a$ (lub w punkcie a), jeżeli dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{x_n\}$ spełniającego warunki

$$(\alpha_-) \quad x_n < a \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(\beta) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

zachodzi

$$(\gamma) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Zapisujemy

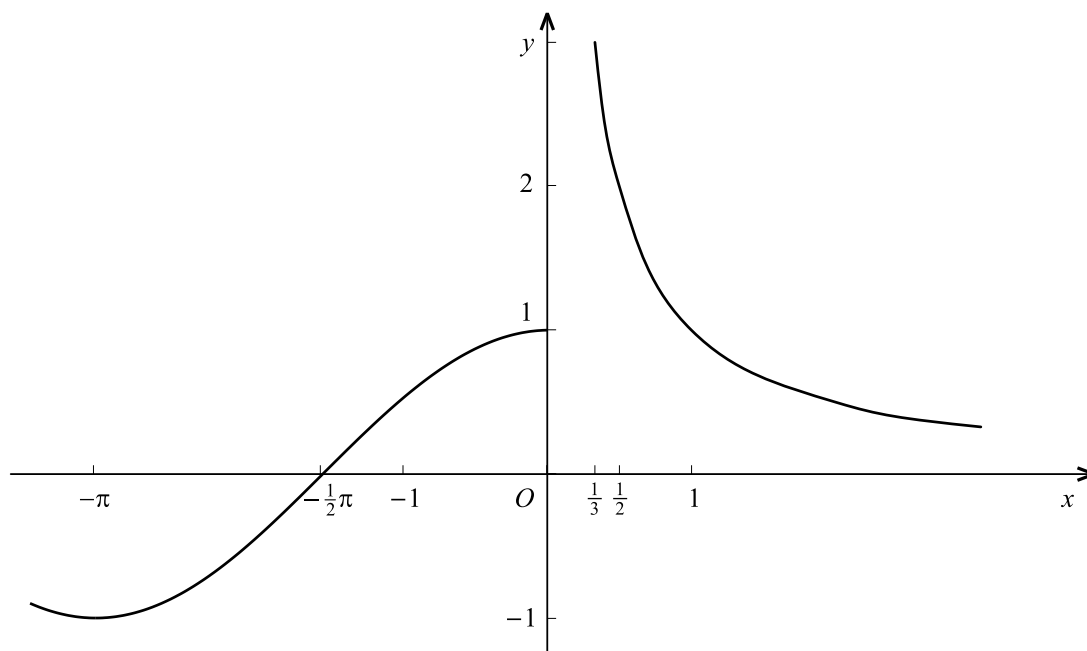
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g.$$

Jeżeli $g = \infty$ lub $g = -\infty$, to mówimy, że f ma w punkcie $x = a$ granicę prawostronną (lewostronną) *niewłaściwą*. Obie granice, lewostronną i prawostronną nazywamy *granicami jednostronnymi*.

Z podanych definicji widać, że jeżeli funkcja f ma przy $x \rightarrow a$ granicę, to ta granica jest jednocześnie granicą prawostronną i lewostronną. Twierdzenia sformułowane w punkcie 3 dla granicy funkcji pozostają prawdziwe dla granic jednostronnych.

Przykład 11. Niech (rys. 8)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ \cos x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$



[rys. 8]

Funkcja f jest określona dla $x \neq 0$, a więc w każdym lewostronnym i w każdym prawostronnym sąsiedztwie punktu $x = 0$.

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki

$$x_n \rightarrow 0, x_n > 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

i niech P będzie dowolnie obraną liczbą rzeczywistą. Z definicji granicy ciągu wynika, że do liczby $\varepsilon = \frac{1}{P}$ można tak dobrać N , by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$x_n < \frac{1}{P}.$$

Wobec tego

$$f(x_n) > P$$

dla $n > N$, a to oznacza że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty.$$

Natomiast

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

jak wynika z przykładu 7. □

Twierdzenia udowodnione w punkcie 4 przenoszą się łatwo na przypadek granicy jednostronnej. Sformułujemy je dla granicy prawostronnej.

Twierdzenie 9. Załóżmy, że funkcja f jest określona w prawostronnym sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g \quad (g \in \mathbb{R})$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(C₊) do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x spełniających nierówność

$$(23) \quad 0 < x - a < \delta$$

było

$$|f(x) - g| < \varepsilon;$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(A₊) do dowolnej liczby Q można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x spełniających nierówność (23) było

$$f(x) > Q;$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(B₊) do dowolnej liczby q można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x spełniających nierówność (23) było

$$f(x) < q.$$

Analogiczne twierdzenie dla granicy lewostronnej otrzymujemy zakładając, że funkcja f jest określona w lewostronnym sąsiedztwie punktu a i zastępując nierówność (23) przez

$$(24) \quad 0 < a - x < \delta$$

(proponujemy, by Czytelnik sformułował to twierdzenie dokładnie). Dowody obu twierdzeń przebiegają zupełnie podobnie do dowodu twierdzenia 4 i pozostawiamy je Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Jako wniosek otrzymujemy

Twierdzenie 10. Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \quad (g \in \mathbb{R}_\infty)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g.$$

Przykład 12. Udowodnimy, że

$$(25) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y.$$

Dla dowodu zauważmy najpierw, że nierówność

$$(26) \quad n \leq y \leq n + 1,$$

po wykorzystaniu znanych własności potęgi (twierdzenie 3 §1), daje

$$(27) \quad a_n \leq \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \leq b_n,$$

gdzie

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ponieważ

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

oraz

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

stosując twierdzenie o granicy iloczynu otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$$

(por. rozdz. II §2 punkt 5). Wynika stąd, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziły nierówności

$$a_n > e - \varepsilon, \quad b_n < e + \varepsilon$$

i w konsekwencji

$$(28) \quad -\varepsilon < \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y - e < \varepsilon$$

dla y spełniających (26). Zauważmy, że nierówność (26) jest spełniona (przy odpowiednio dobranym $n > N$), jeżeli założymy, że

$$(29) \quad y > P = [N] + 1.$$

Zatem nierówność (28) zachodzi dla y spełniających (29) - a to oznacza, zgodnie z twierdzeniem 5, że prawdziwa jest pierwsza z równości (25). Drugą równość (25) otrzymujemy łatwo z pierwszej. Podstawienie

$$y = -t$$

daje bowiem

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t,$$

skąd wynika, że

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \right]$$

a zatem

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Przykład 13. Opierając się na równości (25) łatwo wykazać, że

$$(30) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Istotnie, podstawienie

$$y = \frac{1}{x}$$

daje

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y,$$

zatem z (25) otrzymujemy

$$(31) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Ostatnia równość (31) oznacza, zgodnie z twierdzeniem 10, że zachodzi (30). \square

6. Twierdzenie o zbieżności monotonicznej. Twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych udowodnione w rozdz. II §2 przenosi się na przypadek granicy funkcji w następujący sposób:

Twierdzenie 11. *Jeżeli funkcja f jest monotoniczna i ograniczona w pewnym sąsiedztwie prawostronnym S_+ (lewostronnym S_-) punktu $a \in \mathbb{R}$, to istnieje skończona granica*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right).$$

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi rozważmy granicę prawostronną zakładając, że f jest rosnącą (w pozostałych przypadkach funkcji malejącej względnie granicy lewostronnej rozumowanie jest zupełnie podobne i nie będziemy go powtarzać).

Ciąg $\{a + \frac{1}{n}\}$ jest malejący, wobec tego ciąg $\{f(a + \frac{1}{n})\}$ jest również malejący i ograniczony (przynajmniej począwszy od $n = n_0$, jeżeli $a + \frac{1}{n} \in S_+$ dla $n \geq n_0$). Na mocy twierdzenia 5 rozdz. II §2 istnieje skończona granica

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a + \frac{1}{n}) = g,$$

przy czym

$$(33) \quad f(a + \frac{1}{n}) \geq g$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Niech teraz $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki (α_+) , (β) (por. punkt 5). Okażemy, że

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Z uwagi na (32), (33) do ustalonej dowolnie liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $m \in \mathbb{N}$ tak, by zachodziła nierówność

$$0 \leq f(a + \frac{1}{m}) - g < \varepsilon.$$

Z założenia (β) wynika z kolei, że do liczby m można tak dobrać liczbę N , by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$x_n < a + \frac{1}{m}.$$

Z ostatnich dwóch nierówności dostajemy

$$(35) \quad f(x_n) - g < \varepsilon$$

dla $n > N$. Ponadto przy dowolnie ustalonym $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba naturalna r_n taka, że

$$(36) \quad x_n > a + \frac{1}{r_n}$$

- wystarczy w tym celu przyjąć

$$r_n > \frac{1}{x_n - a},$$

co jest możliwe zgodnie z zasadą Archimedesesa (twierdzenie 2 rozdz.I §2). Z nierówności (36) i (33) wynika

$$f(x_n) \geq f(a + \frac{1}{r_n}) \geq g,$$

zatem

$$(37) \quad f(x_n) - g \geq 0.$$

Porównując (35) i (37) widzimy, że

$$0 \leq f(x_n) - g < \varepsilon$$

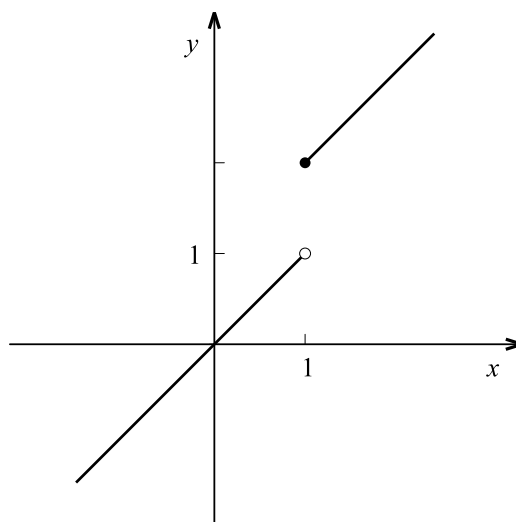
dla $n > N$, przy czym liczba N jest dobrana do ε a to oznacza, że zachodzi (34). Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ był dowolnym ciągiem spełniającym warunki (α) i (β) , wynika stąd, że

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g.$$

□

Przykład 14. Niech (rys. 9)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x > 1, \\ x & \text{dla } x < 1. \end{cases}$$



[rys. 9]

Funkcja f jest rosnąca i ograniczona w zbiorze $(0, 1) \cup (1, 2)$, który jest sąsiedztwem punktu $x = 1$, zatem zgodnie z twierdzeniem 11 ma przy $x \rightarrow 1$ granice lewostronną i prawostronną. Łatwo sprawdzić, że

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1.$$

Granice jednostronne nie są równe, nie istnieje więc granica funkcji f przy $x \rightarrow 1$. □

Z podanego przykładu widać, że twierdzenie 11 przestaje być prawdziwe, jeżeli zamiast o granicach jednostronnych będziemy mówili po prostu o granicy funkcji - nawet w przypadku gdy funkcja ta jest monotoniczna i ograniczona w pewnym sąsiedztwie punktu.

Twierdzenie 11 można następująco uogólnić na przypadek, gdy $a = \infty$ lub $a = -\infty$:

Twierdzenie 12. *Jeżeli istnieje liczba P taka, że funkcja f jest monotoniczna i ograniczona dla $x > P$ ($x < -P$) to istnieje skończona granica*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right).$$

DOWÓD przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 11 i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

♡ ♡ ♡

7. Warunek Cauchy'ego istnienia granicy. W rozdziale II §2 punkt 6 sformułowaliśmy warunek Cauchy'ego dla ciągów i udowodniliśmy, że jest on warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności ciągu. Podamy teraz analogiczny warunek zapewniający istnienie granicy funkcji.

Twierdzenie 13. *Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Na to, by istniała skończona granica funkcji f przy $x \rightarrow a$, potrzeba i wystarcza, by spełniony był warunek*

(C_f) *do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x, x' spełniających nierówności*

$$(38) \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < |x' - a| < \delta$$

było

$$(39) \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Załóżmy że istnieje

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g,$$

Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 4 do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x, x' spełniających (38) zachodziły nierówności

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - g < \frac{\varepsilon}{2}, \quad -\frac{\varepsilon}{2} < g - f(x') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy (39). Zatem warunek (C_f) jest warunkiem koniecznym istnienia granicy.

Dla dowodu dostateczności warunku (C_f) załóżmy, że jest on spełniony i obierzmy $\delta > 0$ tak, by nierówność (39) była spełniona z zastąpieniem ε przez $\varepsilon/2$. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem spełniającym warunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad x_n \neq a \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

wówczas istnieje liczba N taka, że dla $n, m > N$ zachodzą nierówności

$$0 < |x_n - a| < \delta, \quad 0 < |x_m - a| < \delta,$$

z których wynika, że

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem ciąg $\{f(x_n)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego i na mocy twierdzenia 6 rozdz. II §2 jest zbieżny. Niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g,$$

wówczas istnieje liczba N_1 taka, że dla $n > N_1$ mamy

$$|f(x_n) - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ

$$|f(x) - g| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - g|,$$

ustalając $n > \max(N, N_1)$ i zakładając, że

$$0 < |x - a| < \delta$$

dostajemy

$$|f(x) - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a to oznacza (por twierdzenie 4), że

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g.$$

□

Twierdzenie przenosi się na przypadek $a = \infty$ lub $a = -\infty$ (definicja sąsiedztwa punktu $a = \infty$, względnie $a = -\infty$ była podana w punkcie 2).

Twierdzenie 14. Niech f będzie funkcją określoną dla dostatecznie dużych x . Wówczas f ma skończoną granicę przy $x \rightarrow \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek (C_∞) do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje Q takie, że dla $x, x' > Q$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 15. Niech f będzie funkcją określoną dla $x < p$, gdzie p jest odpowiednio dobraną liczbą. Wówczas f ma skończoną granicę przy $x \rightarrow -\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek

$(C_{-\infty})$ do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje q takie, że dla $x, x' < q$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Dowody obu twierdzeń są analogiczne do dowodu twierdzenia 13. Proponujemy, aby Czytelnik przeprowadził je samodzielnie. □

Przykład 15. Niech

$$f(x) = \cos x.$$

Wiemy (Przykład 4), że funkcja ta nie ma granicy (nawet niewłaściwej) przy $x \rightarrow \infty$. Okażemy, że nie jest spełniony warunek (C_∞) podany w twierdzeniu 14. Zaprzeczenie warunku ma postać

(nie C_∞) istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że dla dowolnej liczby Q można znaleźć liczby $x_Q, x'_Q > Q$ tak, by zachodziła nierówność

$$(40) \quad |f(x_Q) - f(x'_Q)| \geq \varepsilon_0.$$

Wystarczy przyjąć

$$\varepsilon_0 = 1, \quad x_Q = 2n\pi, \quad x'_Q = (2n+1)\pi,$$

dobierając dostatecznie duże $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\cos x_Q = 1, \quad \cos x'_Q = -1,$$

zatem różnica po lewej stronie (40) wynosi 2. □

Przykład 16. Niech

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Wiemy, (Przykład 5), że nie istnieje granica (nawet niewłaściwa) tej funkcji przy $x \rightarrow 0$. Pokażemy, że nie jest spełniony warunek (C_f) podany w twierdzeniu 13. Zaprzeczenie warunku ma postać

(nie C_f) istnieje takie ε_0 , że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ można znaleźć liczby x_δ, x'_δ takie, że spełnione są nierówności

$$|x_\delta| < \delta, \quad |x'_\delta| < \delta$$

oraz

$$(41) \quad |f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Wystarczy przyjąć

$$\varepsilon_0 = 1, \quad x_\delta = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \quad x'_\delta = \frac{2}{(4n+3)\pi}$$

dobierając n tak, by było

$$\frac{2}{(4n+1)\pi} < \delta,$$

wówczas

$$\sin x_\delta = 1, \quad \sin x'_\delta = -1,$$

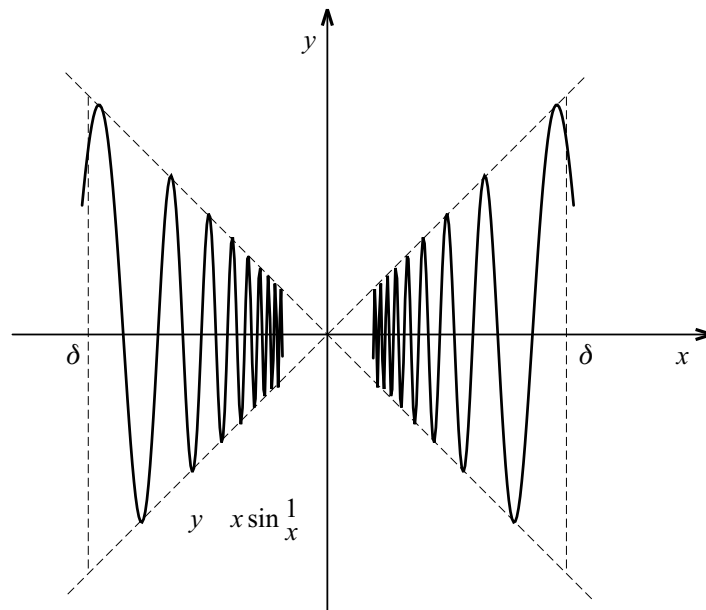
a więc różnica po lewej stronie (41) wynosi 2. □

Przykład 17. Wiemy, że (Przykład 5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Okażemy, że funkcja

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$



[rys. 10]

spełnia warunek (C_f) przy $x = 0$. Istotnie, z rys. 10 widać, że różnica wartości funkcji f w dowolnych dwóch punktach zbioru $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ nie przekracza 2δ . Zatem dla x, x' spełniających nierówności

$$|x| < \delta, \quad |x'| < \delta$$

mamy

$$|f(x) - f(x')| < 2\delta$$

i wystarczy w warunku (C_f) przyjąć $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. □

Zadania.

1. Przy ustalonym $p \in \mathbb{N}$ obliczyć granice

$$\begin{aligned} \text{a.)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^p - p}{x - 1}, \\ \text{b.)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x) \cdots (1+px) - 1}{x}. \end{aligned}$$

Wskazówka. Zauważyć, że obie funkcje są wielomianami. Zastosować twierdzenia o działaniach na granicach, następnie wykorzystać zadanie 10 rozdz. I §1.

2. Obliczyć granice ciągów

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 \sin \frac{\pi}{n^2}, \\ v_n &= \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{-1} \sin\left(\sin \frac{1}{n}\right), \\ w_n &= n^2 \sin^2\left(\frac{3}{n}\right). \end{aligned}$$

Wskazówka. Wykorzystać Przykłady 6, 8.

3. Obliczyć granice ciągów

$$\begin{aligned} a_n &= (\sqrt{3})^{(1-\sqrt[n]{n})}, \\ b_n &= (\sqrt{2})^{(1-\sqrt[n]{5})}. \end{aligned}$$

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 9 oraz Przykłady 13, 14 z rozdz. II §1.

4. Udowodnić, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

Wskazówka. Skorzystać z Przykładu 13.

5. Zbadać, czy istnieją granice

$$\begin{aligned} \text{a.)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - [x]), \\ \text{b.)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right), \\ \text{c.)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - x \left[\frac{1}{x}\right]\right), \\ \text{d.)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}, \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Uwaga. Symbolem $[x]$ oznaczamy funkcję *część całkowita* x (por. rozdz. I §2).

6. Zbadać istnienie następujących granic

a.) opierając się na definicji granicy funkcji podanej w punkcie 1,

b.) sprawdzając, czy spełniony jest warunek Cauchy'ego (twierdzenia 13, 14):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}, & \text{(ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x^2, \\ \text{(iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{(iv)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x^2. \end{aligned}$$

7. Zbadać istnienie granic jednostronnych w punkcie $x = a$ następujących funkcji

$$\text{(i)} \quad a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x-1} & \text{dla } x > 1, \\ 2x & \text{dla } x < 1, \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad a = 0, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{dla } x > 0, \\ \frac{\sin x}{2x} & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad a = 0, \quad h(x) = \begin{cases} \cos(x^2) & \text{dla } x < 0, \\ x+1 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

$$\text{(iv)} \quad a = 0, \quad p(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla } x > 0, \\ 2^{2x} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Która z tych funkcji ma granicę przy $x \rightarrow a$?

8. Zakładamy, że funkcja f (określona dla dostatecznie dużych x)

(i) jest ograniczona w każdym ograniczonym przedziale,

(ii) czyni zadość warunkowi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = g$$

gdzie $g \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że wówczas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = g.$$

Wskazówka. Z warunku (ii) wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można tak dobrać liczbę A , że

$$g - \varepsilon < f(x+1) - f(x) < g + \varepsilon$$

dla $x \geq A$. Należy skorzystać z równości

$$f(x) = (f(x) - f(x-1)) + (f(x-1) - f(x-2)) + \cdots + (f(x-m+1) - f(x-m)) + f(y),$$

gdzie

$$m = [x - A], \quad y = x - m.$$

Następnie zauważyć, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m}{x} = 1$$

(dlaczego?).

9. Udowodnić twierdzenie sformułowane w zadaniu 8 w przypadku $g = \infty$ oraz $g = -\infty$.
Wskazówka. Gdy $g = \infty$, to na mocy założenia (ii) do dowolnie obranej liczby $P > 0$ można tak dobrać liczbę A , że

$$f(x+1) - f(x) > P$$

dla $x \geq A$. Dalsze rozumowanie przebiega podobnie jak w zadaniu 8. Przypadek $g = -\infty$ można rozważać bezpośrednio lub sprowadzić go do poprzedniego wprowadzając nową funkcję $h(x) = -f(x)$.

10. Podać interpretację geometryczną twierdzeń dowodzonych w zadaniach 8 i 9 oraz zilustrować je następującymi przykładami

- (i) $f(x) = ax + b$,
- (ii) $f(x) = \sqrt{x}$,
- (iii) $f(x) = e^x$,
- (iv) $f(x) = \frac{1}{x} \sin x + x$.

Narysować wykresy tych funkcji.

Wskazówka. Zauważyć, że

$$f(x+1) - f(x) = \operatorname{tg} \alpha(x), \quad \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \beta(x)$$

przy odpowiednim obiorze kątów $\alpha(x)$, $\beta(x)$.

11. Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \cdots \cos \frac{\varphi}{2^n}.$$

Wskazówka. Rozróżnić przypadki $\varphi = 0$ oraz $\varphi \neq 0$. Dla $\varphi \neq 0$ zastosować n -krotnie wzór

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

i wykorzystać przykład 8.

12. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Wskazówka. Wykorzystać przykład 8.

13. Zbadać, czy istnieje granica $g \in \mathbb{R}$ przy $x \rightarrow 0$ funkcji

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Wskazówka. Oszacować ciąg

$$f\left(\frac{1}{n}\right).$$

14. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}.$$

Wskazówka. Zastosować podstawienie $x = \frac{1}{y}$ i wykorzystać Przykład 8.

15. Udowodnić, że przy ustalonych $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty$$

(funkcja wykładnicza dąży do ∞ szybciej, niż dowolna potęga x - por. Przykład 10).

Wskazówka. Obierzmy dowolnie ciąg $x_n \rightarrow \infty$ i niech $l_n = [x_n]$. Należy oszacować z dołu wyrażenie

$$\frac{a^{x_n}}{(x_n)^k}$$

przez n -ty wyraz ciągu

$$b_n = \frac{a^{l_n}}{(l_n)^k},$$

następnie skorzystać z zadania 12 rozdz. II §2 i oprzeć się na twierdzeniu 2 rozdz. II §2.

16. Obliczyć granice

$$\text{a.) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad \text{b.) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}.$$

17. Niech

$$w(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

będzie wielomianem stopnia m o współczynniku $a_m > 0$. Udowodnić, że

$$\text{a.) } \lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = \infty$$

dla m parzystego,

$$\text{b.) } \lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = -\infty$$

dla m nieparzystego.

Wskazówka. Zbadać najpierw granicę wyrażenia $\frac{w(x)}{x^m}$.

§3. Funkcje ciągłe i ich własności.



1. Ciągłość funkcji w punkcie. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest ciągła w punkcie a (lub dla $x = a$), jeżeli spełnione są warunki

- (i) istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f(a) = g$.

Przykład 1. Wiemy, że (Przykład 5 §2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Wobec tego funkcja p określona wzorami

$$p(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x = 0$. Natomiast funkcja

$$q(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

spełnia warunek (i), nie jest jednak ciągła w punkcie $x = 0$, gdyż nie czyni zadość warunkowi (ii). Mówimy, że funkcja q ma w punkcie $x = 0$ *nieciągłość istotną*. Łatwo ją usunąć, zmieniając definicję funkcji w punkcie $x = 0$ tak, by przyjmowała ona w tym punkcie wartość równą granicy. Otrzymujemy wówczas funkcję p , która jest ciągła dla $x = 0$.

Przykład 2. Wiemy, że (Przykład 5 §2) nie istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Wobec tego funkcja

$$f_c(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ c & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest nieciągła w punkcie $x = 0$ niezależnie od tego, jak obierzemy liczbę rzeczywistą c , gdyż nie spełnia warunku (i). Mówimy, że funkcja f_c ma w punkcie $x = 0$ *nieciągłość istotną*.

Ponieważ w §2 wprowadziliśmy dwie równoważne definicje granicy funkcji (definicję Heinego i definicję Cauchy'ego), możemy sformułować dwa warunki konieczne i dostateczne ciągłości funkcji w punkcie a .

Twierdzenie 1. *Funkcja f określona w otoczeniu punktu a jest ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $x_n \rightarrow a$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Twierdzenie 2. *Funkcja f określona w otoczeniu punktu a jest ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x \in \mathbb{R}$ spełniających nierówność*

$$|x - a| < \delta$$

zachodziła nierówność epsilonowa

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Zauważmy, że twierdzenie 2 można sformułować w sposób równoważny następująco

Twierdzenie 3. *Funkcja f określona w otoczeniu punktu a jest ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego otoczenia U punktu $f(a)$ można dobrać otoczenie V punktu a tak, by*

$$f(V) \subset U.$$

Dowody twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

2. Ciągłość jednostronna. Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym prawostronnym otoczeniu punktu a . Mówimy, że f jest *prawostronnie ciągła w punkcie a* (lub dla $x = a$) jeżeli

(i₊) istnieje granica prawostronna

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g_+ \in \mathbb{R}$$

oraz

$$(ii_+) f(a) = g_+.$$

Podobnie określamy ciągłość lewostronną, zakładając że funkcja f jest określona w pewnym lewostronnym otoczeniu punktu a . Mówimy, że f jest *lewostronnie ciągła w punkcie a* (lub dla $x = a$), jeżeli

(i₋) istnieje granica lewostronna

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g_- \in \mathbb{R}$$

oraz

$$(ii_-) f(a) = g_-.$$

Z definicji granicy prawostronnej oraz z twierdzenia 9 §2 wynikają następujące warunki konieczne i dostateczne ciągłości prawostronnej.

Twierdzenie 4. *Funkcja f określona w prawostronnym otoczeniu punktu a jest prawostronnie ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego warunki*

$$x_n \rightarrow a, \quad x_n \geq a$$

zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Twierdzenie 5. *Funkcja f określona w prawostronnym otoczeniu punktu a jest prawostronnie ciągła w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $x \in \mathbb{R}$ spełniających nierówność*

$$0 \leq x - a < \delta$$

zachodziła nierówność epsilonowa

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dowody obu twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Proponujemy również, by Czytelnik samodzielnie sformułował analogiczne twierdzenia podające warunki konieczne i dostateczne ciągłości lewostronnej funkcji. \square

Z twierdzenia 10 §3 wynika natychmiast

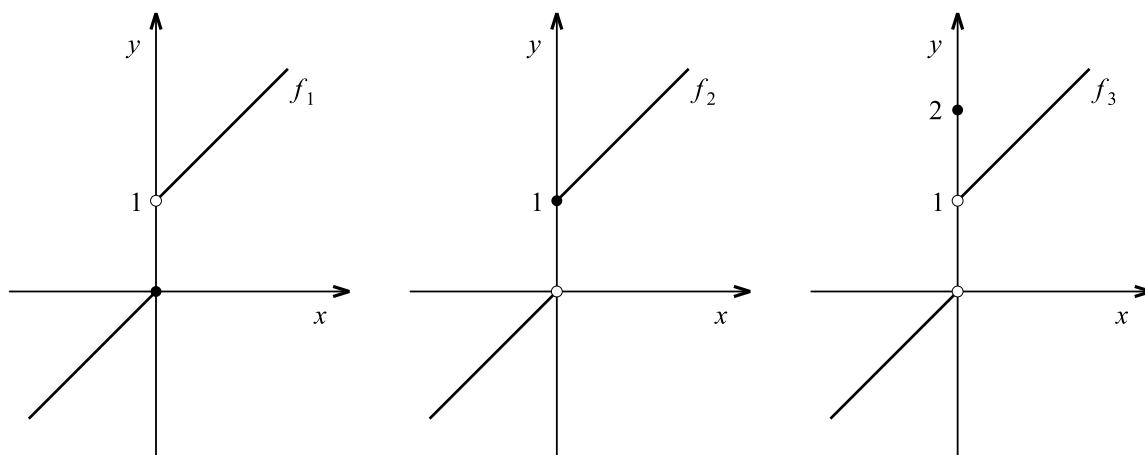
Twierdzenie 6. *Funkcja określona w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$ jest w tym punkcie ciągła wtedy i tylko wtedy gdy jest w nim ciągła prawo- i lewostronnie.*

Przykład 3. Niech (rys. 11)

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 0, \\ x + 1 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ x + 1 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ 2 & \text{dla } x = 0, \\ x + 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$



[rys. 11]

Jak łatwo sprawdzić

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_j(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f_j(x) = 0$$

dla $j = 1, 2, 3$. Z definicji funkcji f_j wynika, że

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 1, \quad f_3(0) = 2$$

zatem

f_1 jest ciągła lewostronnie dla $x = 0$,

f_2 jest ciągła prawostronnie dla $x = 0$,

f_3 nie jest ciągła (nawet jednostronnie) dla $x = 0$. Jest to punkt nieciągłości istotnej, gdyż nie istnieje granica funkcji f_3 przy $x \rightarrow 0$.

3. Ciągłość funkcji w przedziale. Załóżmy, że funkcja f jest określona w przedziale $\mathbb{P} = (a, b)$, gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Mówimy, że f jest ciągła w przedziale \mathbb{P} , jeżeli jest ciągła w każdym jego punkcie. Jeżeli przedział \mathbb{P} zawiera jeden ze swoich końców tzn. jest postaci

$[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$

lub

$(a, b]$, gdzie $-\infty \leq a < b < \infty$

lub

$[a, b)$, gdzie $-\infty < a < b \leq \infty$

to o funkcji f zakładamy dodatkowo, że jest ciągła prawostronnie w lewym końcu przedziału \mathbb{P} względnie ciągła lewostronnie w prawym końcu przedziału \mathbb{P} .

Z twierdzenia 2 widać, że warunek ciągłości funkcji można w sposób mniej precyzyjny sformułować następująco:

funkcja f jest ciągła w przedziale \mathbb{P} , jeżeli mała zmiana argumentu $x \in \mathbb{P}$ powoduje małą zmianę wartości funkcji $f(x)$.

Przykład 4. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Dla dowolnego $x_0 > 0$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0},$$

funkcja f jest więc ciągła w przedziale $(0, \infty)$. Nie jest natomiast ciągła w przedziale $[0, \infty)$ gdyż

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Funkcja f nie ma skończonej granicy prawostronnej przy $x \rightarrow 0$, nie może więc czynić zadość warunkom (i_+) , (ii_+) .

4. Działania na funkcjach ciągłych i ciągłość funkcji elementarnych. Z twierdzeń o działaniach na granicach (§2) wynika natychmiast

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że funkcje f, g określone w otoczeniu punktu a są ciągłe w tym punkcie. Wówczas*

- (i) *funkcje $f + g, f - g$ oraz fg są ciągłe w punkcie a ;*
- (ii) *jeżeli $g(a) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie a .*

Twierdzenie pozostaje słuszne jeżeli ciągłość funkcji zastąpimy przez ciągłość prawo-(lewo-)stronną. Szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. \square

W §1 były wprowadzone przykłady funkcji zwanych umownie funkcjami elementarnymi. Zbadamy teraz ich ciągłość.

Z definicji funkcji ciągłej wynika łatwo, że funkcja stała $f(x) = c$ (gdzie $c \in \mathbb{R}$) oraz funkcja tożsamościowa $f(x) = x$ są ciągłe w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. W oparciu o twierdzenie 7 stwierdzamy, że

1⁰ *wielomian jest funkcją ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} ,*

2⁰ *funkcja wymierna jest ciągła w każdym punkcie nie będącym miejscem zerowym mianownika.*

W szczególności

3⁰ *funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym*

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R}

oraz

4⁰ *funkcja potęgowa o wykładniku całkowitym ujemnym*

$$f(x) = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest ciągła wszędzie poza punktem $x_0 = 0$.

Przykład 5. Niech

$$f(x) = \frac{x + 5}{x^2 + x - 2}.$$

Mianownik ułamka po prawej stronie ma miejsca zerowe $x_1 = 1$ oraz $x_2 = -2$, wobec tego funkcja f jest określona i ciągła w zbiorze

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty).$$

Przechodząc do funkcji wykładniczej o podstawie $a > 0$ mamy dla dowolnie ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$

$$a^x = a^{x-x_0} a^{x_0},$$

zatem przyjmując $y = x - x_0$ dostajemy (por. §2 Przykład 9)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} a^y = a^{x_0}.$$

Wobec tego

5^o *funkcja wykładnicza jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} .*

Zbadamy teraz ciągłość funkcji trygonometrycznych. Przyjmując $y = x - x_0$ dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\sin x = \sin(y + x_0) = \sin y \cos x_0 + \cos y \sin x_0,$$

a stąd (por. §2 Przykłady 6,7)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x &= (\cos x_0) \lim_{y \rightarrow 0} \sin y + \sin x_0 \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = \\ &= \sin x_0. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\cos x = \cos(y + x_0) = \cos y \cos x_0 - \sin y \sin x_0$$

a więc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x &= (\cos x_0) \lim_{y \rightarrow 0} \cos y - (\sin x_0) \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = \\ &= \cos x_0. \end{aligned}$$

Stwierdzamy więc, że

6^o *funkcje $\sin x$, $\cos x$ są ciągłe w całym zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} oraz w oparciu o twierdzenie 7*

7^o *funkcja $\operatorname{tg} x$ jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ takim, że $\cos x_0 \neq 0$,*

8^o *funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ takim, że $\sin x_0 \neq 0$.*

Na zakończenie udowodnimy twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej z funkcji ciągłych.

Twierdzenie 8 (o ciągłości superpozycji). *Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, zaś g funkcją określoną w otoczeniu punktu $y_0 = f(x_0)$. Jeżeli*

(i) *f jest ciągła w punkcie x_0 ,*

(ii) *g jest ciągła w punkcie y_0*

to funkcja złożona

$$h(x) = g(f(x))$$

jest ciągła w punkcie x_0 .

DOWÓD wynika natychmiast z twierdzenia 1. Dla dowolnego ciągu $x_n \rightarrow x_0$ mamy wobec założenia (i)

$$y_n = f(x_n) \rightarrow y_0,$$

wobec tego ciąg $\{g(y_n)\}$ jest dobrze określony przynajmniej dla dostatecznie dużych n . Z założenia (ii) wynika, że

$$h(x_n) = g(y_n) \rightarrow g(y_0) = h(x_0).$$

Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ był dowolnie obrany, udowodniliśmy ciągłość funkcji h w punkcie x_0 . \square

Przykład 6. Niech

$$f(x) = \sin x, \quad g(y) = \frac{1}{y^2 - 1}.$$

Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, zaś funkcja g jest ciągła w każdym punkcie y_0 nie będącym miejscem zerowym mianownika tzn. spełniającym warunek

$$y_0^2 \neq 1.$$

Wobec tego funkcja złożona

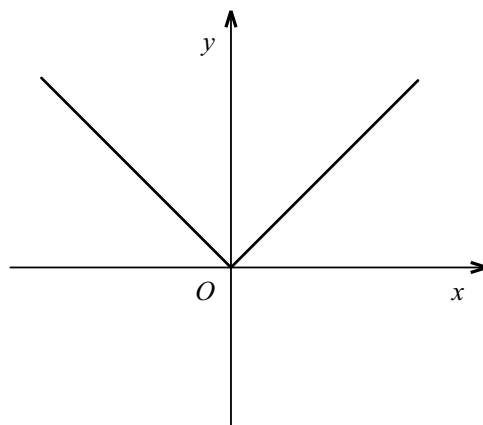
$$h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sin^2 x - 1}$$

jest ciągła wszędzie za wyjątkiem punktów postaci $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oraz $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ dla k całkowitych.

Przykład 7. Zbadamy ciągłość funkcji

$$f(x) = |x|$$

(wykres funkcji przedstawiony jest na rys. 12).



[rys. 12]

Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie dowolnie ustalonym punktem. Udowodnimy ciągłość funkcji f w punkcie a opierając się na twierdzeniu 1. Załóżmy, że $\{x_n\}$ jest dowolnie obranym ciągiem zbieżnym do a . Wobec tego do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Ponieważ

$$|f(x_n) - f(a)| = ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|,$$

więc dla $n > N$ zachodzi również nierówność

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$$

a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a),$$

co kończy dowód.

Ciągłość funkcji w punkcie a możemy również udowodnić opierając się na twierdzeniu 2 i wykorzystując nierówność

$$|f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| \leq |x - a|,$$

z której widać, że do liczby $\varepsilon > 0$ wystarczy dobrać $\delta = \varepsilon$. Wówczas z nierówności deltowej

$$|x - a| < \delta$$

wynika nierówność epsilonowa dla funkcji

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

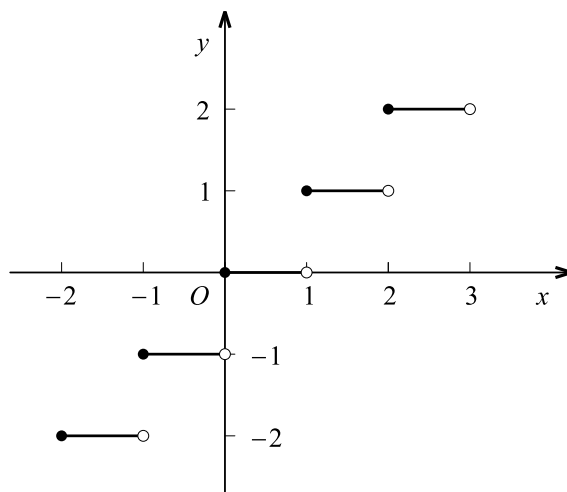
Ponieważ punkt a był dowolnie obrany, funkcja

$$f(x) = |x|$$

jest ciągła w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. □

Przykład 8. Rozważmy funkcję

$$f(x) = [x]$$



[rys. 13]

której wykres podany jest na rys. 13. Z definicji funkcji *część całkowita* x wynika, że

$$f(x) = k \quad \text{dla} \quad k \leq x < k + 1$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Jeżeli x_0 nie jest liczbą całkowitą, to w pewnym jej otoczeniu f jest funkcją stałą, a więc jest ciągła w punkcie x_0 . Załóżmy teraz, że $x_0 = k$. Jeżeli

$$x_n \rightarrow k, \quad x_n \geq k$$

to przynajmniej dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu $\{x_n\}$ leżą w przedziale $[k, k + 1)$, zatem

$$f(x_n) = k \rightarrow f(k).$$

Na podstawie twierdzenia 4 funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie k . Jeżeli natomiast obierzemy ciąg $\{x_n\}$ tak, by

$$x_n \rightarrow k, \quad x_n < k$$

to dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu leżą w przedziale $[k - 1, k)$ i wówczas

$$f(x_n) = k - 1.$$

Wynika stąd, że

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = k - 1 \neq f(k).$$

A więc funkcja f nie jest lewostronnie ciągła w żadnym punkcie całkowitym. □

♡ ♡ ♡

5. Jednostajna ciągłość funkcji. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in \mathbb{I}$. Zgodnie z twierdzeniem 2 oznacza to, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $x \in \mathbb{I}$ spełniających warunek

$$(1) \quad |x - x_0| < \delta$$

zachodziła nierówność

$$(2) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Zauważmy, że liczba δ jest dobierana do liczby ε przy ustalonym x_0 . Jeżeli zmieniamy punkt x_0 , to być może przy danym ε trzeba będzie dobrać inną, mniejszą liczbę δ na to, aby była spełniona nierówność epsilonowa (2). Ilustruje to następujący przykład:

Przykład 9. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad 0 < x \leq 1$$

i niech x_0 oraz $x_0 + h$ będą dwoma punktami przedziału $\mathbb{P} = (0, 1]$. Wiemy (por. Przykład 4), że funkcja f jest ciągła w przedziale \mathbb{P} . Nierówność epsilonowa przybiera postać

$$(3) \quad \left| \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + h} \right| < \varepsilon.$$

Jeżeli $h > 0$, to (3) można zapisać w równoważnej postaci

$$\frac{h}{x_0(x_0 + h)} < \varepsilon,$$

co daje po prostych przekształceniach

$$(4) \quad h < h_1 = \frac{x_0^2 \varepsilon}{1 - x_0 \varepsilon}$$

(nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że $\varepsilon < 1$, wówczas prawa strona jest liczbą dodatnią). Jeżeli $h < 0$, to w podobny sposób przekształcając (3) otrzymujemy

$$(5) \quad |h| < h_2 = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + x_0 \varepsilon}.$$

Z warunków (4), (5) widać że nierówność (3) będzie spełniona dla x czyniących zadość warunkowi (1) tylko wtedy, gdy obierzemy

$$\delta = \min(h_1, h_2)$$

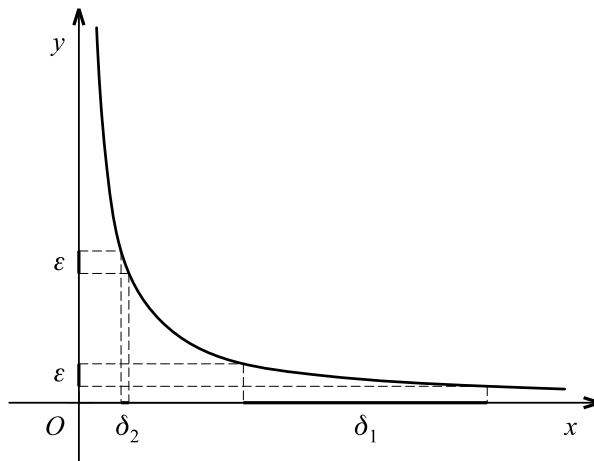
czyli

$$(6) \quad \delta = \delta(x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + x_0 \varepsilon}.$$

W przypadku obrania liczby δ większej, niż to określa wzór (6) nierówność epsilonowa dla funkcji nie będzie zachodzić.

Zauważmy, że przy ustalonym $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0^+} \delta(x_0, \varepsilon) = 0.$$



[rys. 14]

Jest to oczywiste, jeżeli spojrzymy na rys. 14. Im bliżej punktu $x = 0$, tym szybciej rośnie funkcja f , tym mniejszy musi więc być przedział, na którym funkcja osiąga przyrost nie przekraczający danej z góry liczby ε . \square

Powstaje pytanie, czy dla danej funkcji f ciągłej w przedziale \mathbb{IP} można do liczby ε liczbę δ w sposób "uniwersalny" tzn. tak, by z nierówności (1) wynikała nierówność (2) dla dowolnie obranego $x_0 \in \mathbb{IP}$. W przypadku funkcji rozważanej w przykładzie 6 jest to niemożliwe z uwagi na (7). Przyczyna leży w tym, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła w przedziale $[0, 1]$, a jedynie w przedziale lewostronnie otwartym $(0, 1]$ - por. przykład 4. W dalszym ciągu podamy warunki dostateczne, przy których istnieje możliwość obrania liczby δ zależnej tylko od ε i odpowiedniej dla każdego punktu x_0 rozważanego przedziału.

Zacniemy od wprowadzenia definicji. Mówimy, że funkcja f jest *jednostajnie ciągła w przedziale \mathbb{IP}* , jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla dowolnych $x', x'' \in \mathbb{IP}$ spełniających nierówność

$$(8) \quad |x' - x''| < \delta$$

zachodziła nierówność epsilonowa

$$(9) \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Jednostajna ciągłość oznacza, że liczba δ jest dobrana tylko do liczby ε i nie zależy od punktów x', x'' . Mówiąc inaczej, przyrost funkcji na odcinku o długości $< \delta$, dowolnie umieszczonym w przedziale \mathbb{IP} , nigdy nie przekracza z góry danej liczby ε .

Łatwo sprawdzić, że funkcja jednostajnie ciągła w przedziale jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału (por. zadanie 20).

Przykład 10. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad 0 < x \leq 1.$$

Wiemy (por. Przykłady 4, 9), że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału $\mathbb{I} = (0, 1]$. Udowodnimy, że nie jest ona jednostajnie ciągła w tym przedziale. Wystarczy w tym celu wykazać, że nie jest spełniony warunek podany w definicji jednostajnej ciągłości, co oznacza że funkcja f ma następującą własność:

istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że przy dowolnym obiorze liczby $\delta > 0$ można znaleźć punkty $x'_\delta, x''_\delta \in \mathbb{I}$ takie, że

$$|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$$

oraz

$$|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

DOWÓD jest prosty. Przyjmując

$$\varepsilon_0 = 1, \quad x' = \delta, \quad x'' = \frac{1}{2}\delta$$

mamy

$$\left| \frac{1}{x'_\delta} - \frac{1}{x''_\delta} \right| = \left| \frac{x''_\delta - x'_\delta}{x'_\delta \cdot x''_\delta} \right| = \frac{1}{\delta} \geq 1,$$

gdyż z założenia punkty x'_δ, x''_δ leżą w przedziale $(0, 1]$, zatem musi być $\delta \leq 1$. \square

Twierdzenie 9 (Heinego). *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.*

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że funkcja f ciągła w przedziale $\mathbb{I} = [a, b]$ nie jest w nim jednostajnie ciągła. Zaprzeczenie warunku jednostajnej ciągłości oznacza, że istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że przy dowolnym obiorze liczby $\delta > 0$ znajdziemy punkty $x'_\delta, x''_\delta \in \mathbb{I}$, dla których spełnione są nierówności

$$(10) \quad |x'_\delta - x''_\delta| < \delta$$

oraz

$$(11) \quad |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq 2\varepsilon_0.$$

W szczególności przyjmijmy

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad x'_\delta = x'_n, \quad x''_\delta = x''_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ

$$(12) \quad a \leq x'_n \leq b,$$

ciąg $\{x'_n\}$ jest ograniczony i na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (twierdzenie 3 rozdz.II §2) można z niego wyjąć podciąg zbieżny $x'_{n_k} \rightarrow c$, przy czym z (12) wynika, że $c \in [a, b]$. Na mocy (10) mamy

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$$

zatem

$$x'_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x''_{n_k} < x'_{n_k} + \frac{1}{n_k}$$

a stąd wynika, że również $x''_{n_k} \rightarrow c$. Ponieważ funkcja f jest ciągła w punkcie c , więc zgodnie z twierdzeniem 1

$$(13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) = f(c).$$

Natomiast z (11) wynika

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$$

dla $k \in \mathbb{N}$, co przeczy równości (13). □

Zauważmy, że w dowodzie korzystaliśmy w sposób istotny z założenia, że funkcja jest ciągła w przedziale *domkniętym* $[a, b]$ (a więc w szczególności w punkcie c). Jeżeli pominiemy to założenie, twierdzenie przestaje być prawdziwe, jak wskazuje Przykład 10.

♡ ♡ ♡

6. Funkcje ograniczone, kres górny i dolny funkcji. Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ jest w tym zbiorze *ograniczona* jeżeli zbiór $f(D)$ jest ograniczony. Równoważne sformułowanie brzmi:

funkcja f jest *ograniczona w zbiorze* $D \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$(14) \quad |f(x)| \leq A$$

dla $x \in D$.

Założmy, że f jest funkcją ograniczoną w zbiorze $D \subset \mathbb{R}$. Wobec tego (por. rozdz. I §2) zbiór $f(D)$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych swój kres górny M i kres dolny m . Liczbę M nazywamy *kresem górnym funkcji f na zbiorze D* , zapisujemy

$$M = \sup_D f$$

lub

$$M = \sup_{x \in D} f(x).$$

Liczbę m nazywamy *kresem dolnym funkcji f na zbiorze D* , zapisujemy

$$m = \inf_D f$$

lub

$$m = \inf_{x \in D} f(x).$$

Z podanych w rozdz. I §2 warunków określających kres górny względnie dolny zbioru wynikają natychmiast

Twierdzenie 10.

$$\sup_D f = M$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

- (i) $f(x) \leq M$ dla $x \in D$,
- (ii) do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $x_\varepsilon \in D$ takie, że

$$f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon.$$

□

oraz

Twierdzenie 11.

$$\inf_D f = m$$

wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki

- (i) $m \leq f(x)$ dla $x \in D$,
- (ii) do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $x_\varepsilon \in D$ takie, że

$$m + \varepsilon > f(x_\varepsilon).$$

□

Niech w dalszym f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *ograniczona z góry (ograniczona z dołu)* w zbiorze D , jeżeli zbiór $f(D)$ jest ograniczony z góry (z dołu). Można to sformułować inaczej w sposób równoważny:

f jest *ograniczona z góry* w zbiorze D , jeżeli istnieje liczba B taka, że

$$f(x) \leq B$$

dla $x \in D$;

f jest *ograniczona z dołu* w zbiorze D , jeżeli istnieje liczba b taka, że

$$b \leq f(x)$$

dla $x \in D$.

Z rozważań rozdz. I §2 wynika, że każda funkcja ograniczona z góry (z dołu) w zbiorze D posiada na zbiorze D skończony kres górny M (kres dolny m). Jeżeli funkcja F nie jest ograniczona z góry w zbiorze D , to przyjmujemy

$$\sup_D f = \infty.$$

Podobnie - jeżeli funkcja f nie jest ograniczona z dołu w zbiorze D , to przyjmujemy

$$\inf_D f = -\infty.$$

Opierając się na twierdzeniu 9 udowodnimy teraz ważną własność funkcji ciągłych.

Twierdzenie 12 (Weierstrassa). *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona i osiąga w nim swoje kresy (górną i dolną).*

DOWÓD. Udowodnimy najpierw

Lemat. *Jeżeli*

$$\sup_D f = M \leq \infty,$$

to istnieje w zbiorze D ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M.$$

DOWÓD LEMATU. Jeżeli $M \in \mathbb{R}$, to zgodnie z twierdzeniem 10 do dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \in D$ takie, że

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M,$$

a stąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach wynika (15). Jeżeli zaś $M = \infty$, to funkcja f nie jest ograniczona z góry w zbiorze D . Wobec tego do dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \in D$ takie, że

$$f(x_n) > n$$

i stąd ponownie wynika (15). □

Przechodząc do dowodu twierdzenia 12 założymy, że funkcja f jest ciągła w przedziale $D = [a, b]$, niech

$$\sup_{[a,b]} f = M \leq \infty$$

i niech $\{x_n\}$ oznacza ciąg, o którym mowa w lemacie. Ciąg ten jest ograniczony, zatem na mocy twierdzenia Bolzano - Weierstrassa (twierdzenie 4 rozdz. II §2) można z niego wyjąć podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}$. Oznaczając

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = g$$

mamy

$$a \leq x_{n_k} \leq b$$

i stąd po przejściu do granicy (por twierdzenie 5 rozdz. II §1)

$$a \leq g \leq b.$$

Ponieważ z założenia funkcja f jest ciągła w punkcie g , mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(g).$$

Z (15) wynika, zgodnie z twierdzeniem o podciągach (twierdzenie 3 rozdz. II §2), że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$$

a więc musi być

$$M = f(g).$$

Oznacza to, że $M < \infty$, zatem funkcja f jest ograniczona z góry i osiąga swój kres górny dla $x = g$.

Dowód, że funkcja f jest ograniczona z dołu i osiąga swój kres dolny przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Uwaga. Jeżeli funkcja f określona w przedziale \mathbb{P} osiąga w nim swój kres górny M (kres dolny m), to liczba ta stanowi jej największą (najmniejszą) wartość w przedziale \mathbb{P} . W związku z tym niektórzy autorzy nazywają liczbę M *maksimum absolutnym* (lub *globalnym*) funkcji f , zaś liczbę m *minimum absolutnym* (lub *globalnym*) funkcji f w przedziale \mathbb{P} .

7. Własność Darboux. Mówimy, że funkcja f określona w przedziale \mathbb{P} ma w tym przedziale *własność Darboux*,¹ jeżeli spełniony jest następujący warunek (zwany *warunkiem Darboux*):

(D) jeżeli $a, b \in \mathbb{P}$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$ oraz

$$f(a) < y < f(b) \quad \text{gdy} \quad f(a) < f(b)$$

lub

$$f(b) < y < f(a) \quad \text{gdy} \quad f(b) < f(a)$$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$y = f(c).$$

Mówiąc mniej precyzyjnie, warunek Darboux oznacza, że funkcja f przyjmuje każdą wartość pośrednią między swoimi dwoma różnymi wartościami czyli, mówiąc inaczej, przechodzi od jednej wartości do drugiej przez wszystkie wartości pośrednie. Wydaje się rzeczą oczywistą, że własność Darboux ma każda funkcja ciągła, jeżeli zauważymy że wykres funkcji ciągłej kojarzy się nam z linią na płaszczyźnie nie mającą żadnych przerw. Istotnie, zachodzi

Twierdzenie 13 (Bolzano - Cauchy'ego). *Funkcja ciągła w przedziale \mathbb{P} ma w tym przedziale własność Darboux.*

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi założymy, że $f(a) < f(b)$ (w przeciwnym przypadku dwódm przebiega podobnie) i niech y będzie ustaloną liczbą spełniającą nierówność

$$f(a) < y < f(b).$$

Należy okazać, że y jest wartością funkcji f w pewnym punkcie przedziału (a, b) . Niech c_0 będzie środkiem przedziału $\mathbb{P}_0 = [a, b]$. Jeżeli $f(c_0) = y$, dowód twierdzenia jest zakończony. W przeciwnym wypadku zachodzi jedna z możliwości

$$(i) \quad f(a) < y < f(c_0) \quad \text{lub} \quad (ii) \quad f(c_0) < y < f(b).$$

¹Jean Gaston Darboux (1842 - 1917), matematyk francuski. Zajmował się analizą matematyczną, geometrią różniczkową i mechaniką, od 1884 r. był członkiem Paryskiej Akademii Nauk.

Przyjmijmy $\mathbb{P}_1 = [a, c_0]$ w przypadku (i) zaś $\mathbb{P}_1 = [c_0, b]$ w przypadku (ii) i przeprowadźmy opisaną konstrukcję zastępując przedział \mathbb{P}_0 przez $\mathbb{P}_1 = [a_1, b_1]$. Jeżeli c_1 jest środkiem przedziału \mathbb{P}_1 oraz $f(c_1) = y$, dowód jest zakończony. Jeżeli równość ta nie zachodzi, mamy znowu dwie możliwości

$$(i) \quad f(a_1) < y < f(c_1) \quad \text{lub} \quad (ii) \quad f(c_1) < y < f(b_1).$$

W przypadku (i) przyjmujemy $\mathbb{P}_2 = [a_1, c_1]$, w przypadku (ii) zaś $\mathbb{P}_2 = [c_1, b_1]$. Jeżeli powtarzając opisaną konstrukcję otrzymamy punkt c_m dla którego $f(c_m) = y$, dowód twierdzenia jest zakończony. Jeżeli zaś wartość y nie jest przujmowana przez funkcję f w żadnym punkcie c_n , otrzymujemy ciąg zstępujący przedziałów $\mathbb{P}_n = [a_n, b_n]$ taki, że

$$(16) \quad f(a_n) < y < f(b_n).$$

Na podstawie twierdzenia Ascoliego (twierdzenie 1 rozdz.II §2) istnieje punkt c należący do wszystkich przedziałów \mathbb{P}_n , mamy zatem

$$(17) \quad a_n \leq c \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Każdy z ciągów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jest zbieżny jako ciąg monotoniczny i ograniczony (por. twierdzenie 4 rozdz.II §2). Ponieważ

$$(18) \quad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad n \rightarrow \infty,$$

oba ciągi mają tę samą granicę, zaś z (17) wynika, że granicą tą jest liczba c . Korzystając z ciągłości funkcji f dostajemy po przejściu do granicy w (16)

$$f(c) \leq y \leq f(c)$$

czyli $f(c) = y$. □

Uwaga. Przeprowadzony dowód podaje jednocześnie metodę przybliżenia rozwiązania (być może nie jedynego) równania

$$f(x) = y \quad (y \text{ dane}).$$

Oznaczając bowiem przez c_n środek przedziału \mathbb{P}_n mamy

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

i stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c.$$

Oszacowanie błędu nie przedstawia trudności, bowiem

$$|c_n - c| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

czyli wobec (18)

$$|c_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Jak już wspomnieliśmy, własność Darboux kojarzy nam się z pojęciem funkcji, której wykres stanowi linię ciągłą na płaszczyźnie. Z udowodnionego twierdzenia wynika, że ciągłość funkcji stanowi tu warunek dostateczny. Nie jest to jednak bynajmniej warunek konieczny, jak wskazuje następujący przykład.

Przykład 11. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \neq 0$ jako superpozycja funkcji ciągłych (twierdzenie 8), nie jest natomiast ciągła w punkcie $x = 0$, gdyż nie ma w tym punkcie granicy (por. Przykład 2 i Przykład 5 §2). Okażemy, że mimo to funkcja f ma własność Darboux w całym przedziale $(-\infty, \infty)$.

Obierzmy punkty a, b ($a < b$) tak, by $f(a) \neq f(b)$. Oczywiście, jeżeli przedział (a, b) nie zawiera zera, to warunek (D) wynika z ciągłości funkcji w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ na mocy twierdzenia 13. Wystarczy zatem rozważać przypadek

$$a < 0 < b.$$

Funkcja sinus jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych, zatem zgodnie z twierdzeniem 13 przyjmuje każdą wartość z przedziału $[-1, 1]$ w każdym przedziale

$$\mathbb{P}_k = \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

oraz

$$\mathbb{Q}_k = \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \right],$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wobec tego rozważana przez nas funkcja f przyjmuje każdą wartość z przedziału $[-1, 1]$, gdy $y = \frac{1}{x}$ przebiega którykolwiek z przedziałów \mathbb{P}_k , \mathbb{Q}_k , co jest równoważne warunkowi

$$\frac{2}{(4k+3)\pi} \leq x \leq \frac{2}{(4k+1)\pi} \quad \text{lub} \quad \frac{2}{(4k+5)\pi} \leq x \leq \frac{2}{(4k+3)\pi}.$$

Jeżeli obierzemy k tak, by zachodziła nierówność

$$\frac{2}{(4k+1)\pi} < b$$

to funkcja f przyjmie w przedziale (a, b) każdą wartość z przedziału $[-1, 1]$ (nawet nieskończenie wiele razy). Ponieważ

$$f(a), f(b) \in [-1, 1]$$

funkcja przyjmie każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$ (por. rys 7a). □

Z twierdzeń 12 i 13 wynika jako prosty wniosek

Twierdzenie 14. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym \mathbb{I} i niech m, M oznaczają jej kresy, dolny i górny, na tym przedziale. Wówczas

$$f(\mathbb{I}) = [m, M].$$

DOWÓD. Z twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12) wynika istnienie punktów $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$ takich, że

$$f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M.$$

Jeżeli $m < y_0 < M$, to zgodnie z twierdzeniem 13 istnieje punkt x_0 taki, że

$$x_1 < x_0 < x_2$$

oraz

$$f(x_0) = y_0.$$

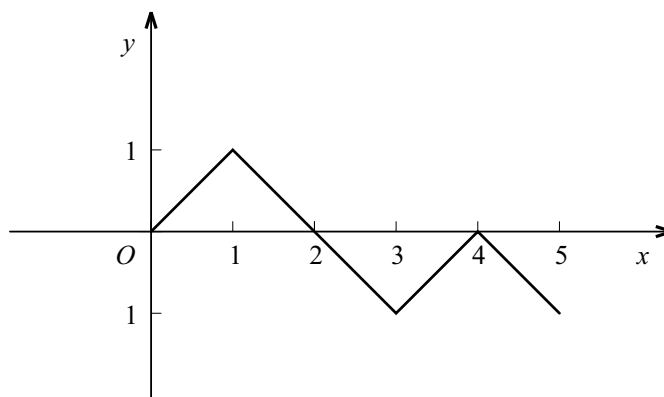
Zatem funkcja f przyjmuje w przedziale \mathbb{I} każdą wartość z przedziału $[m, M]$. Oczywiście nie może przyjmować wartości nie należących do tego przedziału, gdyż

$$m \leq f(x) \leq M$$

dla $x \in \mathbb{I}$ z definicji kresów. □

Przykład 12. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x < 3, \\ x - 4 & \text{dla } 3 \leq x < 4, \\ 4 - x & \text{dla } 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$



[rys. 15]

Jest to funkcja *przedziałami liniowa* (rys. 15). W każdym z przedziałów $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$ funkcja f jest ciągła jako funkcja liniowa. Aby wykazać jej ciągłość w całym

przedziale $[0, 5]$ wystarczy zbadać granice jednostronne na końcach wspomnianych przedziałów. Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= 0 = f(0), \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1 = f(1), \\ \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = -1 = f(3), \\ \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 0 = f(4), \\ \lim_{x \rightarrow 5-} f(x) &= -1 = f(5)\end{aligned}$$

skąd wynika ciągłość w punktach załamania wykresu. Zatem f jest ciągła w przedziale domkniętym $\mathbb{I} = [0, 5]$. Z rys.15 widać, że

$$m = -1 = f(3) = f(5)$$

oraz

$$M = 1 = f(1),$$

funkcja f osiąga więc w przedziale \mathbb{I} oba swoje kresy - zgodnie z twierdzeniem 12. Zbiór wartości funkcji $f(\mathbb{I})$ czyli rzut wykresu na oś y -ów jest przedziałem $[-1, 1]$ - zgodnie z twierdzeniem 14.

8. Ciągłość funkcji odwrotnej. W §1 wprowadziliśmy pojęcie funkcji odwrotnej do funkcji różnowartościowej. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 15 (o ciągłości funkcji odwrotnej). *Jeżeli f jest funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną w przedziale domkniętym $\mathbb{I} = [a, b]$, to funkcja odwrotna jest ciągła w przedziale $f(\mathbb{I})$.*

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi założymy, że funkcja f jest ściśle rosnąca, wówczas

$$f(\mathbb{I}) = [f(a), f(b)].$$

Niech $y_0 \in (f(a), f(b))$, zatem

$$y_0 = f(x_0)$$

gdzie $a < x_0 < b$. Obierzmy dowolnie ciąg $\{y_n\}$ zbieżny do y_0 , wówczas przynajmniej dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu leżą we wnętrzu przedziału $f(\mathbb{I})$. Zgodnie z twierdzeniem 13 oznacza to, że

$$y_n = f(x_n) \quad (a < x_n < b).$$

Aby udowodnić ciągłość funkcji odwrotnej w punkcie y_0 należy wykazać, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x_0 . Przypuśćmy, że tak nie jest. Wobec tego istnieje taka liczba $\varepsilon_0 > 0$, że przy dowolnym obiorze liczby k znajdziemy w ciągu wyraz x_{n_k} ($n_k > k$), dla którego nie jest spełniona nierówność epsilonowa przy $\varepsilon = \varepsilon_0$. Przyjmując kolejno $k = 1, 2, \dots$ otrzymujemy

ciąg $\{x_{n_k}\}$ wybrany z ciągu $\{x_n\}$ (por. rozdz. II §2 punkt 3) o tej własności, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi jedna z nierówności

$$x_{n_k} \leq x_0 - \varepsilon_0 \quad \text{lub} \quad x_{n_k} \geq x_0 + \varepsilon_0.$$

Zgodnie z założeniem, że funkcja f jest ściśle rosnąca, wynika stąd dla $k \in \mathbb{N}$

$$(19) \quad y_{n_k} \leq Y_1 < y_0 \quad \text{lub} \quad y_{n_k} \geq Y_2 > y_0,$$

gdzie

$$Y_1 = f(x_0 - \varepsilon_0), \quad Y_2 = f(x_0 + \varepsilon_0).$$

Ciąg $\{y_{n_k}\}$ jest ciągiem wybranym z ciągu $\{y_n\}$, zatem zgodnie z twierdzeniem 2 rozdz. II §2 jest zbieżny do y_0 - co przeczy nierównościom (19).

Udowodniliśmy zatem ciągłość funkcji odwrotnej w każdym punkcie wewnętrznym przedziału $f(\mathbb{P})$. Dowód prawostronnej ciągłości w punkcie $f(a)$ i lewostronnej ciągłości w punkcie $f(b)$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. \square

Zastosujemy twierdzenie 15 do dowodu ciągłości funkcji odwrotnych do funkcji elementarnych, które były omawiane w §1.

1⁰ Funkcja

$$f(x) = \sin x$$

jest ciągła i ściśle rosnąca w przedziale $\mathbb{P} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, przy czym $m = 1$, $M = 1$. Wobec tego *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \arcsin x$$

jest określona i ciągła w przedziale $[-1, 1]$.

2⁰ Funkcja

$$f(x) = \cos x$$

jest ciągła i ściśle monotoniczna w przedziale $\mathbb{P} = [0, \pi]$, przy czym $m = -1$, $M = 1$. Wobec tego *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \arccos x$$

jest określona i ciągła w przedziale $[-1, 1]$.

3⁰ Funkcja

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

jest ciągła i ściśle rosnąca w przedziale otwartym $\mathbb{P} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, przy czym

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty.$$

Opierając się na twierdzeniu 13 łatwo udowodnić, że funkcja $\operatorname{tg} x$ przyjmuje w przedziale \mathbb{P} każdą wartość $y_0 \in \mathbb{R}$. Istotnie, z (20) wynika (por. §2 p. 5) istnienie liczby $\delta > 0$ takiej, że

$$\operatorname{tg} x < y_0 \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} + \delta$$

oraz

$$\operatorname{tg} x > y_0 \quad \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}.$$

Wobec tego

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right) < y_0 < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right),$$

a więc istnieje

$$x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)$$

takie, że

$$y_0 = \operatorname{tg} x_0.$$

Ponadto, twierdzenie 15 zapewnia ciągłość funkcji odwrotnej w punkcie y_0 , gdyż funkcja $\operatorname{tg} x$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}]$. Zatem *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \operatorname{arctg} x$$

jest określona i ciągła w przedziale $(-\infty, \infty)$.

4^o Funkcja

$$f(x) = \operatorname{ctg} x$$

jest ciągła i ściśle malejąca w przedziale otwartym $\mathbb{P} = (0, \pi)$, przy czym

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Rozumując podobnie, jak w punkcie 3^o dowodzimy, że funkcja $\operatorname{ctg} x$ przyjmuje w przedziale \mathbb{P} każdą wartość $y_0 \in \mathbb{R}$ i że funkcja odwrotna jest ciągła w punkcie y_0 . Zatem *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \operatorname{arcctg} x$$

jest określona i ciągła w przedziale $(-\infty, \infty)$.

5^o W §1 wprowadziliśmy funkcję logarytmiczną jako odwrotną do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x.$$

o podstawie $a > 1$. Funkcja f jest ciągła i ściśle rosnąca w przedziale $(-\infty, \infty)$, przy czym (por. §2 Przykład 10)

$$(21) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

Przyjmuje ona każdą wartość dodatnią. Istotnie, z (21) wynika (por. §2 twierdzenia 5, 6), że do dowolnej liczby $y_0 > 0$ można dobrać liczby x_1, x_2 tak, by

$$a^x < y_0 \quad \text{dla} \quad x < x_1$$

oraz

$$a^x > y_0 \quad \text{dla} \quad x > x_2.$$

Wobec tego

$$a^{x_1-1} < y_0 < a^{x_2+1}$$

i zgodnie z twierdzeniem 13 istnieje

$$x_0 \in (x_1 - 1, x_2 + 1)$$

takie, że

$$y_0 = a^{x_0}.$$

Twierdzenie 15 zapewnia ciągłość funkcji odwrotnej w punkcie y_0 , gdyż funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[x_1 - 1, x_2 + 1]$. Zatem *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \log_a x$$

jest określona i ciągła w przedziale $(0, \infty)$. Wynika stąd, że dodatkowe założenie uczynione w dowodzie twierdzenia 4 §1 nie jest potrzebne.

6^o W rozdziale I §2 udowodniliśmy istnienie pierwiastka stopnia n z dowolnej liczby dodatniej. Podamy teraz inny dowód tego faktu oparty na twierdzeniu 13.

Funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest ciągła i ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$. Przyjmując $t = x - 1$ i stosując nierówność Bernoulliego dostajemy dla $x > 1$

$$x^n = (1 + t)^n \geq 1 + n(x - 1)$$

skąd łatwo otrzymujemy

$$(22) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

(szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi). Ponadto

$$f(0) = 0.$$

Z ciągłości funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ oraz z (22) wynika, że do dowolnie obranej liczby $y_0 > 0$ istnieją liczby dodatnie x_1, x_2 takie, że

$$0 < f(x) < y_0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < x_1$$

oraz

$$f(x) > y_0 \quad \text{dla} \quad x > x_2.$$

Wobec tego

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) < y_0 < f(2x_2)$$

i zgodnie z twierdzeniem 13 w przedziale $(\frac{x_1}{2}, 2x_2)$ istnieje punkt y_0 taki, że

$$x_0^n = y_0$$

a to oznacza, że

$$x_0 = \sqrt[n]{y_0}.$$

Ponieważ funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[0, 2x_2]$, funkcja odwrotna jest ciągła w punkcie y_0 i ciągła prawostronnie w punkcie $y = 0$. Zatem *funkcja odwrotna*

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

jest określona i ciągła w przedziale $[0, \infty)$.

7^o Funkcja potęgowa

$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

określona w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$ może być przedstawiona w postaci

$$f(x) = e^{\alpha \log x}.$$

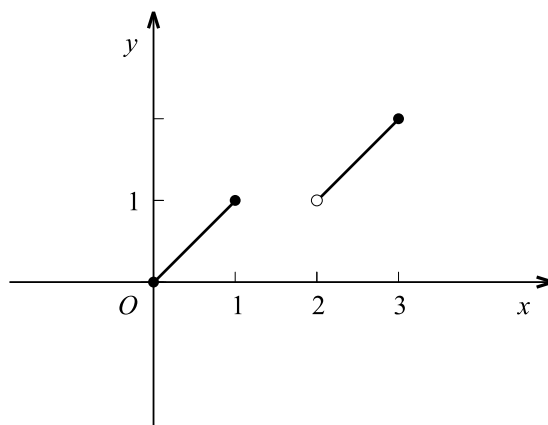
Wobec tego *funkcja potęgowa jest ciągła w przedziale $(0, \infty)$ na mocy twierdzenia 8 jako superpozycja funkcji ciągłych (logarytmicznej, liniowej i wykładniczej).*

Udowodniliśmy zatem, że funkcje elementarne wprowadzone w §1 są ciągłe w przedziałach, w których są określone.

Wróćmy jeszcze do twierdzenia 15 o ciągłości funkcji odwrotnej.

Przykład 13. Niech (rys. 16)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1 & \text{dla } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$



[rys. 16]

Funkcja f jest ściśle rosnąca i ciągła w każdym z przedziałów $[0, 1]$, $(2, 3]$. Funkcja odwrotna ma postać

$$g(y) = \begin{cases} y & \text{dla } 0 \leq y \leq 1, \\ y + 1 & \text{dla } 1 < y \leq 2 \end{cases}$$

nie jest więc ciągła w punkcie $y = 1$, gdyż

$$\lim_{y \rightarrow 1^+} g(y) = 2 \neq \lim_{y \rightarrow 1^-} g(y) = 1,$$

zatem nie istnieje granica funkcji g przy $y \rightarrow 1$. Widzimy więc, że funkcja odwrotna do funkcji f ciągłej może nie być ciągła, jeżeli pominiemy założenie (uczynione w twierdzeniu 15), że f jest rozważana na przedziale. W naszym przykładzie nieciągłość funkcji odwrotnej wynika z faktu, że funkcja f jest rozważana na sumie przedziałów $[0, 1] \cup (2, 3]$.

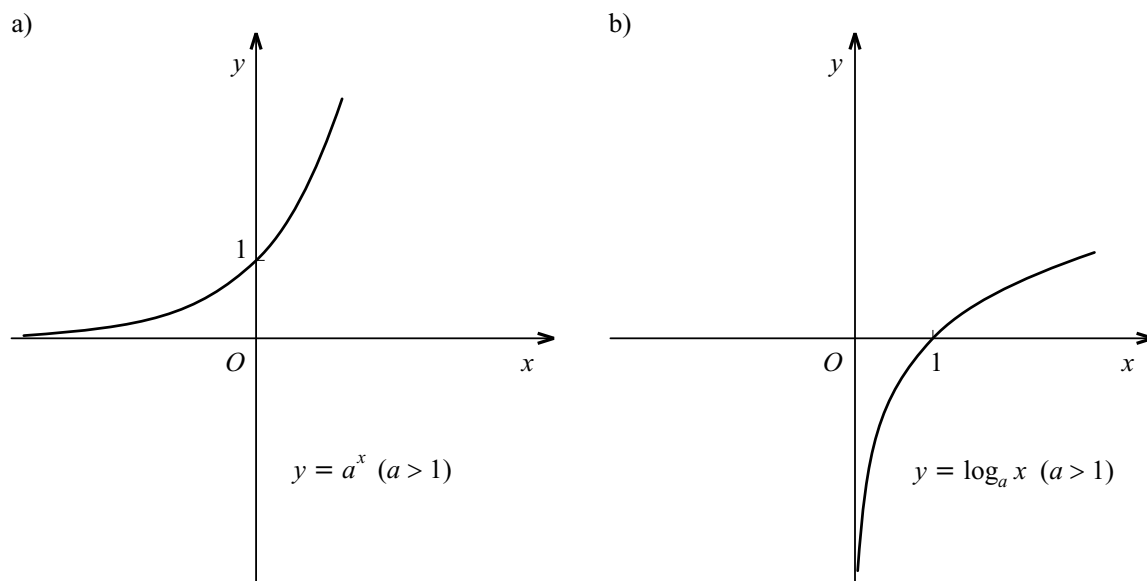
9. Wykresy funkcji: wykładniczej, logarytmicznej i potęgowej. Na zakończenie zestawimy jeszcze raz własności funkcji wykładniczej, logarytmicznej i potęgowej oraz naskicujemy ich wykresy.

I. Wiemy, że funkcja wykładnicza

$$f(x) = a^x \quad (a > 1)$$

jest określona na całej osi rzeczywistej, ściśle rosnąca oraz

$$a^0 = 1.$$



Wykres jej podajemy na rys. 17a) (por. wzory (21)).

II. Funkcja logarytmiczna

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 1)$$

jest określona w przedziale $(0, \infty)$ i ściśle rosnąca jako odwrotna do funkcji ściśle rosnącej (por. §1 twierdzenie 1). Ponadto

$$(24) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

oraz

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty.$$

Aby wykazać (24) wystarczy, zgodnie z twierdzeniem 9 §2, przy dowolnie obranej liczbie $q \in \mathbb{R}$ przyjąć

$$\delta = a^q,$$

wówczas

$$\log_a x < \log_a \delta = q$$

dla $0 < x < \delta$. Dla dowodu (25) należy oprzeć się na twierdzeniu 5 §2 i przyjąć dla dowolnie obranego $Q \in \mathbb{R}$

$$P = a^Q,$$

wówczas

$$\log_a x > \log_a P = Q$$

dla $x > P$. Z definicji funkcji logarytmicznej wynika, że

$$\log_a 1 = 0.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \log_a x < 0 & \text{ dla } 0 < x < 1, \\ \log_a x > 0 & \text{ dla } x > 1. \end{aligned}$$

Wykres funkcji logarytmicznej podany jest na rys. 17b.

Na zakończenie przypomnimy regułę rachunkową

$$(26) \quad \log_a x = (\log_a b)(\log_b x) \quad (a, b > 1; x > 0)$$

z której wynika, że funkcje logarytmiczne o różnych podstawach różnią się od siebie jedynie stałym (dodatnim) czynnikiem. Sprawdzenie wzoru (26) pozostawiamy Czytelnikowi.

III. Funkcja potęgowa

$$f(x) = x^\alpha$$

jest określona w przedziale $(0, \infty)$ i ściśle rosnąca gdy $\alpha > 0$ oraz ściśle malejąca gdy $\alpha < 0$. Ze wzorów (21), (23), (24), (25) wynika, że

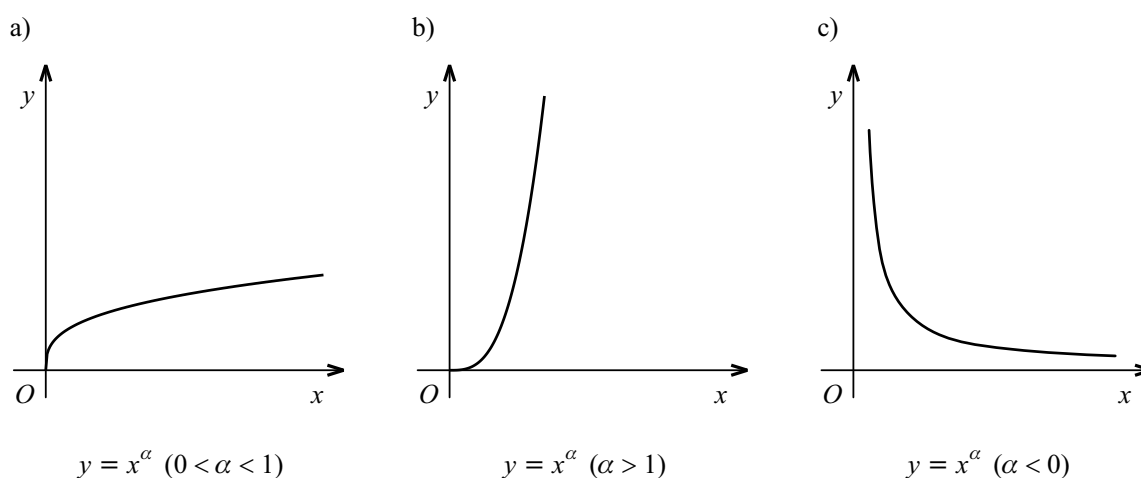
(i) dla $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty,$$

(ii) dla $\alpha < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = 0.$$

Wykres funkcji potęgowej podany jest na rysunkach 18 a), 18 b), 18 c).



[rys. 18]



10. Własności kresu górnego i dolnego funkcji. W punkcie 6 wprowadziliśmy pojęcie kresu górnego i kresu dolnego funkcji, teraz omówimy dokładniej ich własności. Będziemy zakładać, że funkcje f, g, F mają wspólną dziedzinę $D \subset \mathbb{R}$ oraz że są ograniczone w D .

Twierdzenie 16. *Jeżeli*

$$(27) \quad f(x) \leq g(x)$$

dla $x \in D$ to

$$(28) \quad \inf_D f \leq \inf_D g, \quad \sup_D f \leq \sup_D g.$$

DOWÓD opiera się na lemacie, który wynika natychmiast z definicji kresu górnego i kresu dolnego.

Lemat. *Jeżeli*

$$A \leq F(x) \leq B$$

dla $x \in D$, to

$$A \leq \inf_D F \leq \sup_D F \leq B.$$

Przejdźmy do dowodu twierdzenia. Z nierówności (27) wynika, że każde ograniczenie dolne funkcji f jest również ograniczeniem dolnym funkcji g , zatem

$$\inf_D f \leq g(x) \quad \text{dla } x \in D,$$

i stąd na mocy lematu wynika pierwsza z nierówności (28). Podobnie każde ograniczenie górne funkcji g jest ograniczeniem górnym funkcji f , stąd

$$f(x) \leq \sup_D g \quad \text{dla } x \in D$$

i na mocy lematu dostajemy drugą z nierówności (28). □

Twierdzenie 17. *Zachodzą nierówności*

$$(i) \quad \sup_D (f + g) \leq \sup_D f + \sup_D g,$$

$$(ii) \quad \inf_D (f + g) \geq \inf_D f + \inf_D g.$$

Ponadto, jeżeli $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ dla $x \in D$, to

$$(iii) \quad \sup_D (fg) \leq (\sup_D f)(\sup_D g),$$

$$(iv) \quad \inf_D (fg) \geq (\inf_D f)(\inf_D g).$$

DOWÓD. Z definicji kresu górnego mamy dla $x \in D$

$$(29) \quad f(x) \leq \sup_D f$$

oraz

$$(30) \quad g(x) \leq \sup_D g,$$

co po dodaniu daje

$$f(x) + g(x) \leq \sup_D f + \sup_D g.$$

Stosując lemat otrzymujemy punkt (i). W przypadku f, g nieujemnych możemy nierówności (29), (30) pomnożyć stronami, co daje

$$f(x)g(x) \leq (\sup_D f)(\sup_D g)$$

dla $x \in D$, a stąd w oparciu o lemat dostajemy (iii). Dowód punktów (ii), (iv) przebiega podobnie, pozostawiamy go Czytelnikowi. \square

Twierdzenie 18. *Zachodzą równości*

$$(i) \quad \sup_D(\alpha f) = \alpha \sup_D f, \quad \inf_D(\alpha f) = \alpha \inf_D f$$

gdy $\alpha \geq 0$,

$$(ii) \quad \sup_D(\alpha f) = \alpha \inf_D f, \quad \inf_D(\alpha f) = \alpha \sup_D f$$

gdy $\alpha \leq 0$,

$$(iii) \quad \sup_D(\beta + f) = \beta + \sup_D f, \quad \inf_D(\beta + f) = \beta + \inf_D f$$

dla dowolnego $\beta \in \mathbb{R}$.

DOWÓD. Dla $\alpha = 0$ równości w punktach (i) i (ii) są oczywiste. Załóżmy wobec tego, że $\alpha > 0$ i niech

$$M = \sup_D f.$$

Oznacza to, że

$$(31) \quad f(x) \leq M$$

dla $x \in D$ oraz że do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje punkt $x_\varepsilon \in D$, w którym spełniona jest nierówność

$$(32) \quad f(x_\varepsilon) > M - \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Po pomnożeniu (31), (32) przez α stwierdzamy, że (por. twierdzenie 10)

$$\sup_D(\alpha f) = \alpha M$$

co daje pierwszą z równości (i). Dowody pozostałych równości są podobne i pozostawiamy je Czytelnikowi. \square

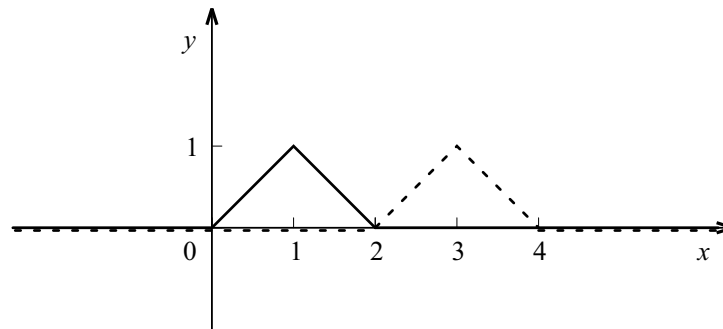
Zauważmy, że nierówności w twierdzeniu 17 nie można zastąpić przez znak $=$, jak wskazuje następujący

Przykład 14. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

oraz

$$g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } 2 \leq x \leq 3, \\ 4 - x & \text{dla } 3 < x \leq 4, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



[rys. 19]

Na rys. 19 podane są wykresy funkcji f (linia ciągła) oraz funkcji g (linia przerywana). Mamy

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \sup_{\mathbb{R}} g = \sup_{\mathbb{R}} (f + g) = 1$$

oraz

$$f(x)g(x) = 0$$

dla $x \in \mathbb{R}$, zatem w punktach (i), (iii) twierdzenia 17 zachodzi ostra nierówność. \square

Zadania.

1. Znaleźć granice ciągów

$$a_n = \sin\left(\sqrt[2n]{2n} \frac{\pi}{2}\right),$$

$$b_n = \cos\left(\pi e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right),$$

$$c_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} u_n\right) \quad \text{gdzie} \quad u_n = \frac{-1}{n} (1 + \sqrt{5} + \dots + \sqrt[n]{5}),$$

$$d_n = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} n^{1/n}\right),$$

$$x_n = \log_2 \frac{4n+1}{n+2},$$

$$y_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n},$$

$$z_n = 3^{\sqrt[n]{n2^{-n}}}, \quad w_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2}.$$

Wskazówka. Wykorzystać ciągłość funkcji trygonometrycznych, funkcji logarytmicznej, wykładniczej i potęgowej oraz oprzeć się na twierdzeniu 1.

2. Wyrażenie

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (a_j \geq 0 \quad \text{dla} \quad j = 1, \dots, n)$$

nazywamy *średnią geometryczną* liczb a_1, \dots, a_n . Udowodnić

Twierdzenie o średniej geometrycznej. *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny do granicy $a > 0$ (być może niewłaściwej), to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = a.$$

Wskazówka. Logarytmując wyrażenie G_n sprowadzić zagadnienie do twierdzenia o średniej arytmetycznej (rozd. II §2 twierdzenie 12). Następnie wykorzystać własności funkcji logarytmicznej i wykładniczej (punkt 8, 9) oraz twierdzenie 1.

3. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie o średniej geometrycznej (zadanie 2) do ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

4. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$$

dla dowolnie ustalonego $\alpha \in \mathbb{R}$.

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 13 §2 oraz ciągłość funkcji potęgowej

$$f(x) = x^\alpha.$$

5. Obliczyć granicę ciągu określonego następująco

$$\begin{aligned} v_1 &= a > 0, & v_2 &= b > 0, \\ v_{n+1} &= \sqrt{v_{n-1} \cdot v_n} \quad \text{dla } n > 1. \end{aligned}$$

Wskazówka. Najpierw znaleźć granicę ciągu

$$u_n = \log v_n$$

opierając się na zadaniu 16 rozdz. II §2. Następnie skorzystać z ciągłości funkcji wykładniczej i oprzeć się na twierdzeniu 1.

6. Funkcję

$$g(x) = \log_a x \quad (0 < a < 1)$$

definiujemy jako funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x$$

(podobnie, jak w przypadku $a > 1$). Udowodnić, że funkcja g jest określona dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Narysować jej wykres.

Wskazówka. Przeprowadzić rozumowanie podobne jak w przypadku $a > 1$ (por. punkt 8).

7. Dla funkcji g określonej w zadaniu 6 udowodnić twierdzenie 4 §1 oraz zależności

$$\begin{aligned} \log_a x &= -\log_{1/a} x, \\ (\log_a b) \cdot (\log_b a) &= 1, \\ \log_a x &= (\log_a b)(\log_b x) \end{aligned}$$

dla $a, b, x > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

8. Które z podanych liczb są wymierne

$$\log_{\sqrt{2}} 2, \quad \log_3 \sqrt{3}, \quad \log_{10} 2, \quad \log_5 3 ?$$

9. Udowodnić, że

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \infty, \\ \text{(ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0. \end{aligned}$$

Wskazówka. W punkcie (i) zastosować podstawienie

$$y = \log x,$$

następnie wykorzystać zadanie 15 §2. W punkcie (ii) podstawić

$$t = \frac{1}{x}$$

i wykorzystać punkt (i).

10. Naszkicować wykres i zbadać ciągłość następujących funkcji

$$\begin{aligned} \text{a.) } f(x) &= x[x], & \text{b.) } f(x) &= x - [x], \\ \text{c.) } f(x) &= |x| + |x + 1|, & \text{d.) } f(x) &= \frac{x}{1 + |x|}. \end{aligned}$$

11. Podać przykład funkcji ciągłej g takiej, by funkcja

$$(33) \quad f(x) = [g(x)]$$

była a.) ciągła, b.) nieciągła. Przy jakich założeniach o funkcji g funkcja f określona wzorem (33) jest ciągła?

12. Podać dziedzinę i naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = (x - 1)^{\sqrt{2}}, \quad g(x) = (x^2 + 1)^{-\sqrt{5}}.$$

Czy funkcje te są ciągłe?

13. Podać dziedzinę i zbadać ciągłość funkcji

$$\begin{aligned} \text{a.) } f(x) &= \log(1 + \cos^2 x + \sin^2 x), \\ \text{b.) } f(x) &= \log(1 - 2x), \\ \text{c.) } f(x) &= (1 - x^2)^{\log 3}. \end{aligned}$$

14. Naszkicować wykres i zbadać ciągłość funkcji

$$\begin{aligned} \text{a.) } f(x) &= \begin{cases} |\sin \frac{1}{x}| & \text{dla } x \neq 0, -\frac{2}{\pi} \leq x \leq \frac{2}{\pi}, \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \\ \text{b.) } f(x) &= \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, -\frac{2}{\pi} \leq x \leq 2\pi, \\ 2 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \\ \text{c.) } f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x^2-1} & \text{dla } x \neq \pm 1, -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \\ 0 & \text{dla } x = 1, x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Czy funkcje te mają własność Darboux?

15. Niech f, g będą funkcjami ograniczonymi w pewnym otoczeniu punktu a , przy czym f jest ciągła w punkcie a , zaś g jest w tym punkcie nieciągła. Udowodnić, że iloczyn fg jest funkcją ciągłą w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) = 0$.

16. Niech f będzie funkcją parzystą, g funkcją nieparzystą. Udowodnić, że
 a.) f jest ciągła w zerze wtedy i tylko wtedy gdy jest prawostronnie ciągła w zerze,
 b.) g jest ciągła w zerze wtedy i tylko wtedy gdy jest prawostronnie ciągła w zerze.

17. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych,} \\ \frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q} \text{ (} p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z} \text{)} \end{cases}$$

(zakładamy, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny).

Wskazówka. Wykorzystać zadanie 6 rozdz. I §2 oraz zadanie 21 rozdz. II §1.

18. Niech

$$f(x) = -n(n+1)x + 2n + 1 \quad \text{dla} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Udowodnić, że funkcja f jest ciągła w przedziale $(0, 1]$, ale nie jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.

19. Niech

$$f(x) = -n^2x + b_n \quad \text{dla} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

a.) dobrać stałe b_n tak, by funkcja f była ciągła w przedziale $(0, 1]$,
 b.) udowodnić, że przy żadnym obiorze stałych b_n funkcja f nie jest jednostajnie ciągła w tym przedziale.

20. Udowodnić, że funkcja jednostajnie ciągła w przedziale \mathbb{IP} jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału i ma granicę jednostronną na jego końcach. Czy słuszne jest twierdzenie odwrotne?

Wskazówka. W dowodzie istnienia granicy oprzeć się na twierdzeniu 13 §2.

21. Zbadać jednostajną ciągłość następujących funkcji w przedziale $(0, 10)$:

$$\begin{aligned} \text{a.) } f(x) &= \frac{1}{x^2}, & \text{b.) } f(x) &= \frac{1}{1-x}, \\ \text{c.) } f(x) &= \sin(\pi x^2). \end{aligned}$$

22. Udowodnić, że funkcja jednostajnie ciągła w przedziale ograniczonym jest w tym przedziale ograniczona.

23. Udowodnić, że iloczyn dwóch funkcji jednostajnie ciągłych i ograniczonych w przedziale \mathbb{P} jest funkcją jednostajnie ciągłą.

24. Niech

$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin x.$$

Udowodnić, że a.) każda z funkcji f , g jest jednostajnie ciągła w przedziale $(-\infty, \infty)$; b.) iloczyn fg nie jest jednostajnie ciągły w tym przedziale.

Porównać z twierdzeniem sformułowanym w zadaniu 23.

25. Funkcja f jednostajnie ciągła w przedziale $(0, \infty)$ spełnia warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(na) = 0 \quad \text{dla dowolnego } a > 0.$$

Udowodnić, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Wskazówka. Skorzystać z równości

$$f(x) = [f(x) - f(na)] + f(na)$$

i oszacować oba składniki po prawej stronie dla dostatecznie dużych x .

26. Udowodnić, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najmniej jeden pierwiastek.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 17 §2 i oprzeć się na twierdzeniu 13.

27. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek

$$x^2 + y^2 = 1$$

istnieje dokładnie jedna liczba $\alpha \in (-\pi, \pi]$ taka, że

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha.$$

Wskazówka. Rozważyć oddzielnie przypadki $x = 0$, $y^2 = 1$ oraz $x^2 = 1$, $y = 0$, następnie założyć kolejno $0 < x < 1$ oraz $-1 < x < 0$ i oprzeć się na twierdzeniu 13.

28. Dla podanej niżej funkcji f i przedziału \mathbb{P} znaleźć zbiór $f(\mathbb{P})$. Wynik porównać z twierdzeniem 14.

a.) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \mathbb{P} = (0, 1];$

b.) $f(x) = \sin x \quad \text{dla } 0 < x \leq \pi,$
 $f(0) = 1, \quad \mathbb{P} = [0, 1];$

c.) $f(x) = 2x \quad \text{dla } 0 \leq x < 1,$
 $f(1) = 3, \quad \mathbb{P} = [0, 1];$

d.) $f(x) = x^2, \quad \mathbb{P} = [-1, 1].$

Naszkiecować wykresy podanych funkcji. Które z nich są ciągłe w przedziale \mathbb{P} ?

29. Podać przykład funkcji f , g dla których zachodzi ostra nierówność w punktach (ii), (iv) twierdzenia 17.

30. Niech

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos x, \quad D = [0, \frac{\pi}{2}].$$

Sprawdzić, że w punktach (i), (iii) twierdzenia 17 zachodzi nierówność ostra.

31. Udowodnić, że funkcja f ciągła i różnowartościowa w przedziale $[a, b]$ jest albo ściśle rosnąca albo ściśle malejąca w tym przedziale.

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 13 udowodnić najpierw, że dla $x \in (a, b)$

- (i) z warunku $f(a) < f(b)$ wynika $f(a) < f(x) < f(b)$,
- (ii) z warunku $f(a) > f(b)$ wynika $f(a) > f(x) > f(b)$.

Następnie rozważyć punkty

$$a < x' < x'' < b$$

i powtórzyć przeprowadzone poprzednio rozumowanie.

32. Uogólnić stwierdzenie sformułowane w zadaniu 31 na przypadek dowolnego przedziału \mathbb{P} (ograniczonego lub nie).

33. Pokazać na przykładach, że założenie ciągłości funkcji jest istotne w zadaniach 31 i 32.

34. Udowodnić, że każda funkcja różnowartościowa i mająca własność Darboux w przedziale \mathbb{P} jest w tym przedziale ciągła.

Wskazówka. Wykazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{P}$ spełniony jest warunek podany w twierdzeniu 2.

35. Narysować wykres i zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$

oraz

$$g(x) = \arcsin(\cos x).$$

Wskazówka. Zauważyć najpierw, że funkcja f jest nieparzysta, funkcja g jest parzysta oraz że obie są okresowe o okresie 2π .

36. Która z funkcji

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = e^{2x}, \quad h(x) = 2 \cos x$$

przyjmuje wartość

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

37. W jakim otoczeniu punktu x_0 prawdziwa jest nierówność $f(x) < M$, jeżeli

a.) $f(x) = x^2 + 1, \quad x_0 = 1, \quad M = 10;$

b.) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad M = 2;$

c.) $f(x) = 2 \sin x, \quad x_0 = \frac{3}{2}\pi, \quad M = -1.$

38. Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu a , ciągłą w punkcie a . Udowodnić, że jeżeli $f(a) \neq 0$, to w pewnym otoczeniu punktu a funkcja f przyjmuje wartości różne od zera i tego samego znaku, co $f(a)$.



§4. Pochodna funkcji.

1. Pochodna i jej interpretacja geometryczna. Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu ustalonego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcję

$$(1) \quad \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(określoną dla dostatecznie małych $|h| \neq 0$) nazywamy *ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0* . Jeżeli istnieje granica (być może niewłaściwa - por. §2 punkt 1) funkcji $\varphi(h)$ przy $h \rightarrow 0$, to nazywamy ją *pochodną funkcji f w punkcie x_0* . Oznaczamy

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = f'(x_0).$$

Przykład 1. Niech

$$f(x) = x^2.$$

Funkcja f jest określona w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Dla dowolnie ustalonego x_0 mamy

$$\varphi(h) = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h},$$

czyli po redukcji w liczniku i wykonaniu dzielenia

$$\varphi(h) = 2x_0 + h.$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

Przykład 2. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Dla dowolnie ustalonego $x_0 \neq 0$ funkcja $\varphi(h)$ jest określona dla $0 < |h| < |x_0|$. Mamy

$$\varphi(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} \right),$$

czyli po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i redukcji w liczniku

$$\varphi(h) = \frac{-1}{(x_0 + h)x_0},$$

co po przejściu do granicy daje

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}.$$

Przykład 3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

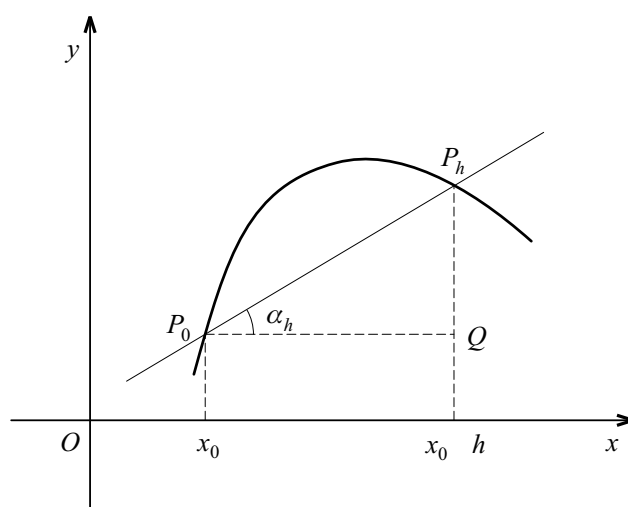
i niech $x_0 = 0$, wówczas

$$\varphi(h) = \sin \frac{1}{h}.$$

Wiemy (por. §2 Przykład 5 (i)), że nie istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}.$$

Wobec tego funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0 .



[rys. 20]

Przejdziemy teraz do interpretacji geometrycznej pochodnej. Poprowadźmy przez punkty $P_0 = (x_0, f(x_0))$ oraz $P_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ prostą (zwaną *sieczną wykresu* - rys. 20) i oznaczmy przez α_h kąt między dodatnią półosią x -ów a sieczną P_0P_h tzn. kąt, o jaki należy obrócić dodatnią półoś x -ów, aby przyjęła położenie równoległe do siecznej (przypominamy, że kąt α_h ma miarę dodatnią, gdy obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara oraz miarę ujemną, gdy obrót jest zgodny z ruchem wskazówek zegara - por. §1 punkt 9). Z trójkąta P_0QP_h (o przyprostokątnych P_0Q , QP_h równoległych do osi układu) widać, że

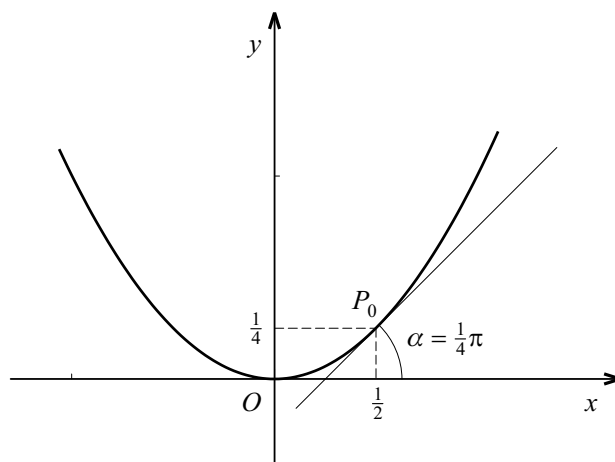
$$\varphi(h) = \operatorname{tg} \alpha_h.$$

Styczną do wykresu funkcji f w punkcie P_0 określimy jako graniczne położenie siecznej P_0P_h gdy $h \rightarrow 0$. Jeżeli przez α oznaczmy kąt między dodatnią półosią x -ów a styczną, to z (2) wynika, że

$$(3) \quad f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Przykład 4. W przykładzie 1 pokazaliśmy, że dla funkcji $f(x) = x^2$ i dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$f'(x_0) = 2x_0.$$



[rys. 21]

Poprowadźmy styczną do wykresu funkcji f (rys. 21) w punkcie $P_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Wówczas

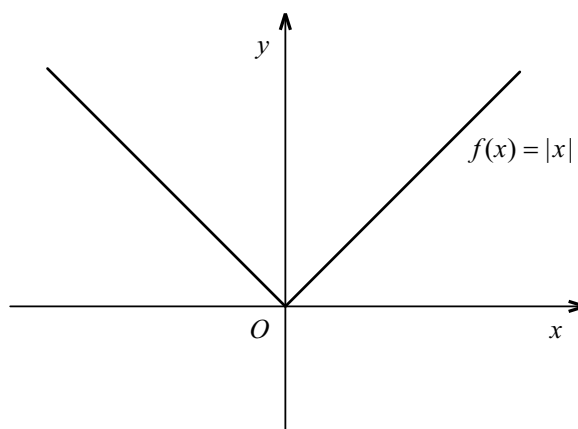
$$f'(\frac{1}{2}) = \operatorname{tg}\alpha = 1$$

zatem

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Przykład 5. Niech

$$f(x) = |x|,$$



[rys. 22]

wówczas

$$\varphi(h) = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{dla } h > 0, \\ -1 & \text{dla } h < 0. \end{cases}$$

Granica (2) nie istnieje, zatem funkcja f nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$. Z rysunku (rys. 22) widać, że w punkcie $(0, 0)$ nie istnieje styczna do wykresu funkcji. Łatwo natomiast okazać, że funkcja f ma pochodną w każdym punkcie $x_0 \neq 0$. Jeżeli $x_0 > 0$, to dla dostatecznie małych $|h|$ również $x_0 + h > 0$, zatem

$$\varphi(h) = \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = 1,$$

jeżeli zaś $x_0 < 0$, to dla dostatecznie małych $|h|$ również $x_0 + h < 0$, a więc

$$\varphi(h) = \frac{-(x_0 + h) + x_0}{h} = -1.$$

Przechodząc do granicy przy $h \rightarrow 0$ mamy wobec tego

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

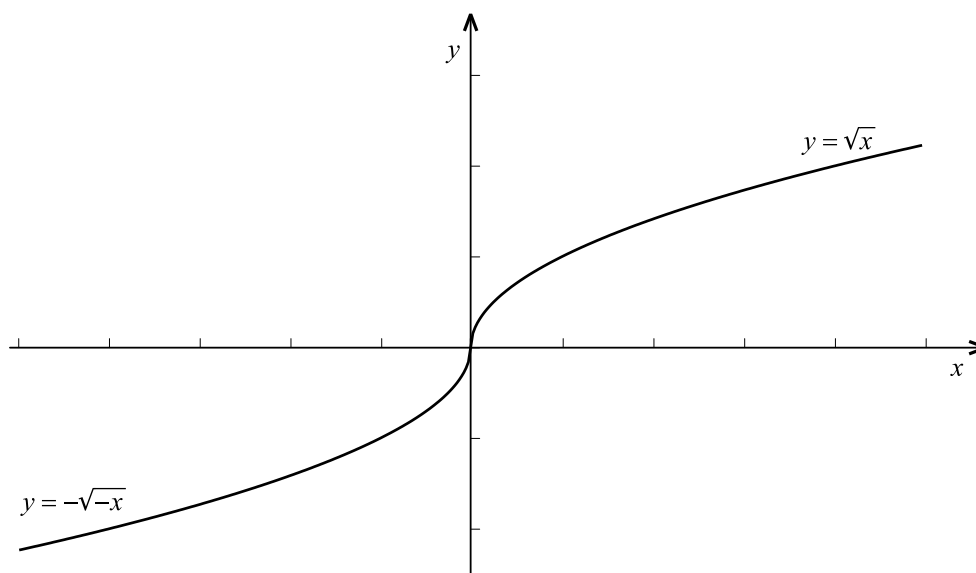
co można zapisać krócej

$$f'(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{dla } x \neq 0.$$

Zauważmy, że styczna do wykresu funkcji f w każdym punkcie $(x_0, |x_0|)$, gdzie $x_0 \neq 0$, pokrywa się z wykresem (rys. 22).

Przykład 6. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$



[rys. 23]

i niech $x_0 = 0$. Wówczas

$$\varphi(h) = \begin{cases} \frac{\sqrt{h}}{h} & \text{dla } h > 0, \\ \frac{\sqrt{-h}}{-h} & \text{dla } h < 0 \end{cases}$$

zatem

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{|h|}}$$

a stąd

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = f'(0) = \infty.$$

Funkcja f ma w punkcie $x_0 = 0$ pochodną nieskończoną. Wobec (3) mamy

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

a więc styczna do wykresu w punkcie $(0, 0)$ jest prostopadła do osi x -ów (rys. 23), czyli pokrywa się z osią y -ów.

Ze związku (3) wynika, że *równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0)* (gdzie $y_0 = f(x_0)$) ma postać

$$(4) \quad y = (x - x_0)f'(x_0) + y_0$$

przy założeniu, że istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$.

Oprócz granicy (2) możemy rozważać granice jednostronne funkcji $\varphi(h)$ przy $h \rightarrow 0$. Granicę lewostronną

$$\lim_{h \rightarrow x_0^-} \varphi(h) = f'_-(x_0)$$

nazywamy *pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0* , zaś granicę prawostronną

$$\lim_{h \rightarrow x_0^+} \varphi(h) = f'_+(x_0)$$

- *pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0* .

W przypadku funkcji

$$f(x) = |x|,$$

rozważanej w przykładzie 5, pochodna w punkcie $x_0 = 0$ nie istnieje, istnieją natomiast pochodne jednostronne

$$f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1.$$

Funkcja rozważana w przykładzie 3 nie ma w punkcie $x_0 = 0$ żadnej z pochodnych jednostronnych.

Z twierdzenia 10 §2 otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 1. *Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ pochodną*

$$f'(x_0) = g \in \mathbb{R}_\infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = g.$$

2. Różniczkowalność funkcji. Podobnie jak w poprzednim punkcie założymy, że funkcja f jest określona w otoczeniu ustalonego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że *funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0* , jeżeli istnieją stała A i funkcja $r(h)$ takie, że dla dostatecznie małych $|h|$

$$(5) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(h)$$

przy czym

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Z równości (5) wynika, że w przypadku funkcji różniczkowalnej przyrost jej wartości

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

może być zastąpiony przez funkcję liniową przyrostu zmiennej niezależnej

$$Ah$$

z błędem $r(h)$, który zgodnie z (6) dąży do zera szybciej niż przyrost h .

Twierdzenie 2. *Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$, przy tym*

$$A = f'(x_0).$$

DOWÓD. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to na mocy (5)

$$\varphi(h) = A + \frac{r(h)}{h}$$

skąd wobec (5)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = A.$$

Na odwrót, założmy że istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$ i niech

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah$$

gdzie

$$A = f'(x_0).$$

Wówczas

$$\frac{r(h)}{h} = \varphi(h) - A$$

a więc zgodnie z (2) funkcja $r(h)$ spełnia warunek (6). \square

Przykład 7. Niech

$$f(x) = x^2.$$

W przykładzie 1 pokazaliśmy, że

$$f'(x_0) = 2x_0$$

dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$. Na mocy twierdzenia 2 funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , przy czym $A = 2x_0$. Zgodnie z (5)

$$r(h) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 - 2hx_0 = h^2,$$

a więc spełniony jest warunek (6). \square

Przykład 8. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Zgodnie z przykładem 2

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

dla dowolnego $x_0 \neq 0$, zatem wobec twierdzenia 2 funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Z równości (5) wynika, że dla $|h| < |x_0|$

$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} + \frac{h}{x_0^2} = \\ &= \frac{h^2}{x_0^2(x_0 + h)}, \end{aligned}$$

a więc

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{h}{x_0^2(x_0 + h)} \rightarrow 0$$

przy $h \rightarrow 0$, co oznacza, że funkcja $r(h)$ spełnia (6). \square

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła.*

DOWÓD. Z warunku (6) wynika, że dla dostatecznie małych $|h|$

$$\left| \frac{r(h)}{h} \right| < 1,$$

czyli

$$|r(h)| < |h|.$$

Wobec tego

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$$

i z równości (5) dostajemy podstawiając $y = x_0 + h$

$$\lim_{y \rightarrow x_0} f(y) = f(x_0).$$

□

Założmy teraz, że funkcja f jest określona w przedziale otwartym \mathbb{I} (ograniczonym lub nie). Mówimy, że f jest różniczkowalna w przedziale \mathbb{I} , jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału. Zgodnie z twierdzeniem 2 oznacza to, że dla każdego $x_0 \in \mathbb{I}$ istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$.

3. Działania na funkcjach różniczkowalnych. Będziemy zakładali, że funkcje f, g są określone w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz c jest stałą, to funkcje*

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), cf(x), f(x)g(x)$$

są również różniczkowalne w punkcie x_0 , przy czym zachodzą wzory

$$(7) \quad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(8) \quad (f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0),$$

$$(9) \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0),$$

$$(10) \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

DOWÓD. Udowodnimy wzór (10). Mamy

$$\begin{aligned} (fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0) &= \\ &= f(x_0 + h)[g(x_0 + h) - g(x_0)] + g(x_0)[f(x_0 + h) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Wobec tego iloraz różnicowy dla funkcji fg ma postać

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} &= \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0) + f(x_0 + h) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $h \rightarrow 0$ i korzystając z ciągłości funkcji f w punkcie x_0 (twierdzenie 3) dostajemy (10).

Dowód wzorów (7) i (9) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Wzór (8) wynika z przedstawienia

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$$

po kolejnym zastosowaniu (7) i (9). □

Twierdzenie 5. *Jeżeli funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$, to*

$$(11) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

DOWÓD. Mamy

$$\frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)} \right] = \frac{1}{h} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)},$$

co po przejściu do granicy przy $h \rightarrow 0$ i wykorzystaniu ciągłości funkcji g w punkcie x_0 (twierdzenie 2) daje

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Stosując wzór (10) do iloczynu

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$$

dostajemy (11). □

Przejdźmy teraz do twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej (superpozycji).

Twierdzenie 6. *Zakładamy, że*

- (i) *funkcja f jest określona w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$,*
- (ii) *funkcja g jest określona w otoczeniu punktu $y_0 = f(x_0)$,*
- (iii) *f jest różniczkowalna w punkcie x_0 ,*
- (iv) *g jest różniczkowalna w punkcie y_0 .*

Wówczas funkcja

$$F(x) = g(f(x))$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 , przy tym

$$(12) \quad F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

DOWÓD. Oznaczając

$$f(x_0+h) - f(x_0) = k(h)$$

mamy wobec różniczkowalności funkcji f

$$(13) \quad k(h) = hf'(x_0) + r_1(h),$$

gdzie

$$(14) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{h} = 0.$$

Ponieważ f jest ciągła w punkcie x_0 na mocy twierdzenia 3, więc

$$(15) \quad \lim_{h \rightarrow 0} k(h) = 0.$$

Z założenia różniczkowalności funkcji g wynika, że

$$(16) \quad \begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \\ &= g(y_0 + k) - g(y_0) = kg'(y_0) + r_2(k), \end{aligned}$$

gdzie

$$(17) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_2(k)}{k} = 0.$$

Poraz różnicowy dla funkcji F można, po uwzględnieniu (13), (16) przedstawić w postaci

$$(18) \quad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = [f'(x_0) + \frac{r_1(h)}{h}]g'(y_0) + p(h),$$

gdzie

$$p(h) = \frac{r_2(k)}{h}.$$

Dla $k = 0$ mamy

$$p(h) = \frac{r_2(0)}{h} = 0$$

zaś w przypadku gdy $k \neq 0$

$$p(h) = \frac{r_2(k)}{k} \frac{k}{h} = \frac{r_2(k)}{k} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

co zgodnie z (15), (17) daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} p(h) = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Uwzględniając (14) dostajemy stąd tezę po przejściu do granicy w (18). □

Na zakończenie udowodnimy twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej.

Twierdzenie 7. *Niech f będzie funkcją ciągłą ściśle monotoniczną w otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalną w punkcie x_0 , przy czym*

$$f'(x_0) \neq 0.$$

Wówczas funkcja odwrotna g jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i zachodzi równość

$$(19) \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DOWÓD. Zauważmy przede wszystkim, że funkcja g jest określona w otoczeniu punktu y_0 i jest w tym punkcie ciągła zgodnie z twierdzeniem 15 §3. Dla dostatecznie małego $|k| \neq 0$ przyjmijmy

$$(20) \quad h = g(y_0 + k) - g(y_0).$$

Ponieważ g jest funkcją różnowartościową, mamy $h \neq 0$ i przy tym z (20) wynika, że

$$x_0 + h = g(y_0 + k),$$

a więc

$$f(x_0 + h) = y_0 + k = f(x_0) + k.$$

Zatem iloraz różnicowy dla funkcji g można przedstawić w postaci

$$(21) \quad \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)}.$$

Prawa strona (21) dąży przy $h \rightarrow 0$ do granicy $\frac{1}{f'(x_0)}$. Wobec tego oznaczając przez $G(k)$ lewą stronę (21) stwierdzamy, że do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\eta > 0$ tak, by dla $|h| < \eta$ zachodziła nierówność

$$(22) \quad \left| G(k) - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon.$$

Wobec ciągłości funkcji g w punkcie y_0 można z kolei do liczby η dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $|k| < \delta$ była spełniona nierówność

$$|h| = |g(y_0 + k) - g(y_0)| < \eta.$$

Wobec tego nierówność (22) jest spełniona dla $|k| < \delta$ a to oznacza, że

$$g'(y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} G(k) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

4. Inne oznaczenia pochodnej. Oprócz oznaczenia pochodnej funkcji $y = f(x)$ wprowadzonego w punkcie 1 używane są oznaczenia

$$(23) \quad \begin{aligned} f'(x) &= [f(x)]' = \frac{df(x)}{dx} = \\ &= \frac{d}{dx} f(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y. \end{aligned}$$

Pochodną w punkcie x_0 zapisujemy przy użyciu oznaczeń (23)

$$f'(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Dwa ostatnie oznaczenia (23) (pochodzące od G.W. Leibniza¹) czytamy: $df(x)$ po dx , dy po dx .

¹Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego, założyciel Akademii Nauk w Berlinie. Uczony o wszechstronnych zainteresowaniach i ogromnej erudycji.

W tak wprowadzonej symbolice wzory rachunkowe podane w twierdzeniach 4, 5 można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} (7') & \quad (y + z)' = y' + z', \\ (8') & \quad (y - z)' = y' - z', \\ (9') & \quad (cy)' = cy', \\ (10') & \quad (yz)' = y'z + yz', \\ (11') & \quad \left(\frac{y}{z}\right)' = \frac{y'z - yz'}{z^2} \end{aligned}$$

jeżeli przyjmiemy

$$y = f(x), \quad z = g(x).$$

W oznaczeniach Leibniza wzory te mają postać

$$\begin{aligned} (7'') & \quad \frac{d(y + z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}, \\ (8'') & \quad \frac{d(y - z)}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}, \\ (9'') & \quad \frac{d(cy)}{dx} = c \frac{dy}{dx}, \\ (10'') & \quad \frac{d(yz)}{dx} = \frac{dy}{dx}z + y \frac{dz}{dx}, \\ (11'') & \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{z}\right) = \frac{\frac{dy}{dx}z - y \frac{dz}{dx}}{z^2}. \end{aligned}$$

Zapiszemy jeszcze w oznaczeniach Leibniza wzór (12) na pochodną funkcji złożonej. Oznaczając

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

mamy

$$(12'') \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Wreszcie wzór (19) na pochodną funkcji odwrotnej przyjmuje w tych oznaczeniach postać

$$(19'') \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Zauważmy, że we wzorach (12''), (19'') symbol $\frac{dy}{dx}$ zachowuje się jak ułamek (co ułatwia ich zapamiętanie i sprawdzenie czy nie popełniliśmy błędu).

5. Pochodne funkcji elementarnych. Podamy teraz wzory rachunkowe pozwalające znaleźć pochodne funkcji omawianych poprzednio (zwanych umownie funkcjami elementarnymi). Czynność obliczania pochodnej danej funkcji nazywamy *różniczkowaniem*.

1⁰ Funkcja stała

$$f(x) = c, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Iloraz różnicowy

$$\varphi(h) = \frac{c - c}{h} = 0,$$

zatem w granicy przy $h \rightarrow 0$

$$(24) \quad \frac{dc}{dx} = 0.$$

□

2⁰ Funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym

$$f(x) = x^n, \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

Udowodnimy metodą indukcji, że

$$(25) \quad \frac{d x^n}{d x} = n x^{n-1}.$$

Dla $n = 1$ iloraz różnicowy ma postać

$$\varphi(h) = \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

zatem

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 1.$$

Zakładając słuszność wzoru (25) dla $n \in \mathbb{N}$ udowodnimy, że pozostaje on słuszny po zastąpieniu n przez $n + 1$. Stosując regułę różniczkowania iloczynu (12'') dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{d x^{n+1}}{d x} &= \frac{d (x \cdot x^n)}{d x} = \\ &= x^n + x(n x^{n-1}) = (n + 1)x^n \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

□

3⁰ Funkcje trygonometryczne

$$(26) \quad \frac{d \sin x}{d x} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{d x} = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dla dowodu rozważmy iloraz różnicowy funkcji $\sin x$

$$\varphi(h) = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2}).$$

Wykorzystując wzór (11) §2 oraz ciągłość funkcji $\cos x$ mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \cos x,$$

co daje pierwszy ze wzorów (26). Dla dowodu drugiego wzoru zapiszemy iloraz różnicowy funkcji $\cos x$ w postaci

$$\varphi(h) = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \sin(x + \frac{h}{2}).$$

Wykorzystując ponownie wzór (11) §2 oraz ciągłość funkcji $\sin x$ otrzymujemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = -\sin x,$$

czyli drugi ze wzorów (26). □

Stosując regułę różniczkowania ilorazu (11'') dostajemy w oparciu o wzory (26)

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{d}{d x} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{d x} = \frac{d}{d x} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

czyli

$$(27) \quad \frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{d x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4^o Funkcja logarytmiczna.

Zacznijmy od logarytmu naturalnego. Iloraz różnicowy ma postać

$$\varphi(h) = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}.$$

Korzystając ze wzoru (30) §2 oraz z ciągłości logarytmu dostajemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x},$$

co daje

$$(28) \quad \frac{d \log x}{d x} = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

W przypadku logarytmu o dowolnej podstawie $a > 1$ korzystamy ze wzoru (26) §3, skąd zgodnie z regułą (9'')

$$(29) \quad \frac{d \log_a x}{d x} = \frac{1}{x \log a} \quad (x > 0).$$

□

5⁰ Aby obliczyć pochodną funkcji wykładniczej zastosujemy regułę różniczkowania funkcji odwrotnej (19'') i wyniki punktu 4⁰. Przyjmując

$$y = e^x$$

mamy

$$x = \log y$$

i stąd

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\frac{d x}{d y}} = y,$$

czyli

$$(30) \quad \frac{d e^x}{d x} = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Wzór (30) wyraża ważną własność funkcji wykładniczej o podstawie e : jest ona identyczna ze swoją pochodną.

W przypadku funkcji wykładniczej o dowolnej podstawie $a > 1$ przyjmijmy

$$y = a^x,$$

wówczas

$$x = \log_a y$$

i stosując wzór (29) dostajemy

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\frac{d x}{d y}} = y \log a,$$

czyli

$$(31) \quad \frac{d a^x}{d x} = a^x \log a \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Uwaga. Można rozważać funkcję

$$g(x) = \log_a x$$

o podstawie $0 < a < 1$ jako odwrotną do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x$$

(por. zadania 6, 7 §3). Wzory (29), (31) pozostają słuszne i w tym przypadku, dowód przenosi się bez zmian. Wzór (31) jest prawdziwy również dla $a = 1$, bowiem funkcja wykładnicza jest w tym przypadku funkcją stałą, więc jej pochodna jest tożsamościowo równa zero (por. (24)), zaś $\log 1 = 0$.

6^o Aby znaleźć pochodną funkcji potęgowej o dowolnym wykładniku rzeczywistym skorzystamy z przedstawienia

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} \quad (x > 0).$$

Przyjmując

$$z = x^\alpha, \quad y = \alpha \log x$$

mamy

$$z = e^y,$$

skąd zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej (12'')

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = e^y \cdot \frac{\alpha}{x}$$

czyli po wykonaniu dzielenia

$$(32) \quad \frac{d x^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0).$$

Zauważmy, że otrzymany wzór (32) jest uogólnieniem wzoru (25) na przypadek dowolnych wykładników rzeczywistych.

7^o Na zakończenie znajdziemy pochodne funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych. Przyjmując

$$y = \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$$

mamy

$$x = \sin y,$$

a więc stosując regułę różniczkowania funkcji odwrotnej (19'') i pierwszy ze wzorów (26) otrzymujemy

$$(33) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \quad (\cos y \neq 0).$$

Ponieważ

$$(34) \quad \sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

oraz na mocy definicji funkcji $\arcsin x$ kąt y leży w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ze wzoru (34) dostajemy

$$(35) \quad \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ze wzorów (33), (35) wynika, że

$$(36) \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

W podobny sposób, przyjmując

$$y = \arccos x \quad (-1 < x < 1)$$

mamy

$$x = \cos y,$$

a więc stosując regułę (19'') i drugi ze wzorów (26)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}.$$

Ponieważ $y \in [0, \pi]$ na mocy definicji funkcji $\arccos x$, więc

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

co daje ostatecznie

$$(37) \quad \frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Pozostaje do obliczenia pochodna funkcji

$$y = \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mamy

$$x = \operatorname{tg} y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right),$$

zatem na mocy (19'') i (27)

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

czyli

$$(38) \quad \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Przykład 9. Obliczmy pochodną funkcji

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad (x > 0).$$

Wzór (32) dla $\alpha = 1/2$ daje

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Przykład 10. Pochodną funkcji

$$y = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}, x \neq 0)$$

możemy obliczyć dwoma sposobami:

a.) dla $x > 0$ można zastosować wzór (32) dla $\alpha = -n$, co daje

$$\frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}},$$

b.) dla $x \neq 0$ można zastosować wzór (11'') na pochodną ilorazu, przyjmując w nim $y = 1$, $z = x^n$. Dostajemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{d}{dx}(x^n)}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}},$$

czyli to samo, co w punkcie a.).

Przykład 11. Obliczymy pochodną wielomianu stopnia n

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Zastosowanie reguł (7'') i (9'') oraz wzorów (24), (25) daje

$$\frac{dy}{dx} = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Pochodna wielomianu stopnia n jest wielomianem stopnia $n-1$. W szczególności pochodna funkcji liniowej jest funkcją stałą (jaki to ma sens geometryczny?).

Przykład 12. Obliczmy pochodną funkcji

$$y = x^x \quad (x > 0).$$

Funkcja ta nie jest ani funkcją wykładniczą (bo ma zmienną podstawę potęgi), ani funkcją potęgową (bo wykładnik potęgi jest zmienny). Nie możemy więc stosować wzorów wyprowadzonych poprzednio dla pochodnych tych funkcji. Skorzystamy z przedstawienia

$$y = e^{x \log x}$$

i zastosujemy regułę różniczkowania funkcji złożonej, oznaczając

$$u = x \log x.$$

Zgodnie z regułą (12'') mamy

$$(39) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Ponieważ

$$y = e^u,$$

więc na podstawie (30)

$$\frac{dy}{du} = e^u.$$

Do obliczenia pochodnej $\frac{du}{dx}$ zastosujemy regułę różniczkowania iloczynu (10''), która daje

$$\frac{du}{dx} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

Wobec tego zgodnie z (39)

$$\frac{dy}{dx} = e^u(\log x + 1) = x^x (\log x + 1).$$

Przykład 13. Postępując podobnie jak w przykładzie 12 znajdziemy pochodną funkcji

$$(40) \quad y = (\sin x)^{\cos x} \quad (0 < x < \pi).$$

Mamy

$$y = e^{\cos x \log \sin x}$$

czyli po wprowadzeniu oznaczeń

$$u = \cos x, \quad w = \log \sin x$$

funkcja (40) może być zapisana w postaci

$$(41) \quad y = e^v,$$

gdzie

$$v = u w.$$

Zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej (12'')

$$(42) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx}$$

przy czym

$$(43) \quad \frac{dy}{dv} = e^v,$$

zaś

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{du}{dx} w + u \frac{dw}{dx} = \\ &= (-\sin x) \log \sin x + (\cos x) \frac{dw}{dx}. \end{aligned}$$

Pochodną $\frac{dw}{dx}$ obliczymy ponownie stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej. Oznaczając

$$t = \sin x$$

mamy

$$w = \log t,$$

zatem

$$(45) \quad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ostatecznie z (44), (45)

$$(46) \quad \frac{dv}{dx} = -(\sin x) \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

i na podstawie (42), (43) dostajemy

$$\frac{dy}{dx} = e^v \frac{dv}{dx}$$

czyli po uwzględnieniu (41), (46)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \frac{dv}{dx} = \\ &= (\sin x)^{(\cos x - 1)} (\cos^2 x) - (\sin x)^{(\cos x + 1)} (\log \sin x). \end{aligned}$$

Przykład 14. Obliczyć pochodną funkcji

$$y = \arctg \sqrt{x} \quad (x > 0).$$

Oznaczając

$$z = \sqrt{x}$$

mamy

$$y = \arctg z$$

i zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+z^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(por. (38) i przykład 9). Wracając do zmiennej x dostajemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

Przykład 15. Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \arcsin e^x.$$

Zbadamy najpierw dziedzinę funkcji f . Funkcja $y = \arcsin z$ jest określona dla $-1 \leq z \leq 1$, wobec tego winna być spełniona nierówność

$$-1 \leq e^x \leq 1.$$

Lewa część tej nierówności jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ (bo $e^x > 0$), natomiast część prawa narzuca ograniczenie

$$x \leq 0.$$

Ponieważ pochodną $f'(x_0)$ określiliśmy przy założeniu, że funkcja f jest określona w otoczeniu punktu x_0 , będziemy różniczkować zakładając $x < 0$. Oznaczając

$$y = f(x), \quad z = e^x$$

mamy

$$y = \arcsin z,$$

zatem zgodnie z (12''), (30), (36)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot e^x,$$

czyli po powrocie do zmiennej x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \quad (x < 0).$$

Przykład 16. Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \log(\log(\log x)),$$

Najpierw znajdziemy dziedzinę funkcji f . Oznaczmy

$$u = \log x, \quad v = \log u, \quad y = \log v.$$

Funkcja $y = f(x)$ jest określona dla $v > 0$, co narzuca warunek

$$\log u > 0,$$

czyli

$$u > 1.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona dla $x > e$. Stosując dwukrotnie regułę różniczkowania funkcji złożonej mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{du} \frac{du}{dx},$$

zatem zgodnie z (28)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{x}$$

i po powrocie do zmiennej x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(\log x)(\log(\log x))} \quad (x > e).$$

6. Ekstrema funkcji. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu U punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma *maksimum* w punkcie x_0 , jeżeli

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{dla } x \in U,$$

minimum w punkcie x_0 , jeżeli

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{dla } x \in U,$$

maksimum właściwe w punkcie x_0 , jeżeli

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{dla } x \in U, x \neq x_0,$$

minimum właściwe w punkcie x_0 , jeżeli

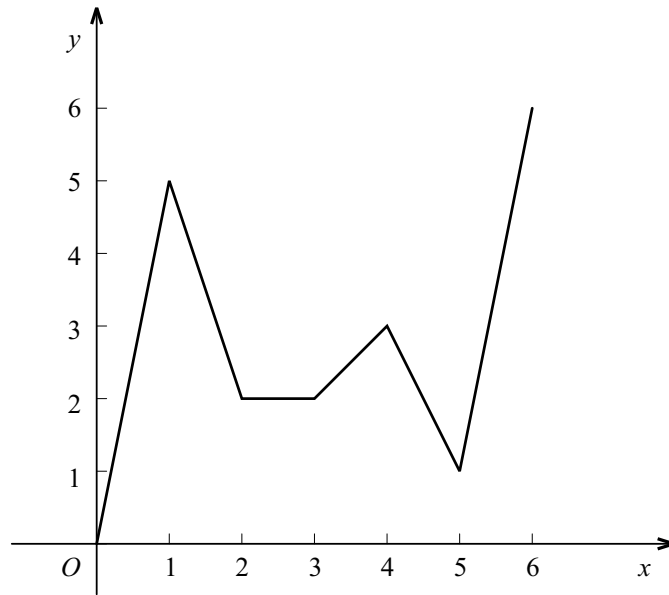
$$f(x) > f(x_0) \quad \text{dla } x \in U, x \neq x_0.$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *ekstremum (ekstremum właściwe)*, jeżeli ma w tym punkcie maksimum (maksimum właściwe) lub minimum (minimum właściwe). Punkt x_0 nazywamy *punktem ekstremalnym*, zaś wartość $f(x_0)$ *wartością ekstremalną* funkcji f .

Uwaga. Niektórzy autorzy używają terminu *maksimum (minimum, ekstremum) lokalne* dla podkreślenia, że chodzi tu o zachowanie się funkcji w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Dla największej (najmniejszej) wartości funkcji w całym przedziale, czyli jej kresu górnego (dolnego) używa się nazwy *maksimum (minimum) absolutne* lub *maksimum (minimum) globalne* - por. Uwaga §3 punkt 6.

Przykład 17. Niech

$$(47) \quad f(x) = \begin{cases} 5x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 8 - 3x & \text{dla } 1 < x \leq 2, \\ 2 & \text{dla } 2 < x \leq 3, \\ x - 1 & \text{dla } 3 < x \leq 4, \\ 11 - 2x & \text{dla } 4 < x \leq 5, \\ 5x - 24 & \text{dla } 5 < x \leq 6. \end{cases}$$



[rys. 24]

Wykres funkcji f podany jest na rys. 24.

Funkcja f ma maksimum właściwe w punktach $x = 1$, $x = 4$, minimum właściwe w punkcie $x = 5$, minimum w każdym punkcie $x \in [2, 3]$.

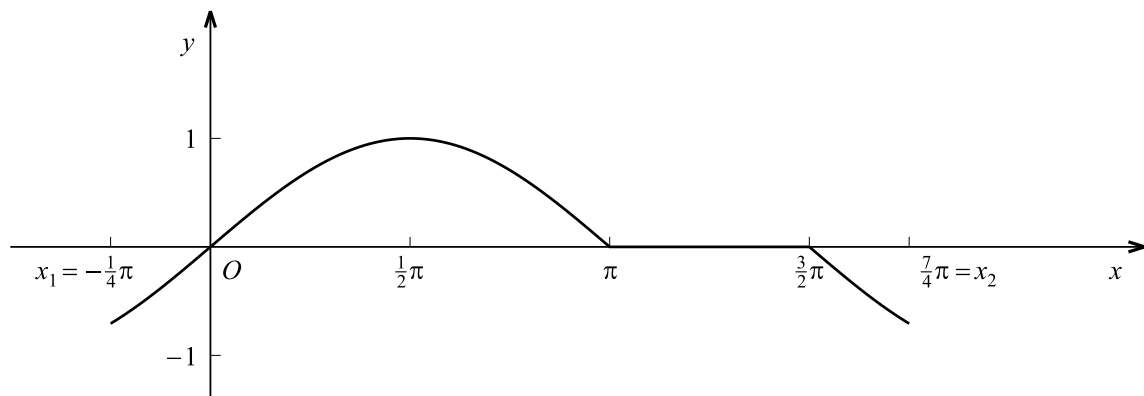
Zauważmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[0, 6]$ (proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie tego faktu w oparciu o wzory (47)), wobec tego zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) osiąga w tym przedziale swoje kresy dolny m i górny M . Jak widać z rysunku

$$m = 0 = f(0), \quad M = 6 = f(6).$$

Punkty $x = 0$ i $x = 6$ nie są jednak punktami ekstremalnymi, gdyż funkcja f nie jest określona w otoczeniu żadnego z nich.

Przykład 18. Niech (rys. 25)

$$(48) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{dla } \pi < x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ \sin(x - \frac{\pi}{2}) & \text{dla } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}. \end{cases}$$



[rys. 25]

Funkcja f ma maksimum właściwe w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$, minimum w każdym punkcie $x_0 \in [\pi, \frac{3}{2}\pi)$, maksimum w punkcie $x_0 = \frac{3}{2}\pi$.

Funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ (proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie dowodu), zatem na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) osiąga w tym przedziale swoje kresy dolny m i górny M . Mamy

$$m = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f(-\frac{\pi}{4}) = f(\frac{7\pi}{4}), \quad M = 1 = f(\frac{\pi}{2}).$$

Kres górny jest osiągany wewnątrz przedziału w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$, który jest jednocześnie punktem ekstremalnym. Natomiast kres dolny jest osiągany na końcach przedziału

$$x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$$

a więc w punktach, które nie mogą być punktami ekstremalnymi, gdyż funkcja f nie jest określona w otoczeniu żadnego z nich. Zauważmy, że gdybyśmy nawet rozważali funkcję f w większym przedziale przyjmując na przykład pierwszy wzór (48) dla $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, zaś ostatni wzór (48) dla $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$, to również wtedy punkty x_1, x_2 nie byłyby punktami ekstremalnymi, gdyż w otoczeniu x_1 funkcja f byłaby rosnąca, zaś w otoczeniu x_2 malejąca.

Z podanych przykładów widać, że należy odróżniać pojęcie kresu funkcji w przedziale od pojęcia ekstremum. Mówiąc o kresie (górnym lub dolnym) rozważamy funkcję w całym przedziale, natomiast wartość ekstremalna jest pojęciem lokalnym - jest to największa względnie najmniejsza wartość funkcji w pewnym dostatecznie małym otoczeniu punktu ekstremalnego. Możemy jedynie sformułować twierdzenie wynikające natychmiast z podanych definicji.

Twierdzenie 8. *Jeżeli funkcja osiąga swój kres (dolny lub górny) w punkcie wewnętrznym przedziału, to punkt ten jest punktem ekstremalnym.*

7. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego.

Twierdzenie 9 (Fermata). ² *Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu x_0 . Jeżeli f ma w punkcie x_0 ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to*

$$(49) \quad f'(x_0) = 0.$$

DOWÓD. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że f ma maksimum w punkcie x_0 . Wówczas dla dostatecznie małych $|h|$

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0),$$

²Pierre de Fermat (1601 - 1665), matematyk francuski (z wykształcenia był prawnikiem). Zajmował się teorią liczb i rachunkiem prawdopodobieństwa, jego idee przyczyniły się do powstania rachunku różniczkowego (stworzonego pół wieku później przez I. Newtona i G.W. Leibniza). Z jego nazwiskiem związane jest twierdzenie z teorii liczb (tzw. Wielkie Twierdzenie Fermata), udowodnione dopiero w 1995 r. przez A. Wilesa.

zatem iloraz różnicowy $\varphi(h)$ spełnia nierówności

$$(50) \quad \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{dla } h > 0, \\ \geq 0 & \text{dla } h < 0. \end{cases}$$

Z założenia istnieje pochodna

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h).$$

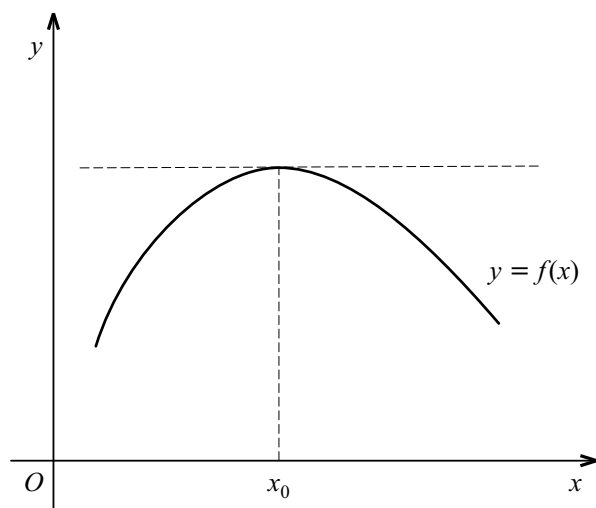
Z nierówności (50) wynika po przejściu do granicy

$$f'(x_0) \leq 0$$

i jednocześnie

$$f'(x_0) \geq 0$$

czyli (49). □



[rys. 26]

Twierdzenie 9 ma prosty sens geometryczny. Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum (na rys. 26 maksimum), to styczna do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi x -ów, a więc jej współczynnik kątowy jest równy zero - a to właśnie wyraża równość (49) (por. wzór (3)).

Punkt x_0 spełniający równanie (49) nazywamy *punktem stacjonarnym* funkcji f . Z twierdzenia 9 wynika, że każdy punkt ekstremalny jest punktem stacjonarnym, ale nie naodwrot, jak wskazuje następujący

Przykład 19. Niech

$$f(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mamy

$$f'(x) = 3x^2$$

a więc

$$f'(0) = 0.$$

Jednakże funkcja f nie ma ekstremum w punkcie $x = 0$, gdyż jest to funkcja ściśle rosnąca w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Widzimy więc, że warunek (49) jest warunkiem koniecznym ale nie dostatecznym dla istnienia ekstremum w punkcie x_0 .

Twierdzenie 10 (Rolle'a). ³ Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Jeżeli

$$(51) \quad f(a) = f(b),$$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = 0.$$

DOWÓD. Oznaczmy $f(a) = f(b) = A$. Jeżeli

$$f(x) = A$$

w całym przedziale $[a, b]$, to f jest funkcją stałą i jej pochodna znika w każdym punkcie przedziału (a, b) (por. 1^o punkt 5). Załóżmy wobec tego, że f nie jest funkcją stałą. Przynajmniej jeden z jej kresów, dolny m lub górny M , jest wobec tego różny od A . Niech dla ustalenia uwagi będzie $M \neq A$, wówczas $M > A$ z uwagi na (51). Na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) funkcja f przyjmuje wartość M w pewnym punkcie $c \in [a, b]$, wobec (51) nie może być jednak $c = a$ ani $c = b$. Wobec tego funkcja f przyjmuje swój kres górny w pewnym punkcie $c \in (a, b)$, który wobec twierdzenia 8 jest punktem ekstremalnym, a stąd z uwagi na twierdzenie 9 wynika teza.

Dowód w przypadku gdy $m \neq A$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Twierdzenie 11 (Lagrange'a). ⁴ Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(52) \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Zanim przejdziemy do dowodu podamy ilustrację geometryczną twierdzenia Lagrange'a.

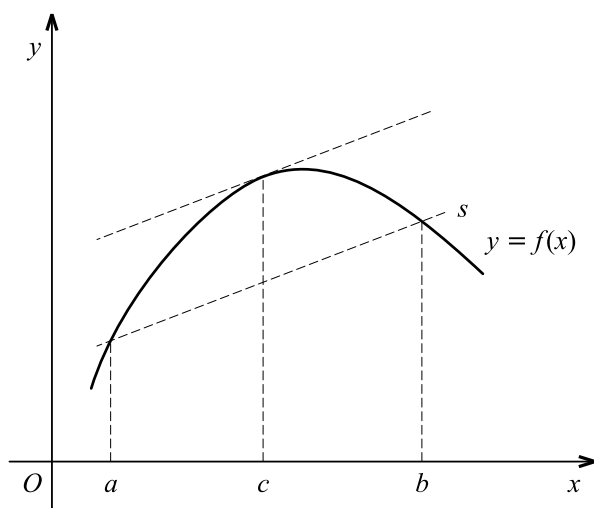
³Michel Rolle (1652 - 1719), urodzony w Amberg (Francja), od 1685 r. członek Paryskiej Akademii Nauk, zajmował się równaniami algebraicznymi. Brał udział w głośnym sporze między zwolennikami nowych metod (wprowadzonych przez G.W. Leibniza) a sympatykami matematyki dawnej (pochodzącej od Kartezjusza), do których zaliczał siebie.

⁴Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), urodzony w Turynie. Samodzielnie zdobył wykształcenie matematyczne i w 1755 r. został profesorem Królewskiej Szkoły Artylerii w Turynie a następnie w 1766 r. profesorem w Berlińskiej Akademii Nauk. Wykładał również w uczelniach paryskich École Normale i École Polytechnique. Zajmował się analizą matematyczną i mechaniką, jego główne dzieło "Mechanika analityczna" zostało opublikowane w 1788 r. Miał ważne wyniki w algebrze i teorii liczb, m.in. rozwinął teorię ułamków łańcuchowych.

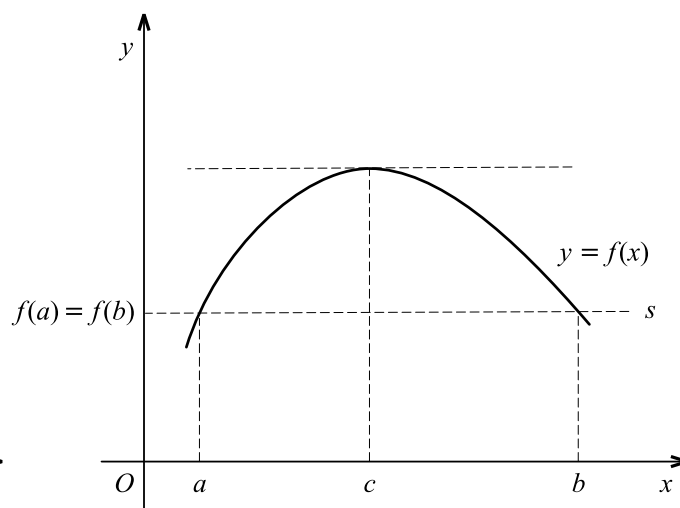
Równość (52) można przepisać inaczej w postaci

$$(53) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Lewa strona (53) jest współczynnikiem kątowym siecznej s wykresu funkcji przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$, zaś prawa strona jest współczynnikiem kątowym stycznej do wykresu w punkcie $(c, f(c))$ (por. punkt 1, w szczególności wzór (4)). Ze wzoru (53) wynika, że proste te są równoległe. Twierdzeniu Lagrange'a można więc nadać następujące sformułowanie geometryczne (por. rys. 27).



[rys. 27]



[rys. 28]

Twierdzenie 11'. . Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym i różniczkowalna w jego wnętrzu, to istnieje wewnątrz przedziału punkt w którym styczna jest równoległa do siecznej wykresu.

Zauważmy, że twierdzenie Rolle'a jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a. W sformułowaniu geometrycznym orzeka ono, że jeżeli sieczna s wykresu jest równoległa do osi x -ów, to istnieje wewnątrz przedziału punkt, w którym styczna jest również równoległa do osi x -ów (rys. 28).

Iloraz po lewej stronie wzoru (53) można uważać za średnią wartość przyrostu funkcji f w przedziale $[a, b]$. Twierdzenie Lagrange'a orzeka więc, że średnia wartość tego przyrostu jest równa wartości pochodnej funkcji w pewnym, odpowiednio dobranym, punkcie wewnętrznym przedziału. Z uwagi na tę interpretację twierdzenie Lagrange'a bywa również nazywane *twierdzeniem o wartości średniej rachunku różniczkowego*.

DOWÓD twierdzenia 11. Dla dowodu zauważmy, że równanie siecznej s (rys. 27) ma postać

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)$$

zaś funkcja

$$g(x) = f(x) - f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x)$$

wyraża odległość (mierzoną w kierunku osi y -ów) między prostą s a wykresem funkcji f . Funkcja g jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jako suma funkcji f i funkcji liniowej, oprócz tego (por. rys 27)

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Funkcja g spełnia więc założenia twierdzenia Rolle'a, zatem istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(54) \quad g'(c) = 0.$$

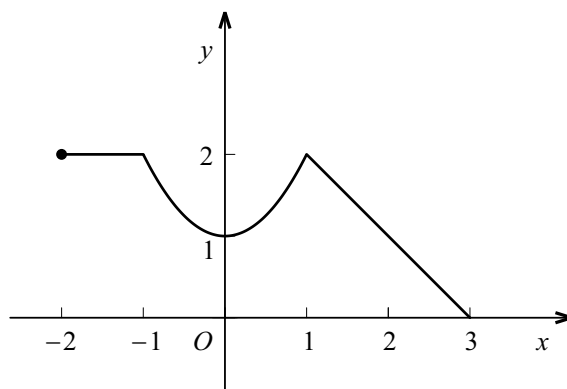
Mamy

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podstawiając $x = c$ i korzystając z (54) dostajemy (52). □

Przykład 20. Niech (rys. 29)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } -2 \leq x \leq -1, \\ 1 + x^2 & \text{dla } -1 < x \leq 1, \\ 3 - x & \text{dla } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$



[rys. 29]

Funkcja f ma maksimum w każdym punkcie x_1 spełniającym nierówność $-2 < x_1 \leq -1$, minimum właściwe w punkcie $x_2 = 0$, maksimum właściwe w punkcie $x_3 = 1$.

Ponadto

$$M = \sup_{[-2,3]} f = 2, \quad m = \inf_{[-2,3]} f = 0$$

przy czym

$$M = f(1) = f(x) \quad \text{dla} \quad -2 \leq x \leq -1, \\ m = f(3).$$

Oba kresy, dolny i górny, są przyjmowane przez funkcję f w przedziale $[-2, 3]$ zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) - proponujemy, by Czytelnik udowodnił, że założenia twierdzenia są spełnione tzn. że funkcja f jest ciągła w tym przedziale. Kres dolny jest przyjmowany tylko w prawym końcu przedziału, który nie jest punktem ekstremalnym. W otoczeniu punktu x_2 funkcja f jest wielomianem, jest więc w tym punkcie różniczkowalna, przy tym

$$f'(x) = 2x$$

dla $-1 < x < 1$, a więc

$$f'(x_2) = 0$$

zgodnie z twierdzeniem 9. W punktach $x_1 = -1$ oraz $x_3 = 1$ funkcja f nie ma pochodnej - na rysunku mamy w tych punktach załamanie wykresu. Istotnie, iloraz różnicowy w punkcie $x_1 = -1$ ma postać

$$\varphi(h) = \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -1 < h < 0, \\ h-2 & \text{dla} \quad 0 < h < 2. \end{cases}$$

Stąd

$$f'_-(-1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \varphi(h) = 0, \\ f'_+(-1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \varphi(h) = -2.$$

W punkcie $x_1 = -1$ funkcja f ma skończone pochodne jednostronne, są one jednak różne, zatem zgodnie z twierdzeniem 1 nie istnieje pochodna $f'(-1)$. Proponujemy, by Czytelnik w podobny sposób wykazał, że nie istnieje pochodna $f'(x_3)$.

Przykład 21. Niech

$$f(x) = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

funkcja f jest więc ciągła w przedziale $[0, \pi]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, przy tym $f(0) = f(\pi)$. Zgodnie z twierdzeniem Rolle'a istnieje punkt $c \in (0, \pi)$ taki, że $f'(c) = 0$. W naszym przykładzie

$$f'(x) = \cos x,$$

więc $c = \frac{\pi}{2}$.

Przykład 22. Niech

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wówczas

$$f'(x) = 2x$$

i dla dowolnie ustalonych a, b można równość (53) zapisać w postaci

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2c,$$

skąd po wykonaniu dzielenia

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Punkt c , o którym mowa w twierdzeniu Lagrange'a, jest w tym przypadku środkiem przedziału $[a, b]$, niezależnie od jego położenia na osi x -ów.

Przykład 23. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$, spełnia więc założenia twierdzenia Lagrange'a w każdym przedziale $[a, b]$ nie zawierającym zera. Mamy

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

zatem równość (53) przyjmuje postać

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2},$$

skąd

$$c = \sqrt{ab}.$$

Liczba c , o której mowa w twierdzeniu Lagrange'a, jest więc średnią geometryczną końców przedziału $[a, b]$.

Przykład 24. Niech

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0),$$

wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

zatem funkcja f spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a w każdym przedziale $[a, b]$ zawartym w dodatniej półosi x -ów. Równość (53) przyjmuje postać

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{1}{2\sqrt{c}},$$

skąd

$$c = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2.$$

Jak łatwo sprawdzić

$$a < c < b$$

zgodnie z twierdzeniem.

Wracając do twierdzenia Lagrange'a wprowadzimy we wzorze (52) oznaczenia

$$(55) \quad b - a = h, \quad c = a + \Theta h \quad (0 < \Theta < 1).$$

Wówczas twierdzenie Lagrange'a może być sformułowane następująco:

Twierdzenie 11”. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, a + h]$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Wówczas istnieje liczba $\Theta \in (0, 1)$ taka, że

$$(56) \quad f(a + h) - f(a) = hf'(a + \Theta h).$$

□

Przykład 25. W Przykładach 22 - 24 wyliczyliśmy liczbę c występującą we wzorze (52) jako funkcję końców przedziału $[a, b]$. Zestawimy te wyniki uzupełniając je wartością liczby Θ wprowadzonej we wzorze (56) (proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie rachunków):

$$\begin{aligned} f(x) = x^2, \quad c = \frac{a+b}{2}, \quad \Theta = \frac{1}{2}; \\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad c = \sqrt{ab}, \quad \Theta = \frac{1}{h}(\sqrt{a(a+h)} - a); \\ f(x) = \sqrt{x}, \quad c = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2, \quad \Theta = \frac{2\sqrt{a(a+h)} + h - 2a}{4h}. \end{aligned}$$

Jak widać, liczba Θ , wyznaczająca położenie punktu c w przedziale $[a, b]$, zależy na ogół od położenia tego przedziału na osi liczbowej. W podanych przykładach jedynie w przypadku paraboli $y = x^2$ funkcja $\Theta(a, h)$ jest stała, równa $\frac{1}{2}$.

Twierdzenie Lagrange’a można uogólnić następująco:

Twierdzenie 12 (Cauchy’ego). Załóżmy, że funkcje f, f_1 są ciągłe w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalne wewnątrz tego przedziału, przy czym $f_1'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$. Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(57) \quad \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(c)}{f_1'(c)}.$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że musi być

$$f_1(a) \neq f_1(b).$$

Gdyby bowiem zachodziła równość, to wobec twierdzenia Rolle’a istniałby punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f_1'(c) = 0$ - co przeczy założeniom naszego twierdzenia. Wobec tego lewa strona (57) jest poprawnie określona. Jak łatwo zauważyć, z twierdzenia Cauchy’ego otrzymujemy twierdzenie Lagrange’a przyjmując $f_1(x) = x$. Nasuwa to myśl, by w dowodzie wprowadzić funkcję

$$g_1(x) = f(x) - f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} (f_1(b) - f_1(x)),$$

która dla $f_1(x) = x$ przechodzi w funkcję g rozważaną w dowodzie twierdzenia Lagrange’a. Z założeń uczynionych o funkcjach f, f_1 wynika, że funkcja g_1 jest również ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Ponadto

$$g_1(a) = g_1(b) = 0.$$

Wobec tego funkcja g_1 spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, zatem na mocy tego twierdzenia istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(58) \quad g_1'(c) = 0.$$

Ponieważ

$$(59) \quad g_1'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} f_1'(x)$$

z równości (58), (59) dostajemy (57). □

Uwaga. Każda z funkcji f, f_1 występujących w twierdzeniu Cauchy'ego spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a. Stosując to ostatnie dostajemy

$$(60) \quad \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(c)}{f_1'(c_1)}$$

przy czym punkty $c, c_1 \in (a, b)$ są na ogół różne (por. Przykład 25 - położenie punktu c w ustalonym przedziale (a, b) zależy od postaci funkcji f). Wzór (57) udowodniony w twierdzeniu Cauchy'ego jest wzmocnieniem wzoru (60) - okazuje się, że w liczniku i mianowniku można obrać ten sam "pośredni" punkt c .

Podobnie jak twierdzenie Lagrange'a, twierdzenie Cauchy'ego można zapisać w nieco inny sposób po wprowadzeniu oznaczeń (55).

Twierdzenie 12'' (Cauchy'ego). *Przy założeniach twierdzenia 12 istnieje liczba $\Theta \in (0, 1)$ taka, że*

$$(61) \quad \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(a + \Theta h)}{f_1'(a + \Theta h)}.$$

□

8. Znak pochodnej a monotoniczność funkcji. Opierając się na twierdzeniu Lagrange'a (twierdzenie 11) możemy udowodnić

Twierdzenie 13. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nie). Wówczas*

- (i) $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b) \iff f$ jest funkcją stałą,
- (ii) $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b) \iff f$ jest funkcją rosnącą,
- (ii) $f'(x) \leq 0$ dla $x \in (a, b) \iff f$ jest funkcją malejącą.

DOWÓD. Załóżmy, że

$$a < x_1 < x_2 < b,$$

wówczas na mocy twierdzenia Lagrange'a istnieje punkt $x_3 \in (x_1, x_2)$ taki, że

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x_3).$$

Wobec tego

$$f(x_2) - f(x_1) \begin{cases} = 0 & \text{gdy } f'(x) = 0 \text{ dla } x \in (a, b), \\ \geq 0 & \text{gdy } f'(x) \geq 0 \text{ dla } x \in (a, b), \\ \leq 0 & \text{gdy } f'(x) \leq 0 \text{ dla } x \in (a, b) \end{cases}$$

i stąd wynika dostateczność każdego z warunków dla pochodnej podanych w punktach (i) - (iii). Dla dowodu ich konieczności napiszmy iloraz różnicowy funkcji f w dowolnie ustalonym punkcie $x_0 \in (a, b)$:

$$\varphi(h) = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Mamy dla dostatecznie małych $|h|$

$$\varphi(h) \begin{cases} = 0 & \text{gdy } f \text{ jest funkcją stałą,} \\ \geq 0 & \text{gdy } f \text{ jest funkcją rosnącą,} \\ \leq 0 & \text{gdy } f \text{ jest funkcją malejącą} \end{cases}$$

a stąd po przejściu do granicy przy $h \rightarrow 0$ dostajemy odpowiedni warunek dla pochodnej $f'(x_0)$. \square

W podobny sposób można udowodnić opierając się na twierdzeniu Lagrange'a

Twierdzenie 14. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nie). Wówczas

- (i) jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest ściśle rosnąca w (a, b) ,
- (ii) jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest ściśle malejąca w (a, b) .

Twierdzenie 15. Niech \mathbb{P} będzie jednym z przedziałów $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ i niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale \mathbb{P} i różniczkowalną w jego wnętrzu \mathbb{P}_0 . Wówczas

- (i) jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{P}_0$, to f jest ściśle rosnąca w \mathbb{P} ,
- (ii) jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in \mathbb{P}_0$, to f jest ściśle malejąca w \mathbb{P} .

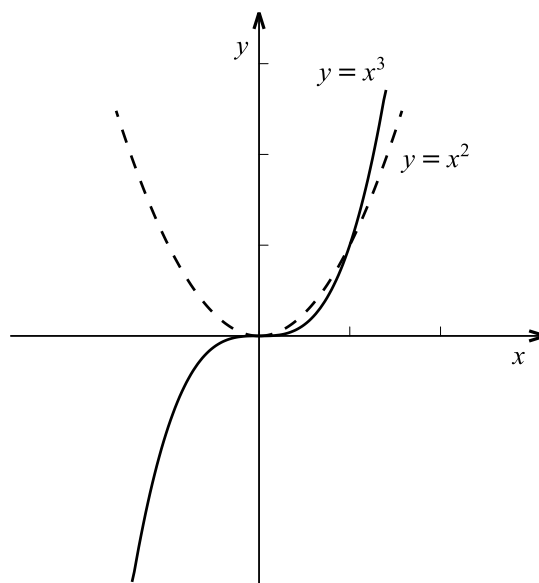
Dowody twierdzeń 14, 15 pozostawiamy Czytelnikowi. \square

Przykład 26. Niech

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wówczas

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2.$$



[rys. 30]

Mamy

$$g'(x) > 0 \quad \text{dla } x \neq 0$$

a więc zgodnie z twierdzeniem 15 funkcja g jest ściśle rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$; natomiast

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } x > 0, \\ < 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

skąd wynika, że f jest ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, 0]$ i ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$ (por. rys. 30). Zauważmy, że funkcja g jest ściśle rosnąca również w całym przedziale $(-\infty, \infty)$ natomiast jej pochodna $g'(x) = 3x^2$ znika dla $x = 0$. Widać stąd, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia 14 (i) nie jest prawdziwe. Proponujemy, by Czytelnik pokazał na przykładzie, że również nie jest prawdziwe twierdzenie odwrotne do twierdzenia 14 (ii).

Przykład 27. Niech

$$f(x) = a^x \quad (a > 0; x \in \mathbb{R}),$$

zatem zgodnie ze wzorem (31)

$$f'(x) = a^x \log a.$$

Z omawianych w §1 własności potęgi i logarytmu wynika, że

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad \text{gdy } a > 1, \\ < 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad \text{gdy } 0 < a < 1. \end{cases}$$

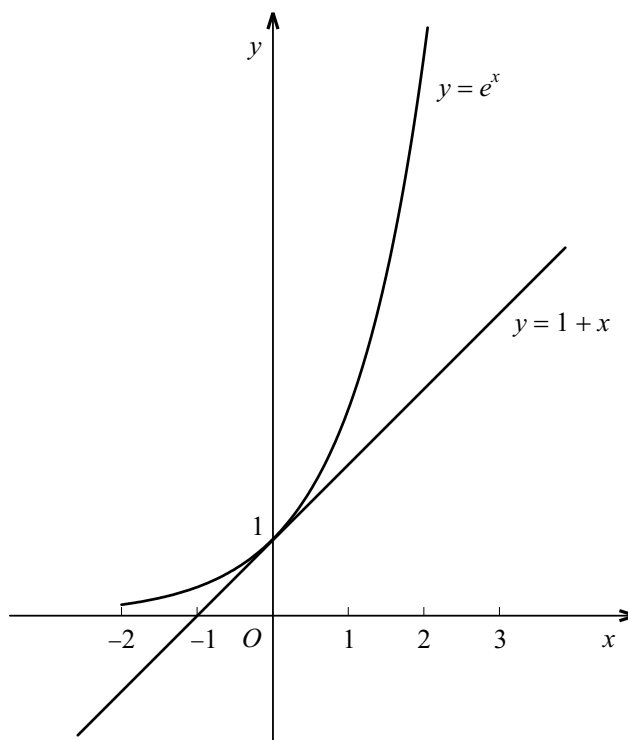
Zgodnie z twierdzeniem 14 funkcja f jest

- (1) ściśle rosnąca w przedziale $(-\infty, \infty)$ gdy $a > 1$,
- (2) ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, \infty)$ gdy $0 < a < 1$,

- co było wykazane wcześniej przy omawianiu własności potęgi o wykładniku rzeczywistym (por. twierdzenie 3 §1).

Przykład 28. Okażemy, że zachodzi nierówność

$$e^x \geq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R}),$$



[rys. 31]

przy czym znak równości zachodzi tylko dla $x = 0$ (por rys. 31). Dla dowodu rozważmy funkcję

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

Ponieważ

$$g'(x) = e^x - 1$$

oraz

$$g'(0) = e^0 - 1 = 0,$$

więc z własności funkcji wykładniczej e^x (por. Przykład 27) wynika, że

$$g'(x) > 0 \quad \text{dla } x > 0,$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{dla } x < 0.$$

Zgodnie z twierdzeniem 15 funkcja g jest ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, 0]$ oraz ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$ zatem dla wszystkich $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$g(x) > g(0) = 0,$$

co kończy dowód. □

Przykład 29. Udowodnimy nierówność

$$(63) \quad \frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \quad (x > -1).$$

Dla dowodu zauważmy najpierw, że funkcja

$$y = \log z \quad (z > 0)$$

jest ściśle rosnąca w przedziale $(0, \infty)$ (por. §3 punkt 9), możemy zatem dla $x > -1$ zlogarytmować nierówność (62) otrzymując

$$(64) \quad x \geq \log(1+x)$$

czyli prawą część (63). Dla dowodu lewej części przyjmijmy

$$(65) \quad x = -\frac{t}{1+t}$$

wówczas

$$1+x = \frac{1}{1+t}$$

i nierówność

$$1+x > 0$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$1+t > 0.$$

Podstawiając (65) do (64) dostajemy lewą część nierówności (63) z zastąpieniem x przez t . □

Nierówność (63) możemy również udowodnić w inny sposób, badając pochodną. Oznaczając

$$f(x) = x - \log(1+x), \quad g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

mamy dla $x > -1$

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}, \quad g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Obie pochodne są ujemne dla $-1 < x < 0$ i dodatnie dla $x > 0$, zatem zgodnie z twierdzeniem 15 obie funkcje f, g są

ściśle malejące w przedziale $(-1, 0]$

oraz

ściśle rosnące w przedziale $[0, \infty)$.

Wynikają stąd nierówności

$$f(x) > f(0) = 0, \quad g(x) > g(0) = 0$$

dla $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, które dają (63). □

9. Nieoznaczoności i reguły de l'Hospitala.

Twierdzenie 16. *Załóżmy, że*

- (i) *funkcje f, g są ciągłe w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$ i różniczkowalne w jego sąsiedztwie,*
- (ii) *$g'(x) \neq 0$ w sąsiedztwie punktu a ,*
- (iii) *$f(a) = g(a) = 0$.*

Wówczas

$$(66) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile istnieje granica (skończona lub niewłaściwa) po prawej stronie wzoru (66).

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że stosując twierdzenie Lagrange'a dostajemy

$$g(x) = g(x) - g(a) = (x - a)g'(\bar{x})$$

gdzie \bar{x} jest punktem leżącym między punktami x, a . Wobec tego $g(x) \neq 0$ w rozważanym sąsiedztwie punktu a z uwagi na założenie (ii), zatem ułamek po lewej stronie (66) jest dobrze określony. Stosując wzór Cauchy'ego (57) mamy

$$(67) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})},$$

gdzie \bar{x} jest punktem leżącym między a, x . Rozważymy najpierw przypadek, gdy granica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

jest skończona. Wówczas do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, że dla

$$(68) \quad 0 < |x - a| < \delta$$

zachodzi nierówność ε -owa

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \varepsilon.$$

Nierówność ta zachodzi w szczególności dla $x = \bar{x}$, więc z uwagi na (67) mamy

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon$$

dla x spełniających (68) co kończy dowód dla $K \in \mathbb{R}$. Dla $K = \infty$ rozumiemy podobnie. Do dowolnie obranej liczby M można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x spełniających (68) zachodziła nierówność

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > M.$$

Ostatnia nierówność zachodzi w szczególności po zastąpieniu x przez \bar{x} , skąd wobec (67) mamy

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M$$

dla x spełniających (68). Zatem równość (66) zachodzi również dla $K = \infty$. Dowód dla $K = -\infty$ przebiega zupełnie podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Uwaga. Twierdzenie 16 pozostaje prawdziwe, jeżeli w założeniach (i), (ii) zastąpimy otoczenie i sąsiedztwo punktu a przez otoczenie względnie sąsiedztwo prawostronne (lewostronne). Granicę we wzorze (66) należy wówczas zastąpić przez granicę prawostronną (lewostronną). Dowód przebiega podobnie i proponujemy, by Czytelnik przeprowadził go samodzielnie.

Wzór (66) przenosi się łatwo na przypadek granicy w nieskończoności, zachodzi bowiem

Twierdzenie 17. *Załóżmy, że*

- (i) *funkcje f, g są różniczkowalne dla $x > A > 0$,*
- (ii) *$g'(x) \neq 0$ dla $x > A$,*
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Wówczas

$$(69) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile istnieje granica po prawej stronie (właściwa lub niewłaściwa).

DOWÓD. Dla dowodu wprowadzimy nowe funkcje

$$(70) \quad F(t) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{t}\right) & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

oraz

$$(71) \quad G(t) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{t}\right) & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$

Funkcje F, G są na mocy twierdzenia 6 różniczkowalne (a więc i ciągłe) dla $0 < t < \frac{1}{A}$, przy czym

$$(72) \quad F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right), \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right) \neq 0.$$

Ponadto

$$\lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

i podobnie

$$\lim_{t \rightarrow 0+} G(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

a więc obie funkcje F , G są ciągłe prawostronnie dla $x = 0$. Do funkcji F , G możemy zatem zastosować wzór (66) (z zastąpieniem granicy przez granicę prawostronną), co daje

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)},$$

czyli z uwagi na (70), (71), (72)

$$(73) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}.$$

Ponieważ dla dowolnej funkcji $P(x)$ określonej dla dostatecznie dużych x

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x),$$

z równości (73) dostajemy tezę twierdzenia. \square

Proponujemy, by Czytelnik samodzielnie sformułował i udowodnił odpowiednik twierdzenia 17 przy założeniu, że $x \rightarrow -\infty$.

Przykład 30. Obliczmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin c(x - a)}{x - a},$$

gdzie stałe a , c są dowolnie obrane. Funkcje

$$f(x) = \sin(c(x - a)), \quad g(x) = x - a$$

spełniają założenia twierdzenia 16, możemy więc zastosować wzór (66), który daje

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin c(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} c \cos c(x - a) = c.$$

Uwaga. Do obliczenia granicy po lewej stronie wzoru (66) nie możemy zastosować twierdzenia o granicy ilorazu, gdyż granica mianownika jest zerem. Mówimy, że wyrażenie

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

występujące w twierdzeniu 16 i twierdzeniu 17 jest *nieoznaczonością typu $\frac{0}{0}$* przy $x \rightarrow a$ ($a \in \mathbb{R}_\infty$). Nazwę "nieoznaczoność" usprawiedliwia następujący fakt: Do dowolnie obranej liczby $c \in \mathbb{R}$ można dobrać funkcje f, g spełniające założenia twierdzenia 16 tak, by

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

- wystarczy określić je tak, jak w Przykładzie 30.

Przejdźmy teraz do *nieoznaczoności typu $\frac{\infty}{\infty}$* .

Twierdzenie 18. *Założmy, że*

- (i) *funkcje f, g są różniczkowalne oraz $g'(x) \neq 0$ w prawostronnym sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$,*
 (ii) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$.

Wówczas

$$(74) \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile granica po prawej stronie istnieje (właściwa lub niewłaściwa).

DOWÓD. Oznaczając przez K granicę po prawej stronie wzoru (74) założmy najpierw, że jest ona skończona. Z definicji prawostronnej granicy funkcji wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by nierówność ε -owa

$$(75) \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

zachodziła w prawostronnym sąsiedztwie deltowym S_δ^+ punktu a . Niech teraz $x_0 \in S_\delta^+$ będzie ustalonym punktem. Z założenia (ii) wynika, że nierówności

$$\begin{aligned} f(x) > 0, \quad f(x) > f(x_0), \\ g(x) > 0, \quad g(x) > g(x_0) \end{aligned}$$

zachodzą dla

$$(76) \quad 0 < x - a < \eta < \delta$$

Wobec tego w wyrażeniach

$$A(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

oraz

$$B(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mianowniki są różne od zera dla x spełniających (76), przy czym wyrażenia te są dodatnie. Stosując wzór Cauchy'ego (57) mamy

$$(77) \quad A(x) = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})},$$

gdzie \bar{x} jest punktem leżącym między x, x_0 a więc należącym do prawostronnego sąsiedztwa S_δ^+ . Z uwagi na (75), (77) mamy

$$(78) \quad K - \frac{\varepsilon}{2} < A(x) < K + \frac{\varepsilon}{2}$$

dla x spełniających (76). Z drugiej strony

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1 - \alpha(x)}{1 - \beta(x)},$$

gdzie

$$\alpha(x) = \frac{g(x_0)}{g(x)}, \quad \beta(x) = \frac{f(x_0)}{f(x)}.$$

Z założenia (ii) wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \beta(x) = 0,$$

zatem

$$(79) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{B(x)}{A(x)} = 1.$$

Przyjmując

$$(80) \quad \frac{B(x)}{A(x)} = 1 + \gamma(x)$$

mamy wobec (79)

$$(81) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \gamma(x) = 0.$$

Pomnóżmy teraz obie strony (78) przez dodatnie wyrażenie $\frac{B(x)}{A(x)}$. Wobec (80) dostajemy

$$(82) \quad K - \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_1(x) < B(x) < K + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_2(x),$$

gdzie

$$\gamma_1(x) = \gamma(x)\left(K - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \gamma_2(x) = \gamma(x)\left(K + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Z uwagi na (81) mamy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \gamma_1(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \gamma_2(x) = 0,$$

a więc można dobrać tak liczbę δ_1 , aby dla

$$0 < x - a < \delta_1$$

zachodziły nierówności

$$(83) \quad \gamma_1(x) > -\frac{\varepsilon}{2}, \quad \gamma_2(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ostatecznie dla

$$0 < x - a < \sigma = \min(\delta_1, \eta)$$

dostajemy wobec (82), (83)

$$K - \varepsilon < B(x) < K + \varepsilon,$$

przy czym liczba σ jest dobrana do liczby ε . Oznacza to, że

$$\lim_{x \rightarrow a^+} B(x) = K.$$

W przypadku gdy $K = \infty$, w pewnym prawostronnym sąsiedztwie S^+ punktu a wyrażenie $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ jest dodatnie, a więc $f'(x) \neq 0$. Możemy wobec tego dla $x \in S^+$ i spełniających nierówność (76) rozważać odwrotności ułamków występujących we wzorze (74). Mamy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0,$$

a więc na mocy udowodnionej już części twierdzenia również

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

skąd

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty = K$$

czyli wzór (74). Dowód dla $K = -\infty$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. \square

Twierdzenie 18 pozostaje prawdziwe po zastąpieniu granicy prawostronnej przez granicę lewostronną. Dowód przenosi się bez istotnych zmian, proponujemy, by Czytelnik przeprowadził go samodzielnie jako ćwiczenie.

Odpowiednikiem twierdzenia 17 jest

Twierdzenie 19. *Załóżmy, że*

- (i) *funkcje f, g są różniczkowalne dla $x > A$ (gdzie $A > 0$) jest odpowiednio dobraną liczbą),*
- (ii) *$g'(x) \neq 0$ dla $x > A$,*
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

Wówczas

$$(84) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub niewłaściwa).

DOWÓD przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 17. Przez podstawienie

$$x = \frac{1}{t}$$

sprowadzamy dowodzone twierdzenie do twierdzenia 18 przy $a = 0$. Szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. Proponujemy również, by Czytelnik samodzielnie sformułował i udowodnił odpowiednik twierdzenia 19 przy $x \rightarrow -\infty$. \square

Przykład 31. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Funkcje $f(x) = \log x$ oraz $g(x) = x^\alpha$ spełniają założenia twierdzenia 19, zatem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

(por. zad 9 §3).

Wzory (66), (69), (74), (84) podane w tezach twierdzeń 16 - 19 noszą nazwę *reguł de l'Hospitala*⁵ (dla nieoznaczoności typu $\frac{0}{0}$ względnie $\frac{\infty}{\infty}$).

Przykład 32. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^2} \quad (a > 1).$$

Funkcje $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = x^2$ spełniają założenia twierdzenia 19, zatem stosując wzór (84) dostajemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \log a}{2x}.$$

Ponieważ wyrażenie po prawej stronie jest również nieoznaczonością typu $\frac{\infty}{\infty}$, zastosujemy ponownie wzór (84), skąd

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \log a}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\log a)^2}{2} = \infty.$$

Przykład 33. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^k} \quad (a > 1, k \in \mathbb{N}).$$

Postępujemy podobnie, jak w Przykładzie 32, stosując k razy wzór (84). Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \log a}{kx^{k-1}} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\log a)^k}{k!} = \infty. \end{aligned}$$

⁵Guillaume Francois Antoine de L'Hospital (ok. 1661 - 1704), matematyk francuski, zajmował się rachunkiem różniczkowym przy współudziale braci Jakuba i Jana Bernoullich. Autor pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego (wydanego w 1696 r.), przeznaczonego dla szerszego kręgu matematyków i "Traktatu o przekrojach stożkowych" (wydanego pośmiertnie w 1720 r.). W 1693 r. wybrany na członka Paryskiej Akademii Nauk.

(por. zadanie 15 §2).

Przykład 34. Obliczmy

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \quad (a > 1, \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}).$$

Podobnie, jak w przykładzie 33 zastosujemy p razy wzór (84), gdzie $p = [\alpha]$. Mamy

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \log a} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1)x^{\alpha-p}}{a^x (\log a)^p}. \end{aligned}$$

Ponieważ z założenia

$$p < \alpha < p+1,$$

ostatnie wyrażenie jest jeszcze ciągle nieoznaczonością typu $\frac{\infty}{\infty}$. Ponowne zastosowanie wzoru (84) daje

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1)(\alpha-p)x^{\alpha-p-1}}{a^x (\log a)^{p+1}} = 0.$$

Uwaga. Z przykładu 33 wynika, że $C = 0$ również dla $\alpha = k \in \mathbb{N}$.

Przykład 35. Obliczmy granice

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Oba wyrażenia są nieoznaczonościami typu $\frac{0}{0}$. Stosując twierdzenie 16 otrzymujemy

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \\ B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Przykład 36. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} w(x)$$

gdzie

$$w(x) = x^\alpha \log(x^\beta) \quad (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0).$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \log(x^\beta) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \beta \log x = \begin{cases} -\infty & \text{dla } \beta > 0, \\ \infty & \text{dla } \beta < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

nie możemy stosować twierdzenia o granicy iloczynu. Mówimy, że wyrażenie $w(x)$ jest nieoznaczonością typu $0 \cdot \infty$ (w zapisie tym nie uwzględniamy znaku!). Przedstawiając funkcję $w(x)$ w postaci

$$w(x) = \frac{\log(x^\beta)}{x^{-\alpha}} = \frac{\beta \log x}{x^{-\alpha}}$$

otrzymujemy wyrażenie typu $\frac{\infty}{\infty}$ przy $x \rightarrow 0+$. Ze wzoru (74) dostajemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} w(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\beta x^{-1}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = \\ &= -\frac{\beta}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha, \end{aligned}$$

czyli

$$(85) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} w(x) = 0.$$

Przyjmując w szczególności $\alpha = \beta = 1$ mamy

$$(86) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x \log x = 0.$$

Zauważmy, że równość (85) jest prawdziwa również dla $\beta = 0$, gdyż wówczas

$$\log(x^0) = \log 1 = 0.$$

Przykład 37. Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 1} v(x),$$

gdzie

$$v(x) = \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

a więc do żadnej z granic jednostronnych nie możemy stosować twierdzenia o różnicy granic. Mówimy, że wyrażenie $v(x)$ jest nieoznaczonością typu $\infty - \infty$ przy $x \rightarrow 1$. Przekształcając $v(x)$ dostajemy

$$(87) \quad v(x) = \frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x},$$

czyli nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$. Zbadamy, czy są spełnione założenia twierdzenia 16. Funkcje

$$f(x) = x - 1 - \log x, \quad g(x) = (x - 1) \log x$$

są ciągle i różniczkowalne dla $x > 0$, założenie (i) jest więc spełnione. Aby sprawdzić, czy zachodzi (ii) oznaczmy

$$h(x) = g'(x) = \log x + 1 - \frac{1}{x}.$$

Mamy

$$(88) \quad h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \text{dla } x > 0,$$

zatem (por. twierdzenie 14) funkcja h jest ściśle rosnąca w przedziale $(0, \infty)$. Ponieważ $h(1) = 0$, więc funkcja $h = g'$ jest różna od zera w sąsiedztwie punktu $x = 1$, a więc spełniony jest warunek (ii). Warunek (iii)

$$f(1) = g(1) = 0$$

też jest spełniony, możemy więc zastosować do wyrażenia (87) wzór (66), co daje

$$\lim_{x \rightarrow 1} v(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\log x + 1 - \frac{1}{x}}.$$

Po prawej stronie mamy w dalszym ciągu nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$. Założenia twierdzenia 16 są spełnione (w szczególności warunek (ii) dla mianownika, który oznaczyliśmy przez $h(x)$, wynika z (88)). Stosując ponownie wzór (66) dostajemy

$$\lim_{x \rightarrow 1} v(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

10. Symbole Landaua. Niech f, g będą funkcjami określonymi w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$. Zapisujemy

(i) $f(x) = o(g(x))$ przy $x \rightarrow a$, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

(ii) $f(x) = O(g(x))$ przy $x \rightarrow a$, jeżeli iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest funkcją ograniczoną w sąsiedztwie a .

Z Przykładów 31, 33, 34 wynika, że

- (1) $\log x = o(x^\alpha)$ dla $\alpha > 0$ przy $x \rightarrow \infty$,
- (2) $x^\alpha = o(a^x)$ dla $a > 1$, $\alpha > 0$ przy $x \rightarrow \infty$,

zaś z przykładu 35 otrzymujemy jako wniosek

$$\begin{aligned} e^x - 1 &= O(x) \quad \text{przy } x \rightarrow 0, \\ 1 - \cos x &= O(x^2) \quad \text{przy } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Przy założeniu ciągłości funkcji f , g w sąsiedztwie a warunek (i) pociąga za sobą (ii), ale nie na odwrot. Symbole o , O noszą nazwę *symboli Landau'a*.⁶

Wróćmy teraz do definicji funkcji różniczkowalnej (punkt 2). Niech $y = f(x)$ będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalną w tym punkcie. Zgodnie z twierdzeniem 2 oznacza to, że istnieje skończona pochodna $f'(x_0)$ i przy tym dla dostatecznie małych $|h|$

$$(5') \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + r(h)$$

gdzie

$$(6') \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Przy ustalonym x_0 funkcję liniową zmiennej h określoną wzorem

$$(df)(x_0; h) = hf'(x_0)$$

nazywamy *różniczką funkcji f w punkcie x_0* . Oznaczając przyrost funkcji f

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (\Delta f)(x_0; h)$$

mamy wobec (5'), (6')

$$(\Delta f)(x_0; h) = (df)(x_0; h) + o(h)$$

lub w krótszym zapisie

$$\Delta y = dy + o(h)$$

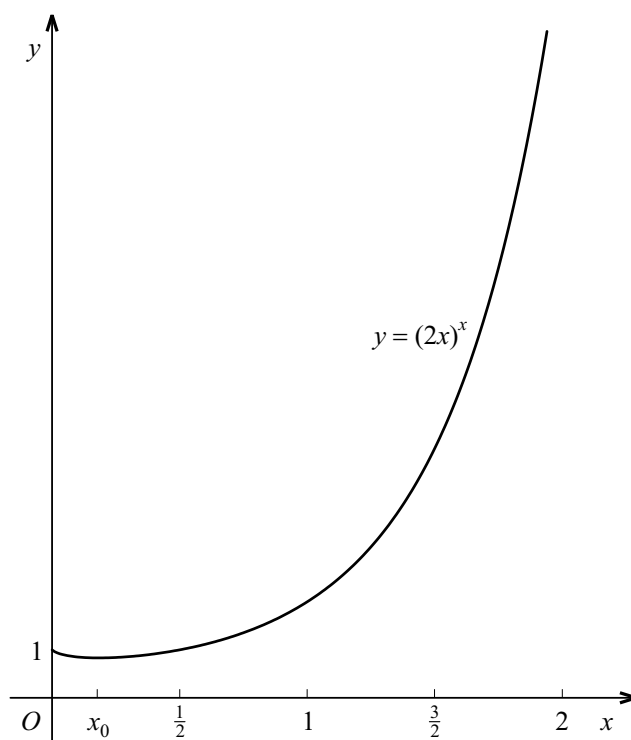
jeżeli przez Δy oznaczymy przyrost funkcji zaś przez dy jej różniczkę.

11. Zastosowanie pochodnej do badania ekstremów funkcji.

Przykład 38. Niech

$$f(x) = (2x)^x \quad (x > 0).$$

⁶Edmund George Hermann Landau (1877 - 1938), matematyk niemiecki, profesor uniwersytetu w Getyndze. Autor prac i książek z zakresu analitycznej teorii liczb i funkcji zmiennej zespolonej. Napisał podręcznik analizy matematycznej wyróżniający się niezwykłą dokładnością.



[rys. 32]

W celu obliczenia pochodnej możemy zastosować pochodną logarytmiczną (por. zadanie 11 i wzór (95)) lub przedstawić funkcję w postaci

$$f(x) = e^{x \log 2x}.$$

Różniczkując otrzymujemy

$$f'(x) = f(x)(1 + \log 2x).$$

Badanie ekstremów zaczniemy od znalezienia punktów, w których spełniony jest warunek konieczny ekstremum

$$f'(x) = 0$$

(por. twierdzenie 9), czyli

$$(89) \quad (2x)^x(1 + \log 2x) = 0.$$

Ponieważ pierwszy czynnik po lewej stronie jest dodatni, równanie (89) jest równoważne równaniu

$$\log 2x = -1,$$

którego jedynym rozwiązaniem jest

$$x_0 = \frac{1}{2e}.$$

Aby sprawdzić, czy funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 , musimy zbadać jej przebieg w otoczeniu tego punktu. Mamy

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla } 0 < x < x_0, \\ > 0 & \text{dla } x > x_0, \end{cases}$$

zatem zgodnie z twierdzeniem 15 funkcja f jest ściśle malejąca w przedziale $(0, x_0]$ oraz ściśle rosnąca w przedziale $[x_0, \infty)$. Wobec tego w punkcie $x = x_0$ funkcja f ma minimum właściwe. Zauważmy ponadto, że z (86) wynika

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log 2x = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) \log 2x = 0,$$

zatem z uwagi na ciągłość funkcji wykładniczej

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 = 1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty.$$

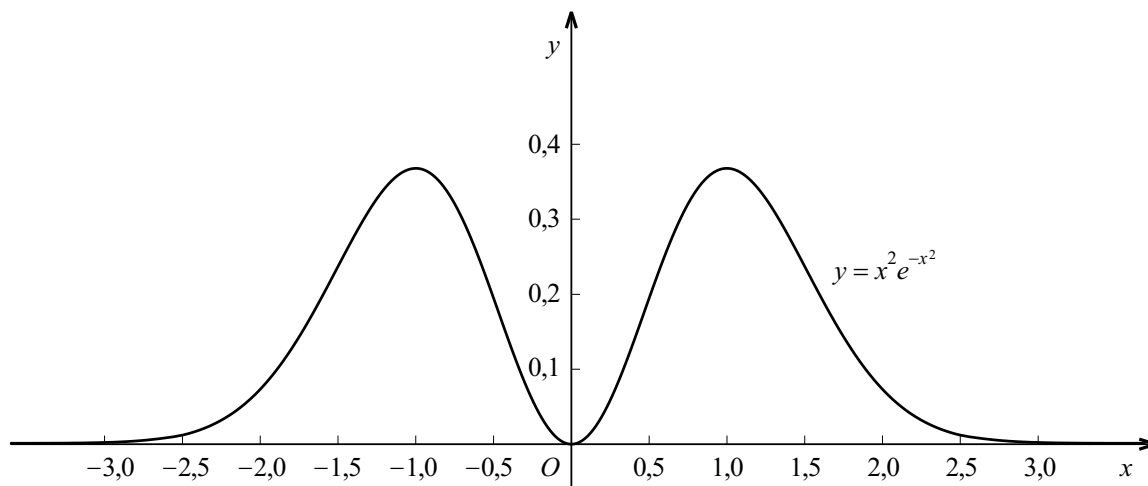
Oznacza to, że przy $x \rightarrow 0^+$ wykres dochodzi do osi y -ów stycznie do niej. Ponadto, jak łatwo sprawdzić

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Wykres funkcji f podany jest na rys. 32.

Przykład 39. Niech

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$



[rys. 33]

Zbadamy ekstrema funkcji f i narysujemy jej wykres. Zaczynamy od różniczkowania funkcji f i znalezienia punktów, w których pochodna jest równa zero. Mamy zgodnie z regułą różniczkowania iloczynu

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 \frac{d}{dx} e^{-x^2},$$

przy czym pochodną po prawej stronie znajdujemy stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej. Zatem

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$

a stąd

$$(90) \quad f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}.$$

Ponieważ

$$(91) \quad e^{-x^2} > 0,$$

równanie

$$f'(x) = 0$$

jest równoważne równaniu

$$2x(1 - x^2) = 0,$$

którego pierwiastkami są

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Wobec (90), (91)

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x < -1 \quad \text{oraz} \quad 0 < x < 1$$

zaś

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad -1 < x < 0 \quad \text{oraz} \quad x > 1,$$

zatem zgodnie z twierdzeniem 15 f jest ściśle rosnąca w przedziałach $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ oraz f jest ściśle malejąca w przedziałach $[-1, 0]$, $[1, \infty)$.

Widzimy więc, że funkcja f ma maksimum właściwe w punktach $x = -1$, $x = 1$ oraz minimum właściwe w punkcie $x = 0$, przy czym

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = f(1) = \frac{1}{e}.$$

Oprócz tego podstawiając $x^2 = t$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$$

(por. Przykład 33). Wykres funkcji f podany jest na rys. 33. Zauważmy, że funkcja f jest parzysta a więc jej wykres jest symetryczny względem osi y -ów.

Przykład 40. Wśród trójkątów równoramiennych o danym obwodzie $2p$ znaleźć trójkąt o największym polu.

Rozważany trójkąt ma boki $a = b = x$, $c = 2p - 2x$, zaś jego pole S wyraża się wzorem Herona

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

czyli

$$S(x) = \sqrt{p(p-x)^2(2x-p)}.$$

Należy znaleźć maksimum funkcji $S(x)$.

Funkcja S jest określona dla $x \geq \frac{p}{2}$. Zauważmy, że z nierówności trójkąta $c < a + b$ wynika $p < 2x$, ponadto $c = 2p - 2x > 0$ i wobec tego

$$(92) \quad \frac{p}{2} < x < p,$$

możemy jednak rozważać funkcję S w całym przedziale domkniętym $[\frac{p}{2}, p]$ (dla $x = \frac{p}{2}$ oraz $x = p$ mamy trójkąt zdegenerowany). Oznaczając

$$y = p(p-x)^2(2x-p)$$

mamy

$$S(x) = \sqrt{y}$$

zatem zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej

$$\frac{dS}{dx} = \frac{d\sqrt{y}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

czyli

$$(93) \quad \frac{dS}{dx} = \frac{p}{\sqrt{y}}(x-p)(3x-2p)$$

dla x spełniających (92). Funkcja S jest więc ciągła w przedziale $\mathbb{P} = [\frac{p}{2}, p]$ i różniczkowalna w jego wnętrzu $\mathbb{P}_0(\frac{p}{2}, p)$. Równanie

$$\frac{dS}{dx} = 0$$

ma w przedziale \mathbb{P}_0 jedyne rozwiązanie

$$x_0 = \frac{2}{3}p$$

przy czym

$$\frac{dS}{dx} \begin{cases} > 0 & \text{dla } \frac{p}{2} < x < x_0, \\ < 0 & \text{dla } x_0 < x < p. \end{cases}$$

Zgodnie z twierdzeniem 15 funkcja S jest ściśle rosnąca w przedziale $[\frac{p}{2}, x_0]$, oraz ściśle malejąca w przedziale $[x_0, p]$, zatem ma maksimum właściwe w punkcie x_0 . Dla $x = x_0$ mamy

$$a = b = c = \frac{2}{3}p.$$

Rozwiązaniem zagadnienia jest więc trójkąt równoboczny, przy czym

$$S_{\max} = S\left(\frac{2}{3}p\right) = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$



Zadania.

1. Opierając się na definicji pochodnej znaleźć $f'(0)$, jeżeli

$$\begin{aligned} \text{a.) } f(x) &= \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{b.) } f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases} \\ \text{c.) } f(x) &= x|x|, \\ \text{d.) } f(x) &= \begin{cases} x^{-n} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Wskazówka. W punkcie b.) znaleźć najpierw pochodne jednostronne $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ i zastosować twierdzenie 1. W punkcie d.) po odpowiednim podstawieniu zastosować przykład 34.

2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$. Zbadać dla jakich wartości k funkcja f jest

- a.) ciągła,
- b.) różniczkowalna

w punkcie $x_0 = 0$. W przypadku różniczkowalności obliczyć $f'(0)$. Narysować wykres funkcji f dla $k = 0, 1, 2$. Dla jakich wartości k pochodna $f'(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$?

3. Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech

$$S(x_0, h) = \frac{1}{2h}(f(x_0 + h) - f(x_0 - h))$$

Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to

$$(94) \quad \lim_{h \rightarrow 0} S(x_0, h) = f'(x_0).$$

Podać przykład funkcji nieróżniczkowalnej w punkcie x_0 , dla której istnieje granica po lewej stronie (94).

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 5.

4. Udowodnić, że funkcja wymierna

- a.) jest różniczkowalna w każdym punkcie nie będącym miejscem zerowym mianownika,

b.) jej pochodna jest również funkcją wymierną.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie o pochodnej ilorazu (twierdzenie 5) i Przykład 11.

5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{dla } x \geq a \\ 0 & \text{dla } x < a. \end{cases}$$

Obliczyć $f'(a)$ i naszkicować wykres funkcji f .

6. Podać interpretację geometryczną wzoru

$$\frac{d(y+c)}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

gdzie c jest stałą, zaś $y = f(x)$ funkcją różniczkowalną w rozważanym przedziale.

7. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = |x| + |x+1|$$

oraz narysować jej wykres.

8. Zróżniczkować funkcje

$$(i) \quad y = 3x^2 - 2x + 5, \quad (ii) \quad y = x^k e^{-x} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$(iii) \quad y = (\sin x)e^{2x}, \quad (iv) \quad y = e^{\cos x},$$

$$(v) \quad y = \sin(e^x), \quad (vi) \quad y = x^2 \arctg x.$$

9. Zróżniczkować funkcje, podając dziedzinę każdej z nich:

$$(i) \quad y = \frac{x}{x+1}, \quad (ii) \quad y = \frac{3x}{x^2 + x - 2},$$

$$(iii) \quad y = \sqrt{x^2 - x - 2}, \quad (iv) \quad y = \log |\cos x|.$$

10. Podać dziedzinę każdej z następujących funkcji i znaleźć jej pochodną:

$$(i) \quad y = \log |x|, \quad (ii) \quad y = \log |\log |x||,$$

$$(iii) \quad y = \log |\log |\log |x|||, \quad (iv) \quad y = \sin(\cos(x^2)),$$

$$(v) \quad y = \log \frac{x-a}{x+a}, \quad (vi) \quad y = \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}.$$

11. Niech $y = f(x)$ będzie funkcją o wartościach dodatnich w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nie). Wyrażenie

$$(95) \quad (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

(gdzie ' oznacza różniczkowanie $\frac{d}{dx}$) nazywamy *pochodną logarytmiczną* funkcji f . Zastosować wzór (95) do zróżniczkowania następujących funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y &= (1 + \sin x)^{\sqrt{x}}, & \text{(ii)} \quad y &= (1 + x^2)^{\log(1+x^2)}, \\ \text{(iii)} \quad y &= (\sin x)^{\cos x}, & \text{(iv)} \quad y &= x^{(e^x)}, \\ \text{(v)} \quad y &= (1 + x^2)^{1-x^2}. \end{aligned}$$

Podać dziedzinę każdej z tych funkcji.

12. Obliczyć pochodne następujących funkcji a.) wychodząc bezpośrednio z definicji pochodnej, b.) posługując się znanymi regułami różniczkowania:

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Podać dziedzinę każdej z tych funkcji.

13. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 , jeżeli

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= \sin x, \quad x_0 = \frac{1}{4}\pi, \\ \text{(ii)} \quad f(x) &= x^2 + 1, \quad x_0 = 1, \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \log(1+x), \quad x_0 = 0. \end{aligned}$$

14. Pod jakim kątem prosta $y = c$ przecina sinusoidę $y = \sin x$, jeżeli

$$c = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad c = \pm 1, \quad c = 0.$$

Uwaga. Przez kąt między prostą i krzywą rozumiemy kąt między tą prostą i styczną do krzywej w punkcie przecięcia.

15. Pod jakim kątem przecinają się krzywe $y = x^2$ oraz $y^2 = x$?

Uwaga. Przez kąt między krzywymi rozumiemy kąt utworzony przez styczne w punkcie przecięcia.

16. Uzasadnić równości (przy $x \rightarrow 0$):

$$(i) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x),$$

$$(ii) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x),$$

$$(iii) \quad \log(1+x) = x + o(x),$$

$$(iv) \quad \sin x = x + o(x),$$

$$(v) \quad e^x = 1 + x + o(x).$$

Wskazówka. Wykorzystać wiadomości podane w punktach 2 i 10.

17. Udowodnić następujące

Twierdzenie (Darboux). *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (A, B) (ograniczonym lub nie), to jej pochodna ma w tym przedziale własność Darboux.*

(por. §3 punkt 7)

Wskazówka. Dla ustalonego przedziału $[a, b] \subset (A, B)$ rozważyć najpierw przypadek, gdy f' przyjmuje w punktach a, b wartości o różnych znakach i wykazać, że w przedziale (a, b) istnieje punkt ekstremalny. Przypadek ogólny

$$f'(a) < \alpha < f'(b) \quad \text{względnie} \quad f'(a) > \alpha > f'(b)$$

sprowadzić do poprzedniego rozważając funkcję $g(x) = f(x) - \alpha x$.

18. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, ale jej pochodna f' nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Porównać z zadaniem 17 oraz z twierdzeniem 13 §3.

19. Dana jest funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w jego wnętrzu, przy czym

$$f(a) = f(b) = 0, f(x) \neq 0 \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Udowodnić, że dla dowolnie obranej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \alpha.$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji

$$g(x) = f(x)e^{-\alpha x}.$$

20. Zilustrować twierdzenie udowodnione w zadaniu 19 następującymi przykładami:

$$(i) \quad f(x) = \cos x \quad \text{w przedziale} \quad \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right],$$

$$(ii) \quad f(x) = 1 - x^2 \quad \text{w przedziale} \quad [-1, 1].$$

Znaleźć punkt $c = c(\alpha)$.

21. Udowodnić następujące uogólnienie twierdzenia Rolle'a:

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w ograniczonym przedziale (a, b) spełniającą warunek

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty.$$

Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.

Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie zastępując ∞ przez $-\infty$.

Wskazówka. Dobrać najpierw liczby α, β tak, by zachodziły nierówności

$$a < a + \alpha < b - \beta < b \quad \text{oraz} \quad f(a + \alpha) < f(b - \beta),$$

następnie udowodnić istnienie $x_0 \in (a, a + \alpha)$ takiego, że $f(x_0) = f(b - \beta)$ i zastosować twierdzenie Rolle'a do przedziału $[x_0, b - \beta]$.

22. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w całym przedziale $(-\infty, \infty)$ i spełniającą warunek

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \in \mathbb{R}_\infty.$$

Udowodnić, że istnieje punkt c taki, że $f'(c) = 0$.

Wskazówka. Do funkcji

$$g(x) = f(\operatorname{tg}x) \quad \left(-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi\right)$$

zastosować twierdzenie Rolle'a w przypadku, gdy $g \in \mathbb{R}$ oraz zadanie 21, gdy $g = \pm\infty$.

23. Niech f będzie funkcją ciągłą w otoczeniu punktu a i różniczkowalną w jego sąsiedztwie. Udowodnić, że jeżeli istnieje

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = g,$$

to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a oraz $f'(a) = g$. Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla pochodnych jednostronnych.

Wskazówka. Przekształcić iloraz różnicowy

$$\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

opierając się na twierdzeniu Lagrange'a.

24. Niech

$$f(x) = x^3 \quad (x \geq 0).$$

Dla $0 < a < b$ znaleźć punkt $c \in (a, b)$ taki, że styczna do wykresu w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty $(a, f(a)), (b, f(b))$. Porównać z twierdzeniem Lagrange'a.

25. Udowodnić, że

- (i) pochodna funkcji parzystej jest nieparzysta,
- (ii) pochodna funkcji nieparzystej jest parzysta.

Podać przykłady.

26. Udowodnić regułę różniczkowania n czynników będących funkcjami zmiennej $x \in \mathbb{R}$:

$$(y_1 y_2 \dots y_n)' = \sum_{j=1}^n y_1 \dots y_{j-1} y_{j+1}' y_{j+1} \dots y_n.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 4 i zastosować metodę indukcji.

27. Podać regułę różniczkowania wyznacznika stopnia n , którego elementy są funkcjami zmiennej $x \in \mathbb{R}$.

Wskazówka. Skorzystać z przedstawienia wyznacznika w postaci

$$\det[y_{ij}(x)] = \sum (-1)^{N(\sigma)} y_{1j_1} y_{2j_2} \dots y_{nj_n},$$

gdzie $N(\sigma)$ oznacza ilość inwersji w permutacji $\sigma = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ liczb $(1, 2, \dots, n)$ a suma jest rozciągnięta na wszystkie permutacje. Następnie zastosować regułę podaną w zadaniu 26.

28. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $(-\infty, \infty)$ spełniającą warunki

$$f'(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty), \quad f(0) = 1.$$

Udowodnić, że

$$f(x) = e^x.$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 13 (i) stwierdzić, że funkcja

$$g(x) = e^{-x} f(x)$$

jest funkcją stałą, następnie obliczyć $g(0)$.

29. Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi w przedziale $(-\infty, \infty)$ spełniającymi warunki

$$\begin{aligned} f'(x) &= -g(x), & g'(x) &= f(x) \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty), \\ f(0) &= 1, & g(0) &= 0. \end{aligned}$$

Udowodnić, że

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sin x.$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 13 (i) udowodnić, że funkcja

$$p(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2$$

jest stała, następnie obliczyć $p(0)$.

30. Udowodnić nierówność

$$2 \log x \begin{cases} < x - \frac{1}{x} & \text{dla } x > 1, \\ > x - \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 15 zbadać przebieg funkcji

$$g(x) = 2 \log x - x + \frac{1}{x}$$

w przedziale $(0, \infty)$.

31. Udowodnić nierówność

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad \text{dla } x > 0.$$

Wskazówka. W celu zbadania przebiegu funkcji

$$g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

wykazać najpierw, że pochodna $g'(x)$ jest funkcją ściśle rosnącą w przedziale $(0, \infty)$.

32. Udowodnić nierówności

$$e^x \begin{cases} > 1 + x + \frac{x^2}{2} & \text{dla } x > 0, \\ < 1 + x + \frac{x^2}{2} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Wskazówka. Opierając się na nierówności (62) i twierdzeniu 15 zbadać przebieg funkcji

$$g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

w przedziale $(-\infty, \infty)$.

33. Udowodnić, że równanie

$$x = \cos x$$

ma w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$ dokładnie jedno rozwiązanie. Podać ilustrację geometryczną. Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 15 zbadać przebieg funkcji

$$g(x) = x - \cos x,$$

następnie skorzystać z twierdzenia 13 §3.

34. Zbadać ilość rozwiązań równania

$$e^x = ax \quad (x \in \mathbb{R})$$

w zależności od parametru a . Podać ilustrację geometryczną.

Wskazówka. Korzystając z zadania 32 i zadania 17 §2 oraz twierdzeń 14, 15 zbadać przebieg funkcji

$$g(x) = e^x - ax,$$

następnie oprzeć się na twierdzeniu 13 §3.

35. Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi i niech $f(x_0) = g(x_0)$. Udowodnić, że funkcja

$$F(x) = \max(f(x), g(x))$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Wskazówka. Dla dowolnego $h_n \rightarrow 0$ rozważyć przypadki

1^o istnieje wskaźnik n_0 taki, że dla $n \geq n_0$

$$F(x_0 + h_n) = f(x_0 + h_n)$$

lub

$$F(x_0 + h_n) = g(x_0 + h_n),$$

2^o ciąg $\{h_n\}$ rozkłada się na dwa podciągi $\{\bar{h}_n\}$ i $\{\bar{\bar{h}}_n\}$ takie, że

$$F(x_0 + \bar{h}_n) = f(x_0 + \bar{h}_n), \quad F(x_0 + \bar{\bar{h}}_n) = g(x_0 + \bar{\bar{h}}_n).$$

W każdym z przypadków zbadać granicę odpowiedniego ciągu ilorazów różnicowych funkcji F .

36. Zbadać ciągłość i różniczkowalność podanych funkcji oraz naszkicować ich wykresy:

$$(i) \quad y = \begin{cases} x^2 & \text{dla } |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 - x^2 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$(ii) \quad y = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x \leq 0, \\ e^x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

$$(iii) \quad y = \begin{cases} -x^3 & \text{dla } x < 0, \\ x^3 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Wynik porównać z twierdzeniem sformułowanym w zadaniu 35.

37. Niech f będzie funkcją różniczkowalną i niech $f(x_0) = 0$. Udowodnić, że funkcja

$$F(x) = |f(x)|$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy $f'(x_0) = 0$.

Wskazówka. Oprzeć się na równości

$$|a| = \max(a, -a) \quad (a \in \mathbb{R})$$

i na twierdzeniu sformułowanym w zadaniu 35.

38. Naszkicować wykresy funkcji

$$f(x) = |\sin x|, \quad g(x) = |\cos x|$$

oraz zbadać ich ciągłość i różniczkowalność. Wynik porównać z twierdzeniem sformulowanym w zadaniu 37.

39. Niech f będzie funkcją określoną i różniczkowalną w pewnym przedziale (a, ∞) spełniającą warunki:

(i) istnieje skończona granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

(ii) istnieje (być może niewłaściwa) granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = g.$$

Udowodnić, że $g = 0$.

Wskazówka. Na mocy twierdzenia 14 §2 do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać Q tak, by dla $x > Q$ zachodziła nierówność

$$(96) \quad -\varepsilon < f(x+1) - f(x) < \varepsilon.$$

Różnicę występującą we wzorze (96) przekształcić w oparciu o twierdzenie Lagrange'a. Następnie przypuszczając, że $g \neq 0$, dojść do sprzeczności.

40. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2 \quad (x \neq 0).$$

Udowodnić, że istnieje skończona granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

natomiast nie istnieje (nawet w sensie niewłaściwym) granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x).$$

Porównać z twierdzeniem sformułowanym w zadaniu 39.

41. Zakładamy, że funkcja f , określona i różniczkowalna dla dostatecznie dużych x , spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = g,$$

gdzie $g \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że wówczas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = g.$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu Lagrange'a przekształcić różnicę

$$f(x+1) - f(x),$$

następnie skorzystać z zadania 8 §2.

42. Znaleźć ekstrema oraz kresy górny i dolny funkcji

- (i) $f(x) = x^2 e^{-x}$ w przedziale $[-2, 4]$,
- (ii) $g(x) = \cos x - 2 \cos \frac{x}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi]$,
- (iii) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } -2 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ w przedziale $[-2, 3]$.

43. Okazać, że następujące funkcje mają stały znak dla $x > 0$:

$$(i) \quad f(x) = \sin x - x, \quad (ii) \quad f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Otrzymaną nierówność zilustrować rysunkiem.

44. Znaleźć największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$$

w przedziale $[0, \infty)$.

45. Dane są liczby a_1, a_2, \dots, a_n . Znaleźć taką wartość x , dla której suma

$$S(x) = \sum_{j=1}^n (x - a_j)^2$$

jest najmniejsza, posługując się dwiema metodami

- a.) sprowadzając trójmian $S(x)$ do postaci kanonicznej oraz
 b.) badając pochodną funkcji $S(x)$.

46. Który z punktów paraboli $y^2 = 6x$ leży najbliżej prostej $x - y + 5 = 0$?

47. Walec obrotowy zmienia swą powierzchnię nie zmieniając objętości V . Jaki musi być promień podstawy R aby pole powierzchni było najmniejsze?

48. Znaleźć największą objętość walca wpisanego w stożek o danych rozmiarach.

49. Udowodnić, że wśród prostokątów o danym obwodzie kwadrat ma największe pole.

50. Udowodnić, że wśród trójkątów o danym obwodzie i danym boku największe pole ma trójkąt równoramienny, w którym bok dany jest podstawą.

51. Stosując reguły de l'Hospitala obliczyć granice

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \left(\frac{1}{2}\pi - x \right) \operatorname{tg} x, \quad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} ax} \quad (a \neq 0),$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}, \quad (iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{|x|}},$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0).$$

52. Czy funkcja

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$$

jest ograniczona w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi]$?

53. Niech

$$f(x) = x + \sin x, \quad g(x) = x.$$

Okazać, że

- a.) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$,
- b.) istnieje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$,
- c.) nie istnieje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Porównać z twierdzeniem 19.

54. Zbadać zbieżność ciągów

$$a_n = n(\sqrt[n]{2} - 1), \quad b_n = n(\sqrt[n]{n} - 1).$$

Wskazówka. Wykorzystać granice obliczone w przykładach 31 i 35.

55. Udowodnić zbieżność ciągu

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

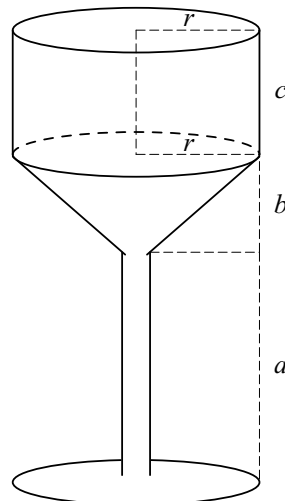
Wskazówka. Korzystając z nierówności (63) wykazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu, następnie oprzeć się na twierdzeniu 5 rozdz.II §2.

Uwaga. Granica

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

nosi nazwę *stałej Eulera*.⁷

56. Do kieliszka (rys. 34) wlewamy wino w tempie α ml/min (a, b, c, r, α dane). Niech $v(t)$ oznacza objętość wina wlanego po t minutach, zaś $h(t)$ jego wysokość liczoną od podstawy kieliszka. Wyrazić funkcje $v(t)$, $h(t)$ przy pomocy danych i zbadać ich różniczkowalność.

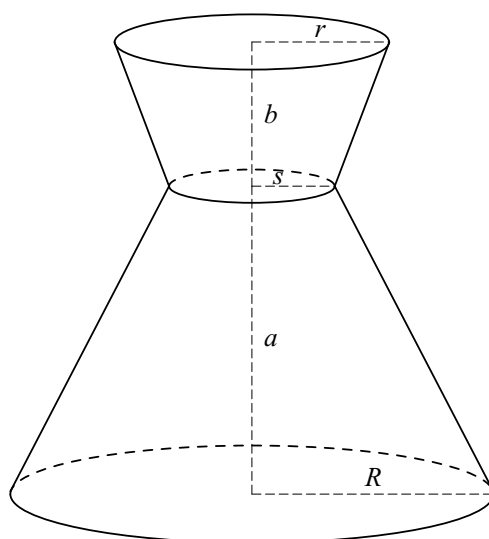


[rys. 34]

57. Do ozdobnej szklanki (rys. 35) wlewamy sok owocowy w tempie α ml/min ($a, b, r, s, R,$

⁷Leonard Euler (1707 - 1783), urodzony w Bazylei, w latach 1727 - 1741 był profesorem matematyki w Petersburgu, następnie przeniósł się do Berlina, gdzie w 1744 r. objął katedrę matematyki w Akademii Nauk. W 1766 powrócił do Petersburga i do końca życia zajmował się działalnością naukową. Rozwinął i ugruntował rachunek różniczkowy i całkowy, uprawiał również optykę, mechanikę i astronomię, algebrę i teorię liczb. Wniósł istotny wkład w rozwój wszystkich działów matematyki. Opublikował 756 prac. Część jego dorobku pozostaje nadal nie opublikowana.

α dane). Niech $v(t)$ oznacza objętość soku wlanego po t minutach, zaś $h(t)$ jego wysokość liczoną od podstawy szklanki. Wyrazić funkcje $v(t)$, $h(t)$ przy pomocy danych i zbadać ich różniczkowalność.



[rys. 35]

58. Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$ przyjmujemy, że

$$b = \sqrt[q]{a},$$

jeżeli $b^q = a$ (liczbę b nazywamy *pierwiastkiem stopnia q z liczby a*). Zakładając, że q jest liczbą nieparzystą okazać, że funkcja

$$f(x) = \sqrt[q]{x}$$

jest określona i ciągła na całej osi rzeczywistej.

59. Niech $\alpha = \frac{p}{q}$, gdzie p jest liczbą całkowitą, zaś q liczbą naturalną nieparzystą. Przyjmując

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

rozważmy funkcję potęgową

$$f(x) = x^\alpha$$

określoną

(i) dla $x \in \mathbb{R}$, gdy $p \geq q$,

(ii) dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdy $p < q$.

Okazać, że równość (32)

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

jest prawdziwa w każdym punkcie x , w którym funkcja f jest określona.

60. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Stosując (przy ustalonym x) wzór Lagrange'a (52) w przedziale $[0, x]$ ($0 < x \leq x_0$) i dzieląc obie strony równości przez x dostajemy

$$(97) \quad x \sin \frac{1}{x} = 2c \sin c - \cos \frac{1}{c},$$

gdzie $c \in (0, x)$. Jak wiemy (por. Przykład 25), liczba c występująca we wzorze (52) zależy od końców przedziału, w naszym przykładzie jest więc funkcją zmiennej $x \in (0, x_0]$.

Okazać, że funkcja $c(x)$ nie jest ciągła w żadnym przedziale $(0, a)$, gdzie $0 < a \leq x_0$.

Wskazówka. Okazać najpierw, że funkcja

$$d(x) = \frac{1}{c(x)}$$

nie spełnia warunku Darboux (§3 punkt 7), następnie powołać się na twierdzenia 7 i 13 §3.

61. Porównać reguły de l'Hospitala podane w twierdzeniach 16 -19 z twierdzeniem Stolza (rozdział II §2 twierdzenie 11). Czy zachodzi analogia między tymi twierdzeniami?

§5. Pochodne wyższych rzędów.



1. Pochodna rzędu k i wzór Leibniza Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym \mathbb{I} i niech

$$g(x) = f'(x) \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Jeżeli funkcja g jest również różniczkowalna w \mathbb{I} , to jej pochodną nazywamy *drugą pochodną* funkcji f i oznaczamy

$$g'(x) = f^{(2)}(x) \quad (x \in \mathbb{I})$$

lub

$$g'(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Ogólnie, przyjmujemy następującą rekurencyjną definicję *k -tej pochodnej* (inaczej: *pochodnej rzędu k*) funkcji f :

$$f^{(k)}(x) = [f^{(k-1)}(x)]' \quad (x \in \mathbb{I})$$

lub w zapisie Leibniza

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}} \right) \quad (x \in \mathbb{I})$$

dla $k \in \mathbb{N}$. Przez pochodną rzędu zerowego rozumiemy samą funkcję f , zaś dla $k = 2, 3$ używane jest oznaczenie

$$f^{(2)}(x) = f''(x), \quad f^{(3)}(x) = f'''(x).$$

Jeżeli \mathbb{I} nie jest przedziałem otwartym, lecz zawiera swój lewy koniec a (względnie prawy koniec b), to przyjęta definicja k -tej pochodnej pozostaje w mocy z tym, że przez pochodną w punkcie a (względnie b) rozumiemy pochodną prawostronną (względnie lewostronną).

Jeżeli funkcja f ma w przedziale \mathbb{I} (otwartym lub nie) skończone pochodne do rzędu n włącznie, to mówimy, że jest ona w tym przedziale *n -krotnie różniczkowalna*. Przeprowadzając rozumowanie podobne jak w dowodzie twierdzeń 2 i 3 §4 stwierdzamy łatwo, że jeżeli funkcja ma skończoną pochodną prawostronną (względnie lewostronną) w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła prawostronnie (względnie lewostronnie). Z uwagi tej oraz z twierdzenia 3 §4 wynika, że jeżeli funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w przedziale \mathbb{I} , to ma w tym przedziale ciągłe pochodne do rzędu $n - 1$ włącznie. Jeżeli również pochodna rzędu n jest ciągła w przedziale \mathbb{I} to mówimy, że f jest klasy C^n w tym przedziale (zapisujemy $f \in C^n(\mathbb{I})$). Jeżeli funkcja f ma w przedziale \mathbb{I} pochodne dowolnego rzędu (oczywiście zgodnie z twierdzeniem 3 §4 i uczynioną wyżej uwagą są one ciągłe) to mówimy, że f jest klasy C^∞ w tym przedziale (zapisujemy $f \in C^\infty(\mathbb{I})$).

Dla pochodnej n -tego rzędu iloczynu dwóch funkcji zachodzi *wzór Leibniza*

$$(1) \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

przy założeniu, że obie funkcje f, g są n -krotnie różniczkowalne w rozważanym przedziale. Udowodnimy go metodą indukcji. Dla $n = 1$ wzór (1) został udowodniony w §4 (por. twierdzenie 4 oraz wzory (10), (10'), (10'')). Załóżmy teraz, że obie funkcje f, g są $(n + 1)$ -krotnie różniczkowalne, wobec tego wyrażenie po prawej stronie (1) jest funkcją różniczkowalną. Zakładając, że równość (1) jest prawdziwa i różniczkując ją obustronnie otrzymujemy po zastosowaniu reguły (10') §4

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)},$$

co po podstawieniu $r = k + 1$ w pierwszej sumie daje

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r-1} f^{(r)} g^{(n-r+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

Grupując wyrazy z tymi samymi pochodnymi funkcji f, g otrzymujemy stąd

$$(2) \quad (fg)^{(n+1)} = \sum_{r=1}^n \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \right] f^{(r)} g^{(n-r+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g^{(0)}.$$

Równość (2) po wykorzystaniu znanej własności współczynników newtonowskich (por. (18) rozdz.I §1) daje

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} f^{(r)} g^{(n-r+1)},$$

czyli wzór (1) z zastąpieniem n przez $n + 1$. Dowód indukcyjny jest zakończony. \square

2. Wzór Taylora i wzór Maclaurina.

Twierdzenie 1. Niech f będzie funkcją n -krotnie różniczkowalną w przedziale $[a, b]$. Wówczas istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$(3) \quad f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

gdzie

$$(4) \quad R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c).$$

DOWÓD. Dla dowodu wprowadzimy dwie pomocnicze funkcje

$$g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

oraz

$$u(x) = (b-x)^n$$

(łatwo zauważyć, że funkcję g otrzymujemy z równości (3) rozwiązując ją względem R_n i zastępując a przez x). Funkcje g , u spełniają w przedziale $[a, b]$ założenia twierdzenia Cauchy'ego (twierdzenie 12 §4). Mamy

$$(5) \quad g(b) = u(b) = 0$$

oraz

$$(6) \quad u'(x) = -n(b-x)^{n-1}.$$

Ponadto dla $x \in (a, b)$

$$g'(x) = -f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x),$$

co po redukcji daje

$$(7) \quad g'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Stosując do funkcji g, u twierdzenie Cauchy'ego otrzymujemy wobec (5)

$$\frac{-g(a)}{-u(a)} = \frac{g'(c)}{u'(c)},$$

co po wykorzystaniu (6), (7) i skróceniu ułamka po prawej stronie przez $(b-c)^{n-1}$ daje

$$\frac{g(a)}{u(a)} = \frac{f^{(n)}(c)}{n(n-1)!}.$$

Ostatnia równość po obustronnym pomnożeniu przez $u(a)$ daje (3). □

Wzór (3) nosi nazwę *wzoru Taylora*¹ (*wzoru Maclaurina*² gdy $a = 0$) z resztą w postaci *Lagrange'a* określoną wzorem (4).

¹Brook Taylor (1685 - 1731), studiował na uniwersytecie w Cambridge, w 1712 r. został członkiem Londyńskiego Towarzystwa Królewskiego. Kontynuując badania I. Newtona zajmował się rachunkiem różniczkowym i mechaniką (badał drgania poprzeczne struny jednorodnej zamocowanej na końcach).

²Colin Maclaurin (1698 - 1776), urodzony w Szkocji, od 1725 r. profesor matematyki na uniwersytecie w Edynburgu, członek Londyńskiego Towarzystwa Królewskiego. Zajmował się analizą matematyczną, kontynuując badania I. Newtona.

W przeprowadzonym dowodzie rozważaliśmy funkcję f w przedziale $[a, b]$, co oznacza, że zakładamy $a < b$. Zauważmy jednak, że w twierdzeniu Cauchy'ego, na którym oparty jest dowód, można zamienić role punktów a, b - powoduje to jedynie zmianę znaku w liczniku i w mianowniku ułamka po lewej stronie wzoru (57) §4. Nic więc nie stoi na przeszkodzie, by zakładając $b < a$ powtórzyć całe rozumowanie, rozważając funkcje f, g, u w przedziale $[b, a]$. Zatem we wzorze (3) może być $a < b$ lub $a > b$. Wzór (3) pozostaje również prawdziwy dla $a = b$, gdyż redukuje się on wtedy do równości $f(b) = f(a)$ (przyjmujemy w tym wypadku $c = a = b$).

Uwzględniając te uwagi i zmieniając oznaczenia możemy twierdzenie 1 sformułować w innej, nieco ogólniejszej, postaci.

Twierdzenie 2. *Niech f będzie funkcją n -krotnie różniczkowalną w przedziale \mathbb{IP} i niech $a \in \mathbb{IP}$. Wówczas dla dowolnego $x \in \mathbb{IP}$ istnieje punkt \bar{x} leżący między a, x taki, że*

$$(8) \quad f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

gdzie

$$(9) \quad R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\bar{x}).$$

Równość (8) stanowi inną postać wzoru Taylora (względnie wzoru Maclaurina, gdy $a = 0$) z resztą R_n w postaci Lagrange'a określoną wzorem (9).

3. Szczególne przypadki wzoru Taylora. Dla $n = 1$ wzór (3) przyjmuje postać

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c),$$

twierdzenie 1 jest wówczas twierdzeniem Lagrange'a, które było omówione w §4 (twierdzenie 11). Zakładając, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale \mathbb{IP} i przyjmując $n = 2$ we wzorze (8) otrzymujemy z twierdzenia 2

$$(10) \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + R_2,$$

gdzie

$$(11) \quad R_2 = \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\bar{x}).$$

Mówimy, że

f jest *wypukła* w przedziale \mathbb{IP} , jeżeli³

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{IP};$$

³W dalszym ciągu (punkt 10) będzie podana inna definicja funkcji wypukłej bez żadnych założeń o jej regularności. Dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnych obie definicje są równoważne (twierdzenie 8).

f jest *wklęsła* w przedziale \mathbb{P} , jeżeli

$$f''(x) \leq 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P}.$$

Oczywiście f jest wypukła (wklęsła) wtedy i tylko wtedy, gdy $-f$ jest wklęsła (wypukła) w przedziale \mathbb{P} .

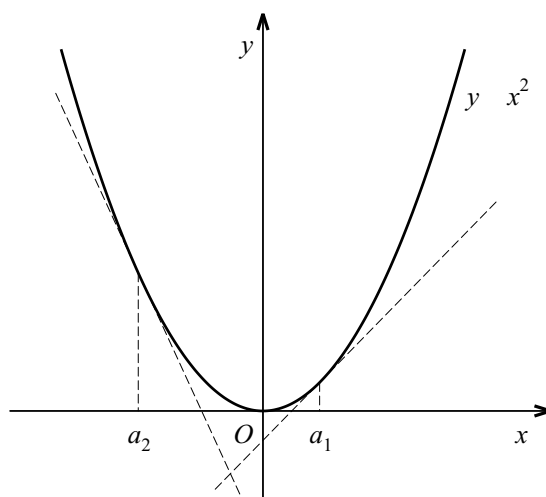
Przypomnijmy (por. §4 punkt 1), że równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$ ma postać

$$(12) \quad y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Ze wzorów (10) - (12) widać, że jeżeli f jest funkcją wypukłą w \mathbb{P} , to jej wykres leży nad styczną poprowadzoną w dowolnym punkcie $(a, f(a))$, gdzie $a \in \mathbb{P}$. Jeżeli f jest funkcją wklęsłą w \mathbb{P} , to zachodzi sytuacja przeciwna - wykres leży pod styczną poprowadzoną w punkcie $(a, f(a))$ dla dowolnego $a \in \mathbb{P}$.

Przykład 1. Niech (rys. 36)

$$f(x) = x^2,$$



[rys. 36]

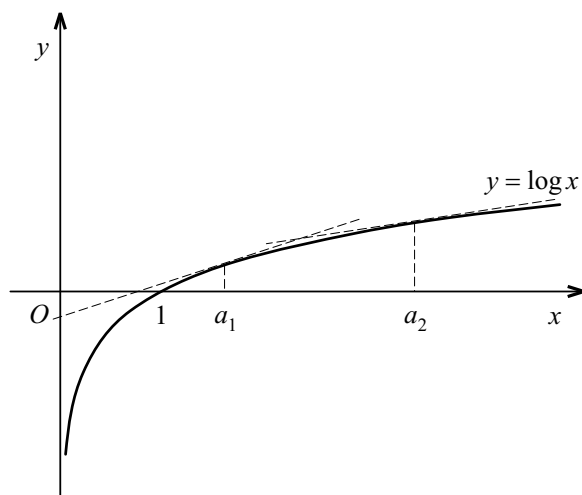
wówczas

$$f''(x) = 2$$

dla dowolnego x , zatem f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (-\infty, \infty)$. Z rys. 36 widać, że parabola o równaniu $y = x^2$ leży nad styczną poprowadzoną w dowolnie obranym punkcie (a, a^2) .

Przykład 2. Niech (rys. 37)

$$f(x) = \log x \quad (x > 0),$$



[rys. 37]

wówczas

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

zatem f jest wklęsła w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Z rys. 37 widać, że wykres funkcji f leży pod styczną poprowadzoną w dowolnie obranym punkcie $(a, \log a)$.

Przykład 3. Rozważmy funkcję potęgową

$$f(x) = x^\alpha$$

określoną w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Mamy dla $x \in \mathbb{P}$

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$

a stąd

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{gdy } 0 < \alpha < 1, \\ > 0 & \text{gdy } \alpha < 0 \text{ lub } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dla $\alpha \in (0, 1)$ funkcja f jest wklęsła w przedziale \mathbb{P} , dla $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ funkcja f jest wypukła w tym przedziale. Wykresy funkcji f dla różnych wartości α podane były na rys. 18 (§3).

Zakładając w dalszym ciągu, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale \mathbb{P} wprowadźmy pomocniczą funkcję

$$(13) \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x, a \in \mathbb{P}, x \neq a).$$

Mamy

$$(14) \quad \varphi'(x) = \frac{(x - a)f'(x) - f(x) + f(a)}{(x - a)^2}.$$

Z drugiej strony, zamieniając role punktów a , x we wzorze Taylora (8) przy $n = 2$ otrzymujemy dla a , $x \in \mathbb{P}$

$$(15) \quad f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{1}{2}(a - x)^2 f''(\bar{x}),$$

gdzie \bar{x} jest punktem pośrednim między a , x . Jeżeli f jest wypukła w przedziale \mathbb{P} , to z (14), (15) wynika, że funkcja φ określona wzorem (13) jest rosnąca w każdym przedziale nie zawierającym punktu a . W szczególności dla

$$a < x < b \quad (b \in \mathbb{P})$$

mamy

$$\varphi(x) \leq \varphi(b),$$

co daje po prostych przekształceniach

$$(16) \quad f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

dla $a \leq x \leq b$. Zauważmy, że równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ ma postać

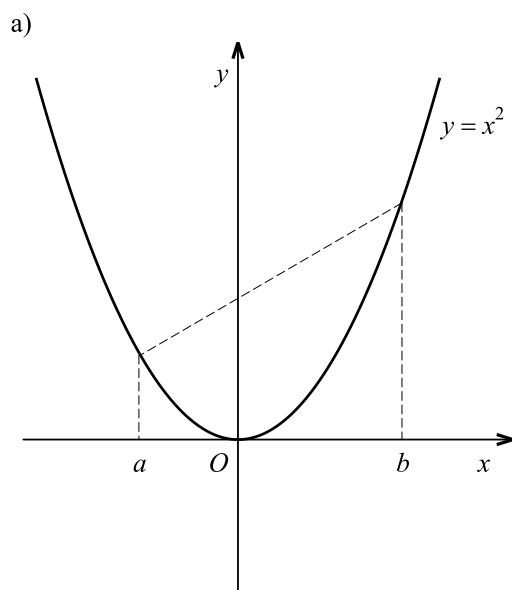
$$(17) \quad y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Prostą tę nazywamy *sieczną wykresu* funkcji f , zaś jej odcinek o końcach A , B - *cięciwą wykresu*. Z (16), (17) wynika więc, że

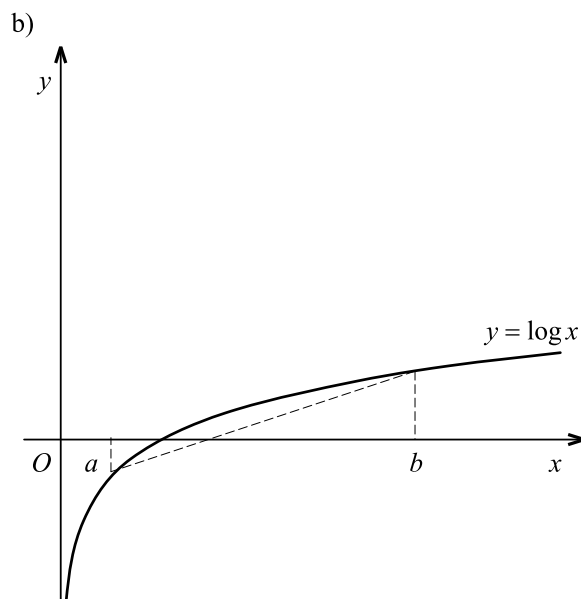
wykres funkcji wypukłej w przedziale \mathbb{P} leży zawsze pod cięciwą wyznaczoną przez punkty $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, gdzie $a, b \in \mathbb{P}$.

Jeżeli funkcja f jest wklęsła w przedziale \mathbb{P} , to w podobny sposób zauważamy, że funkcja φ określona wzorem (13) jest malejąca w każdym przedziale nie zawierającym punktu a . Daje to w konsekwencji nierówność (16) z zamianą znaku \leq na \geq . Wobec tego

wykres funkcji wklęsłej w przedziale \mathbb{P} leży zawsze nad cięciwą wyznaczoną przez punkty $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ gdzie $a, b \in \mathbb{P}$. Przeprowadzone rozważania ilustruje rys. 38 a), gdzie $f(x) = x^2$ oraz rys. 38 b), gdzie $f(x) = \log x$.



[rys. 38 a)]



[rys. 38 b)]

Przykład 4. Niech

$$f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Funkcja f jest wypukła w przedziale $(-\infty, \infty)$ gdyż

$$f''(x) = e^x > 0,$$

zatem wykres jej leży nad styczną w punkcie $(0, 1)$ o równaniu

$$y = x + 1,$$

skąd wynika, że

$$e^x \geq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Nierówność ta była udowodniona w §4 (Przykład 28).

Przykład 5. Niech

$$f(x) = \log(1 + x) \quad (x > -1).$$

Funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-1, \infty)$, gdyż

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0,$$

zatem wykres jej leży pod styczną w punkcie $(0, 0)$ o równaniu

$$y = x,$$

skąd wynika, że

$$\log(1 + x) \leq x \quad (x > -1).$$

Jest to prawa część nierówności udowodnionej w §4 (Przykład 29).

4. Ekstrema i punkty przegięcia. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym \mathbb{I} i niech dla ustalonego punktu $a \in \mathbb{I}$

$$(18) \quad d(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(a).$$

Mówimy, że a jest *punktem przegięcia* funkcji f , jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$(19) \quad d(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla } a - \delta < x < a, \\ > 0 & \text{dla } a < x < a + \delta \end{cases}$$

lub

$$(19') \quad d(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } a - \delta < x < a, \\ < 0 & \text{dla } a < x < a + \delta. \end{cases}$$

Niech l_a oznacza styczną do wykresu w punkcie $(a, f(a))$ - jak wiemy (por. §4 punkt1), jest ona określona równaniem

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Warunek (19) oznacza, że

wykres leży pod styczną l_a w przedziale $(a - \delta, a)$ i nad styczną l_a w przedziale $(a, a + \delta)$, zaś warunek (19'), że naodwrot -

wykres leży nad styczną l_a w przedziale $(a - \delta, a)$ i pod styczną l_a w przedziale $(a, a + \delta)$. Zatem jeżeli a jest punktem przegięcia, to wykres funkcji w punkcie $(a, f(a))$ przechodzi z jednej strony stycznej na drugą stronę.

Podobnie, jak w przypadku ekstremum, można łatwo sformułować warunek konieczny do tego, by punkt a był punktem przegięcia.

Twierdzenie 3. *Jeżeli f jest klasy C^2 w przedziale otwartym \mathbb{I} oraz $a \in \mathbb{I}$ jest punktem przegięcia, to*

$$f''(a) = 0.$$

DOWÓD. Wzór Taylora (8) dla $n = 2$ możemy zapisać w postaci

$$(20) \quad d(x) = \frac{1}{2}(x - a)^2 f''(\bar{x}),$$

gdzie \bar{x} leży między punktami a, x . Przypuśćmy teraz, że $f''(a) \neq 0$. Wówczas z (20) widzimy, że w pewnym dostatecznie małym otoczeniu a wyrażenie $d(x)$ jest różne od zera dla $x \neq a$ i ma stały znak, taki jak $f''(a)$ (por. zadanie 38 §3). Oznacza to, że żaden z warunków (19), (19') nie jest spełniony - wbrew założeniu, że a jest punktem przegięcia. \square

Założmy teraz, że f jest funkcją klasy C^n w przedziale otwartym \mathbb{P} . Wiemy (por. §4 punkty 6,7), że jeżeli $a \in \mathbb{P}$ jest punktem ekstremalnym funkcji f , to

$$(21) \quad f'(a) = 0$$

przy czym (21) stanowi jedynie warunek konieczny ale nie dostateczny istnienia ekstremum w punkcie a . Aby rozstrzygnąć, czy rzeczywiście funkcja f osiąga ekstremum w punkcie a , badamy zachowanie jej pochodnej f' w otoczeniu a - tak postępowaliśmy w Przykładach 38, 39, 40 §4. Obecnie zobaczymy, że mając do dyspozycji pochodne wyższych rzędów, możemy sformułować kryterium sprowadzające się do badania tych pochodnych w punkcie a , w których zachodzi równość (21). Założmy, że spełnione są warunki

$$f''(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)}(a) \neq 0,$$

gdzie $2 \leq p \leq n$. Ze wzoru Taylora (8) dla $n = p$ mamy, przyjmując $x = a + h$

$$(22) \quad f(a+h) - f(a) = \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(\bar{x}),$$

przy czym dla dostatecznie małych $|h|$ pochodna $f^{(p)}(\bar{x})$ jest różna od zera i ma ten sam znak, co $f^{(p)}(a)$. Z równości (22) widać, że jeżeli p jest liczbą parzystą, to różnica po lewej stronie ma taki sam znak jak $f^{(p)}(\bar{x})$ niezależnie od znaku przyrostu h . W tym przypadku f ma w punkcie a ekstremum, przy tym

$$\textit{minimum} \text{ gdy } f^{(p)}(a) > 0, \quad \textit{maksimum} \text{ gdy } f^{(p)}(a) < 0.$$

Jeżeli p jest liczbą nieparzystą, to z (22) wynika, że znak różnicy po lewej stronie zależy od znaku przyrostu h , wobec tego w punkcie a nie ma ekstremum.

Przyjmijmy teraz, że $a \in \mathbb{P}$ jest punktem przegięcia funkcji f , zatem zgodnie z twierdzeniem 3

$$(23) \quad f''(a) = 0.$$

Założmy ponadto, że

$$f'''(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)}(a) \neq 0$$

gdzie $3 \leq p \leq n$. Wzór Taylora (8) dla $n = p$ możemy zapisać w postaci

$$d(x) = \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(\bar{x}),$$

gdzie funkcja $d(x)$ jest określona wzorem (18). Jeżeli p jest liczbą nieparzystą, to w pewnym otoczeniu punktu a

$$d(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla } x < a, \\ > 0 & \text{dla } x > a \end{cases}$$

lub

$$d(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } x < a, \\ < 0 & \text{dla } x > a, \end{cases}$$

zależnie od znaku pochodnej $f^{(p)}(a)$. Jeżeli zaś p jest liczbą parzystą, to w pewnym otoczeniu punktu a wyrażenie $d(x)$ ma stały znak, taki sam jak $f^{(p)}(a)$ - zatem a nie może być punktem przegięcia.

Przeprowadzone rozumowanie doprowadziło nas do następującego kryterium pozwalającego rozstrzygnąć zachowanie się funkcji w otoczeniu punktu a .

Twierdzenie 4. Niech f będzie funkcją klasy C^n w przedziale otwartym \mathbb{I} i niech $a \in \mathbb{I}$.

(i) Jeżeli

$$f'(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)}(a) \neq 0,$$

gdzie $2 \leq p \leq n$, to a jest punktem ekstremalnym wtedy i tylko wtedy gdy p jest liczbą parzystą, przy tym

f ma w punkcie a minimum gdy $f^{(p)}(a) > 0$,

oraz

f ma w punkcie a maksimum gdy $f^{(p)}(a) < 0$.

(ii) Jeżeli

$$f''(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)}(a) \neq 0,$$

gdzie $3 \leq p \leq n$, to a jest punktem przegięcia wtedy i tylko wtedy gdy p jest liczbą nieparzystą, przy tym

wykres leży pod styczną l_a dla $x < a$ zaś nad styczną l_a dla $x > a$ gdy $f^{(p)}(a) > 0$

oraz

wykres leży nad styczną l_a dla $x < a$ zaś pod styczną l_a dla $x > a$ gdy $f^{(p)}(a) < 0$.

□

Przykład 6. Niech (rys. 39)

$$f(x) = (x - a)^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Funkcja f jest klasy C^∞ w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Dla $k = 1$ jest to funkcja liniowa

$$f(x) = x - a.$$

Ponieważ

$$f'(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

w żadnym punkcie $a \in \mathbb{R}$ nie jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum (por. twierdzenie 9 §4). Również

$$d(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

i wobec tego przy dowolnym obiorze punktu $a \in \mathbb{R}$ nie może być spełniony żaden z warunków (19), (19'). Wynika stąd, że dla $k = 1$ funkcja f nie ma ekstremów ani punktów przegięcia.

Gdy $k > 1$, mamy

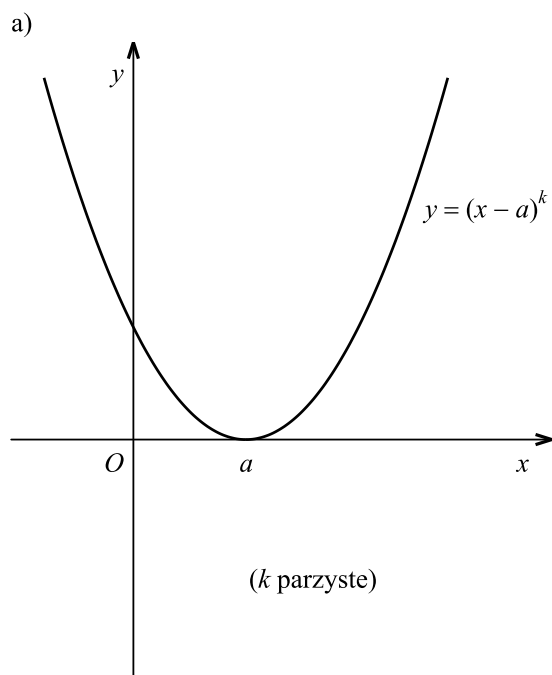
$$f^{(j)}(x) = k(k-1) \cdots (k-j+1)(x-a)^{k-j} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, k-1, \quad f^{(k)}(x) = k!,$$

zatem zgodnie z twierdzeniem 4

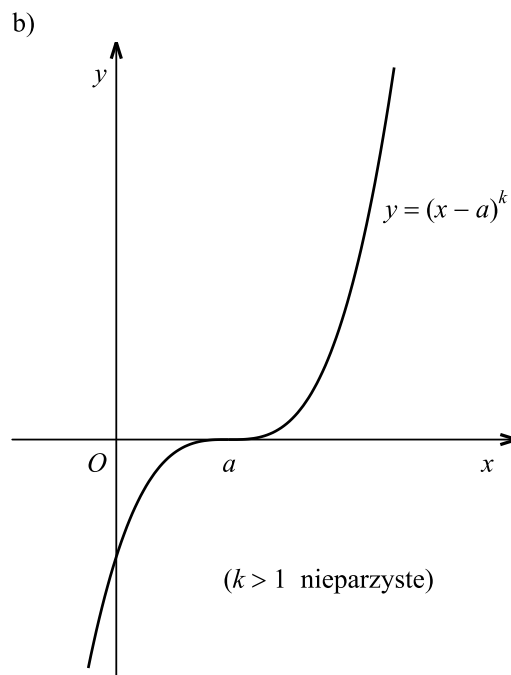
f ma minimum w punkcie a gdy k jest liczbą parzystą

oraz

f ma punkt przegięcia dla $x = a$ gdy k jest liczbą nieparzystą.



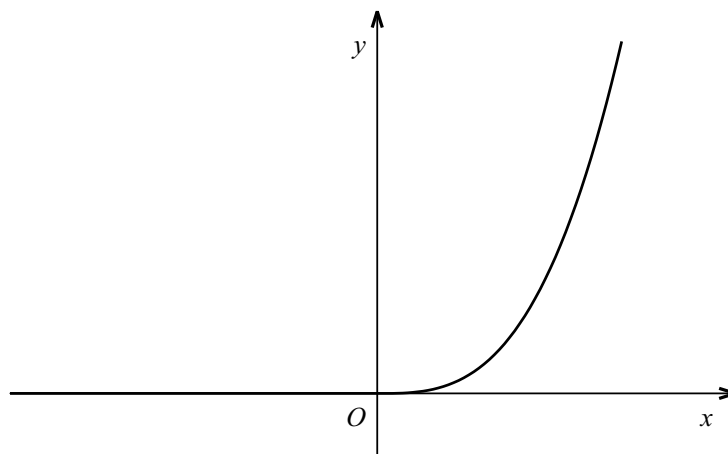
[rys. 39 a)]



[rys. 39 b)]

Przykład 7. Niech (rys. 40)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$



[rys. 40]

wówczas

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0, \end{cases}$$

następnie

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

oraz

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

zaś $f'''(0)$ nie istnieje (druga pochodna f'' ma w punkcie $x = 0$ różne pochodne lewo- i prawostronną). Zatem f jest klasy C^2 w przedziale $(-\infty, \infty)$. Pomimo, że

$$f''(0) = 0$$

punkt $x = 0$ nie jest punktem przegięcia, gdyż

$$d(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

nie jest więc spełniony żaden z warunków (19), (19') dla $a = 0$. Jak widać z rys. 40, dla $x > 0$ wykres leży nad styczną l_0 (jest nią oś x -ów), natomiast dla $x < 0$ wykres pokrywa się z tą styczną. W punkcie $x = 0$ mamy minimum (nie jest to minimum właściwe).

Przykład 8. Opierając się na twierdzeniu 4 zbadamy ekstrema i punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = \sin x.$$

Mamy

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$

a więc warunek

$$f'(x) = 0$$

jest spełniony w punktach

$$x_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k \in Z),$$

natomiast

$$f''(x_k) = (-1)^{k-1} \neq 0.$$

Zatem funkcja sinus ma minimum w punktach

$$x_{2k+1} = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$$

oraz maksimum w punktach

$$x_{2k} = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Ponadto

$$f''(x) = 0$$

dla

$$x = \check{x}_k = k\pi \quad (k \in Z)$$

przy czym

$$f'''(\check{x}_k) \neq 0.$$

Wobec tego punkty \check{x}_k są punktami przegięcia funkcji sinus. Funkcja ta jest wypukła w każdym przedziale $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ i wklęsła w każdym przedziale $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Przykład 9. Niech

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

wówczas

$$f'(x) = (\cos x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(\cos x)^{-3} \sin x, \quad f'''(x) = 6(\cos x)^{-4}(\sin x)^2 + 2(\cos x)^{-2}.$$

Ponieważ $f'(x) \neq 0$ dla wszystkich x , funkcja tangens nie ma ekstremów. Warunek konieczny dla punktu przegięcia

$$f''(x) = 0$$

spełniony jest dla $x = 0$. Ponieważ

$$f'''(0) = 2 \neq 0$$

punkt $x = 0$ jest punktem przegięcia. W przedziale $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ funkcja tangens jest wklęsła zaś w przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ jest funkcją wypukłą.

Aby zbadać w oparciu o twierdzenie 4 czy punkt a spełniający warunek (23) jest punktem przegięcia, musimy obliczyć pochodną rzędu co najmniej trzeciego, co może wymagać uciążliwych rachunków. Następujące twierdzenie pozwala sprowadzić zagadnienie do badania drugiej pochodnej w otoczeniu punktu a .

Twierdzenie 5. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale otwartym \mathbb{P} i niech

$$f''(a) = 0,$$

gdzie a jest punktem przedziału \mathbb{P} . Jeżeli istnieje takie $\delta > 0$, że

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla } a - \delta < x < a, \\ > 0 & \text{dla } a < x < a + \delta \end{cases}$$

lub

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } a - \delta < x < a, \\ < 0 & \text{dla } a < x < a + \delta, \end{cases}$$

to a jest punktem przegięcia funkcji f .

DOWÓD. Korzystając z postaci (20) wzoru Taylora dla $n = 2$ stwierdzamy, że spełniony jest jeden z warunków (19), (19'), co kończy dowód. \square

♡ ♡ ♡

5. Funkcje hiperboliczne. Przy pomocy funkcji wykładniczej e^x wprowadzimy dwie nowe funkcje: \sinh (sinus hiperboliczny) i \cosh (cosinus hiperboliczny), określone wzorami

$$(24) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ze wzorów tych wynika natychmiast ważna tożsamość

$$(25) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Różniczkując wzory (24) stwierdzamy, że

$$(26) \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

a stąd

$$(27) \quad (\sinh x)'' = \sinh x, \quad (\cosh x)'' = \cosh x.$$

Z pierwszego wzoru (26) wynika, że sinus hiperboliczny jest funkcją ściśle rosnącą, ponadto $\sinh 0 = 0$. Wobec tego

$$(28) \quad \sinh x \begin{cases} < 0 & \text{dla } x < 0, \\ > 0 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

a stąd i z pierwszego wzoru (26) wnioskujemy, że sinus hiperboliczny jest funkcją wklęsłą w przedziale $(-\infty, 0)$ i funkcją wypukłą w przedziale $(0, \infty)$. Dla $x = 0$ mamy

$$(\sinh)''(0) = \sinh 0 = 0, \quad (\sinh)'''(0) = \cosh 0 = 1,$$

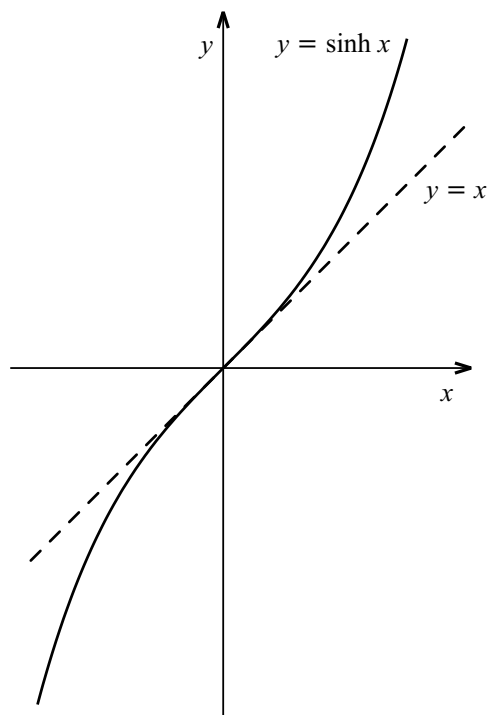
zaś równanie prostej l_0 stycznej do wykresu funkcji sinus hiperboliczny w punkcie $(0, 0)$ ma postać

$$y = x.$$

Zgodnie z twierdzeniem 4 punkt $x = 0$ jest punktem przegięcia funkcji sinus hiperboliczny, przy czym wykres leży pod styczną l_0 dla $x < 0$, zaś nad styczną l_0 dla $x > 0$. Z pierwszego wzoru (24) wynika ponadto, że

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty.$$

Wykres funkcji sinus hiperboliczny podany jest na rys. 41.



[rys. 41]

Funkcja cosinus hiperboliczny jest parzysta, wobec tego wykres jej jest symetryczny względem osi y -ów. Na mocy (26), (28) funkcja cosinus hiperboliczny jest ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, 0]$ i ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$. W punkcie $x = 0$ ma minimum (właściwe), przy czym

$$\cosh 0 = 1.$$

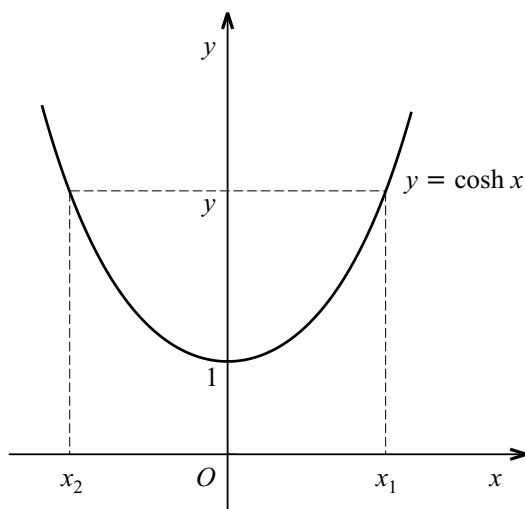
Ponieważ

$$\cosh x > 0$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, z drugiej równości (27) wynika, że cosinus hiperboliczny jest funkcją wypukłą w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \infty.$$

Wykres funkcji cosinus hiperboliczny podajemy na rys. 42.



[rys. 42]

Funkcja sinus hiperboliczny jest ściśle rosnąca w przedziale $(-\infty, \infty)$, posiada zatem funkcję odwrotną którą oznaczamy arsinh. Aby ją wyznaczyć rozwiążemy względem x równanie

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Podstawienie

$$(29) \quad z = e^x$$

doprowadza do równania kwadratowego

$$z^2 - 2yz - 1 = 0,$$

które ma dwa rozwiązania

$$z_1 = y + \sqrt{1 + y^2}, \quad z_2 = y - \sqrt{1 + y^2}.$$

Ponieważ

$$\sqrt{1 + y^2} > \sqrt{y^2} = |y|,$$

więc

$$z_1 > y + |y| \geq 0, \quad z_2 < y - |y| \leq 0 \quad (y \in \mathbb{R}),$$

zatem rozwiązanie zagadnienia dostajemy przyjmując

$$e^x = z_1$$

co daje

$$x = \log(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

Funkcja arsinh ma zatem postać

$$(30) \quad \operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Funkcja cosinus hiperboliczny jest ściśle monotoniczna w każdym z przedziałów $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$, w każdym z tych przedziałów posiada więc funkcję odwrotną określoną dla $y \geq 1$. Znajdziemy ją rozwiązując względem x równanie

$$(31) \quad y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

które po podstawieniu (29) przechodzi w równanie kwadratowe

$$z^2 - 2yz + 1 = 0.$$

Ostatnie równanie ma dwa rozwiązania

$$z_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad z_2 = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad (y \geq 1),$$

przy czym zachodzi związek

$$(32) \quad z_1 z_2 = 1.$$

Ponieważ

$$z_1 \geq y \geq 1$$

więc na mocy (32) mamy

$$0 < z_2 = \frac{1}{z_1} \leq 1$$

i przyjmując

$$e^{x_1} = z_1, \quad e^{x_2} = z_2$$

dostajemy dla $y \geq 1$ dwa rozwiązania równania (31)

$$(33) \quad x_1 = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \geq 0$$

oraz

$$(34) \quad x_2 = \log(y - \sqrt{y^2 - 1}) \leq 0,$$

przy czym

$$x_2 = -x_1$$

(por. rys. 42). Wzory (33) i (34) określają funkcję odwrotną do funkcji cosinus hiperboliczny odpowiednio w przedziale $[0, \infty)$ i $(-\infty, 0]$. Przez arcosh rozumiemy funkcję odwrotną w przedziale $[0, \infty)$. Mamy zatem

$$(35) \quad \operatorname{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1).$$

Znajdziemy jeszcze pochodne funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych. Podstawiając

$$u = \sqrt{x^2 + 1}$$

mamy

$$(36) \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arsinh}x) = \frac{1 + \frac{du}{dx}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ponieważ

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

mnożąc po prawej stronie (36) licznik i mianownik przez $\sqrt{x^2 + 1}$ dostajemy po uproszczeniu

$$(37) \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arsinh}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Podobny rachunek daje

$$(38) \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcosh}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1).$$

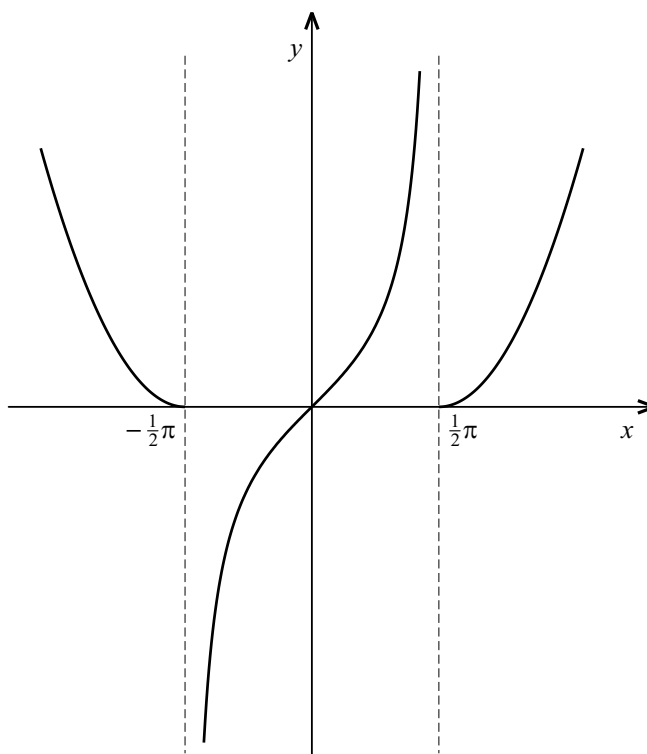
Wzory (37), (38) są przydatne w rachunku całkowym.

♡ ♡ ♡

6. Asymptoty wykresu funkcji. Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że prosta $x = a$ jest *asymptotą pionową wykresu funkcji f* , jeżeli przynajmniej jedna z granic jednostronnych funkcji f w punkcie a jest granicą niewłaściwą (tzn. ∞ lub $-\infty$).

Przykład 10. Niech

$$f(x) = \begin{cases} (x + \frac{\pi}{2})^2 & \text{dla } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{dla } x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$



[rys. 43]

wówczas

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty,$$

zatem proste $x = -\frac{\pi}{2}$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$ są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f (rys. 43).

Oprócz asymptot pionowych rozważamy również asymptoty skośne. Niech l będzie prostą o równaniu

$$y(x) = Ax + B$$

i niech

$$s(x) = f(x) - y(x)$$

(zauważmy, że $|s(x)|$ oznacza odległość między prostą l a wykresem funkcji f mierzoną w kierunku osi y -ów). Mówimy, że l jest *asymptotą skośną wykresu funkcji f przy $x \rightarrow \infty$* , jeżeli

$$(39) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = 0$$

(oczywiście zakładamy, że funkcja f jest określona przynajmniej dla dostatecznie dużych x). Z podanej definicji łatwo wyprowadzić wzory pozwalające wyznaczyć współczynniki A , B w równaniu asymptoty. Z warunku (39) wynika, że również

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{s(x)}{x} = 0$$

a to oznacza, że

$$(40) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

Z (39) otrzymujemy teraz

$$(41) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = B.$$

Na odwrót, jeżeli współczynniki A , B są określone wzorami (40), (41), to z (41) wynika, że prosta l jest asymptotą skośną przy $x \rightarrow \infty$.

Uwaga 1. Współczynnik A można również obliczać ze wzoru

$$(42) \quad A = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x),$$

o ile funkcja f jest różniczkowalna dla dostatecznie dużych x i istnieje granica po prawej stronie (por. zadanie 41 §4).

Uwaga 2. Jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = B,$$

to zgodnie z (40)

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

zatem prosta

$$y = B$$

jest asymptotą skośną wykresu funkcji f przy $x \rightarrow \infty$.

W zupełnie podobny sposób możemy wprowadzić asymptoty przy $x \rightarrow -\infty$. Zakładając, że f jest określona dla $x < -M$ (gdzie M jest odpowiednio dobraną liczbą dodatnią), mówimy, że l jest *asymptotą skośną wykresu funkcji f przy $x \rightarrow -\infty$* , jeżeli

$$(39') \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = 0.$$

Rozumując podobnie jak poprzednio otrzymujemy wzory na współczynniki A , B w postaci

$$(40') \quad A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

oraz

$$(41') \quad B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - Ax).$$

Uwagi 1, 2 pozostają słuszne dla asymptot skośnych przy $x \rightarrow -\infty$ (oczywiście w podanych wzorach należy rozważać granicę przy $x \rightarrow -\infty$). W dalszym ciągu asymptoty skośne przy

$x \rightarrow \infty$ względnie przy $x \rightarrow -\infty$ oraz asymptoty pionowe będziemy nazywali po prostu *asymptotami*.

Przykład 11. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x} \sin x^2 \quad (x > 0).$$

Zbadamy asymptoty wykresów obu funkcji przy $x \rightarrow \infty$. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą obu wykresów. Zauważmy, że w przypadku funkcji f współczynnik A można obliczyć również ze wzoru (42), gdyż

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

Natomiast

$$g'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2},$$

wobec tego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)$$

nie istnieje (por. Przykład 4 §2) i wzór (42) nie może być stosowany.

Przykład 12. Znajdziemy asymptoty wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$

oraz (po przekształceniu)

$$f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x},$$

skąd

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0.$$

Zatem prosta

$$y = x$$

jest asymptotą wykresu przy $x \rightarrow \infty$. Podobnie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = -1$$

oraz

$$f(x) + x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x},$$

skąd

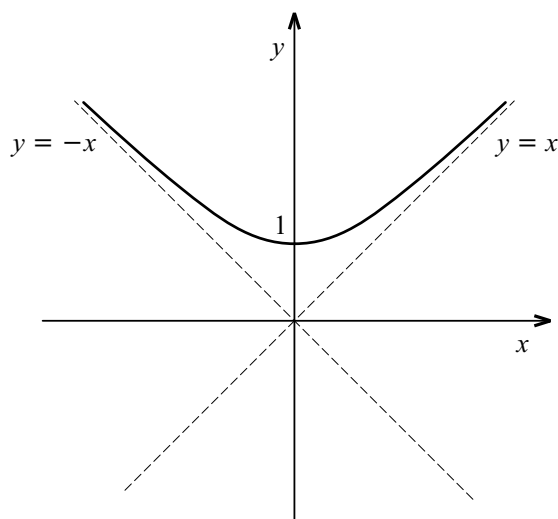
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0.$$

Zatem prosta

$$y = -x$$

jest asymptotą wykresu przy $x \rightarrow -\infty$. Zauważmy, że ten ostatni wynik można było przewidzieć bez rachunku. Funkcja f jest bowiem parzysta, zatem wykres jej jest symetryczny względem osi y -ów. Znając wykres dla $x > 0$ i asymptotę przy $x \rightarrow \infty$ znajdujemy pozostałą część wykresu (a więc i jego asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$) przez odbicie w osi y -ów. Wykres funkcji f (rys. 44) stanowi górną gałąź hiperboli o równaniu

$$y^2 - x^2 = 1.$$



[rys. 44]

7. Badanie wykresu funkcji. Badanie funkcji celem sporządzenia jej wykresu przeprowadzamy według następującego planu:

- 1^o określenie dziedziny funkcji;
- 2^o monotoniczność funkcji, ekstrema;
- 3^o wypukłość funkcji i punkty przegięcia;
- 4^o granica funkcji w punktach końcowych przedziałów, w których jest określona;
- 5^o asymptoty wykresu;

W niektórych przypadkach badamy jeszcze

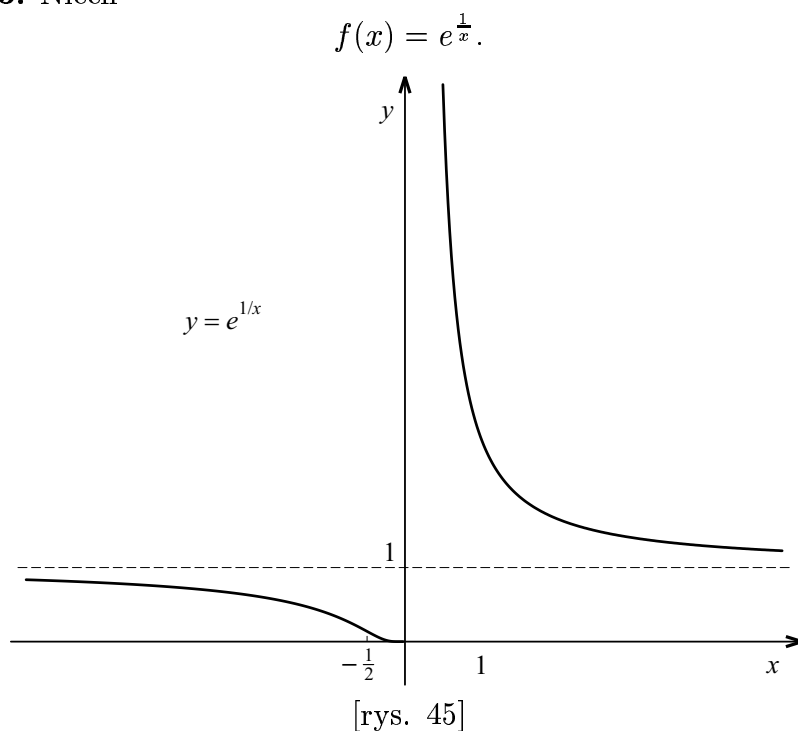
6⁰ punkty przecięcia wykresu z osiami

oraz

7⁰ kierunek stycznej do wykresu w pewnych szczególnych punktach np. punktach przecięcia wykresu z osiami, punktach przegięcia, punktach końcowych przedziałów w których funkcja jest określona.

Wyjaśnimy ten schemat na kilku przykładach.

Przykład 13. Niech



Funkcja f jest określona dla $x \neq 0$, zatem dziedziną jej jest sumą dwóch przedziałów $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Ponieważ

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} < 0,$$

funkcja jest ściśle malejąca w każdym z tych przedziałów. Różniczkując ponownie otrzymujemy

$$f''(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x + 1),$$

skąd

$$(43) \quad f''(x) = \begin{cases} < 0 & \text{dla } x < -\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{dla } x = -\frac{1}{2}, \\ > 0 & \text{dla } x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Na mocy twierdzeń 3, 5 punkt $x = -\frac{1}{2}$ jest jedynym punktem przegięcia. Oznaczając przez l styczną do wykresu w punkcie $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ widzimy ze wzoru (18), że dla $x < -\frac{1}{2}$ wykres leży pod styczną l , dla $-\frac{1}{2} < x < 0$ wykres leży nad styczną l .

Ponadto z (43) wynika, że funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-\infty, -\frac{1}{2})$ oraz wypukła w każdym z przedziałów $(-\frac{1}{2}, 0)$ i $(0, \infty)$.

Z definicji funkcji f otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty,$$

zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową wykresu. Podstawiając $t = -\frac{1}{x}$ i stosując regułę de l'Hospitala (por. Przykłady 32 - 34 §4) stwierdzamy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = - \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t} = 0,$$

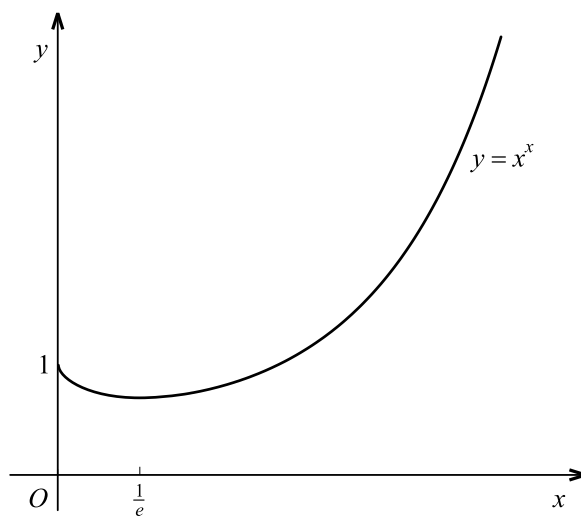
co oznacza, że wykres w przedziale $(-\infty, 0)$ osiąga początek układu stycznie do osi x -ów. Mamy następnie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

a więc prosta $y = 1$ jest asymptotą wykresu przy $x \rightarrow \infty$ oraz przy $x \rightarrow -\infty$. Wykres funkcji f podany jest na rys. 45.

Przykład 14. Zbadamy funkcję

$$f(x) = x^x \quad (x > 0).$$



[rys. 46]

Dziedzina funkcji jest przedział $(0, \infty)$. W celu obliczenia pochodnej możemy zastosować pochodną logarytmiczną (por. zadanie 11 i wzór (95) §4) lub przedstawić funkcję w postaci

$$(44) \quad f(x) = e^{x \log x}$$

(podobnie, jak w Przykładzie 12 §4). Różniczkując otrzymujemy

$$(45) \quad f'(x) = x^x (\log x + 1)$$

a stąd

$$f''(x) = f'(x)(\log x + 1) + \frac{1}{x}f(x) = x^x(\log x + 1)^2 + x^{x-1}.$$

Z własności potęgi wynika, że

$$(46) \quad f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x > 0,$$

zatem funkcja f nie ma punktów przegięcia i jest wypukła w przedziale $(0, \infty)$. Dla zbadania ekstremów zauważmy, że równanie

$$f'(x) = 0$$

jest równoważne równaniu

$$\log x = -1,$$

którego jedynym rozwiązaniem jest $x = \frac{1}{e}$. Ponieważ

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla} \quad 0 < x < \frac{1}{e}, \\ > 0 & \text{dla} \quad x > \frac{1}{e}, \end{cases}$$

funkcja f jest ściśle malejąca w przedziale $(0, \frac{1}{e})$ oraz ściśle rosnąca w przedziale $(\frac{1}{e}, \infty)$ zaś w punkcie $x = \frac{1}{e}$ osiąga swój kres dolny (czyli minimum absolutne w przedziale $(0, \infty)$ - por. Uwaga §3 punkt 6), przy czym

$$\inf_{(0, \infty)} f = e^{-\frac{1}{e}}.$$

Z przedstawienia (44) widać, że (por. wzór (86) §4)

$$(47) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = e^0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(x-1)\log x} = \infty,$$

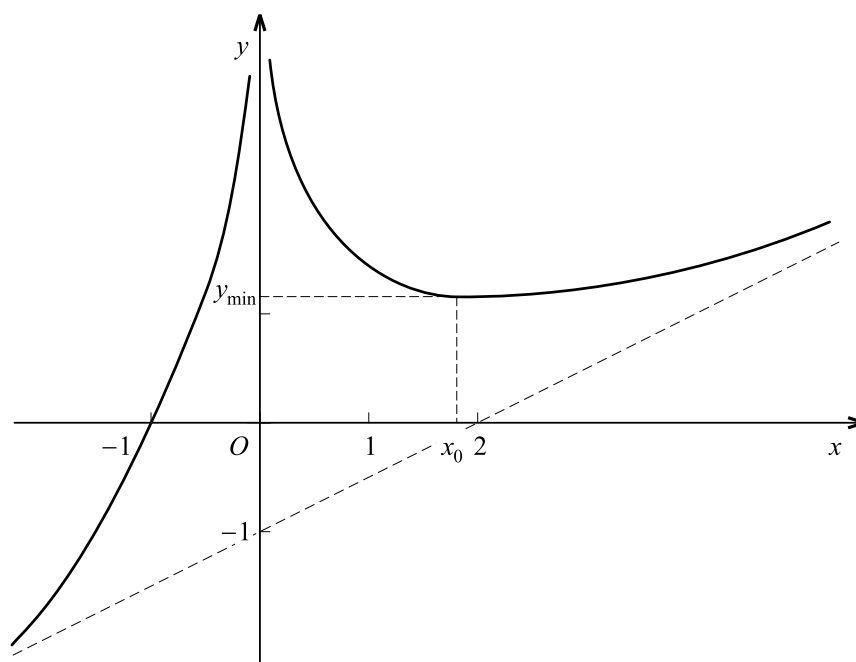
wobec tego wykres nie ma asymptot. Z (45), (47) wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -\infty,$$

zatem przy $x \rightarrow 0+$ wykres dochodzi do osi y -ów stycznie do niej. Wykres funkcji f podany jest na rys. 46.

Przykład 15. Zbadajmy funkcję

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2}.$$



[rys. 47]

Funkcja f jest określona dla $x \neq 0$, jej dziedziną jest zatem sumą dwóch przedziałów $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Wykonując dzielenie możemy funkcję f przedstawić w postaci

$$(48) \quad f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x^2}$$

skąd przez różniczkowanie dostajemy

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{x^3} = \frac{x^3 - 6}{2x^3}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{9}{x^4}.$$

Jedynym punktem stacjonarnym jest $x_0 = \sqrt[3]{6}$. Ponieważ

$$(49) \quad f''(x) > 0$$

dla wszystkich $x \neq 0$, a więc i dla $x = x_0$, na mocy twierdzenia 4 funkcja f ma minimum w punkcie x_0 . Ponieważ

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } x < 0 \quad \text{oraz dla } x > x_0, \\ < 0 & \text{dla } 0 < x < x_0 \end{cases}$$

funkcja f jest ściśle rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i (x_0, ∞) i ściśle malejąca w przedziale $(0, x_0)$. Oznaczając przez y_{\min} najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $(0, \infty)$ (jest to kres dolny funkcji f w tym przedziale) mamy

$$y_{\min} = f(x_0) = \frac{9 - 2\sqrt[3]{36}}{2\sqrt[3]{36}}.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$y_{min} > 0.$$

Istotnie, wyciągając pierwiastek trzeciego stopnia z obu stron nierówności $27 > 16$ dostajemy $3 > 2\sqrt[3]{2}$, skąd

$$9 > 6\sqrt[3]{2},$$

zaś z drugiej strony

$$2\sqrt[3]{36} = 2\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} < 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 6\sqrt[3]{2}.$$

Zestawienie otrzymanych nierówności daje $y_{min} > 0$, skąd wynika, że w przedziale $(0, \infty)$ funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Natomiast w przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja f przyjmuje wartości różnych znaków, gdyż

$$f(-1) = 0$$

a w przedziale tym funkcja f jest ściśle rosnąca. Z nierówności (49) wynika, że funkcja f jest wypukła w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$. Z przedstawienia (48) widać, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty,$$

zatem oś y -ów jest asymptotą pionową wykresu. Aby znaleźć asymptoty skośne zauważmy, że

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = -1.$$

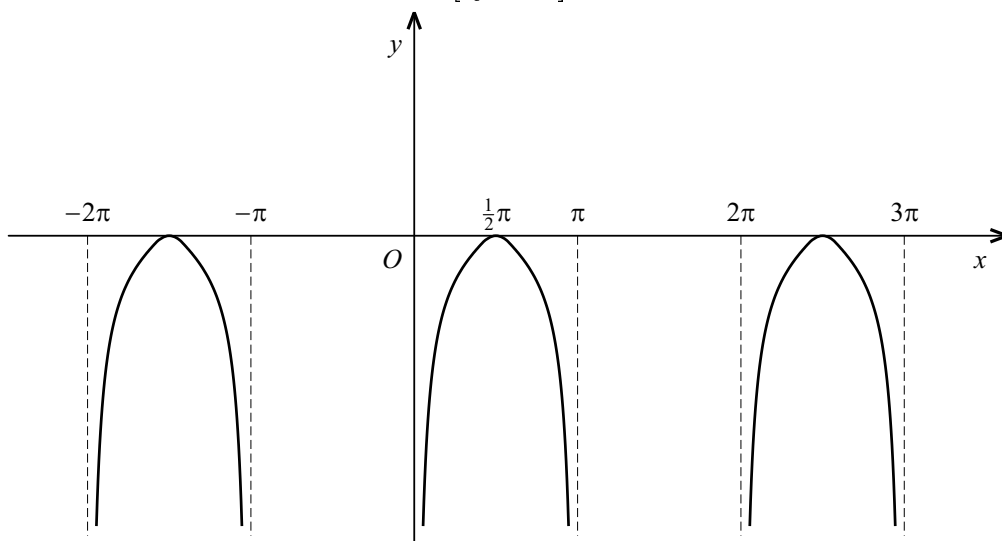
Na mocy wzorów (40), (41), (40'), (41') stwierdzamy, że prosta

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

jest asymptotą wykresu przy $x \rightarrow \infty$ oraz przy $x \rightarrow -\infty$. Wykres funkcji f przedstawiony jest na rys. 47.

Przykład 16. Niech $f(x) = \log \sin x$.

[rys. 48]



Funkcja f jest określona w każdym przedziale w którym $\sin x > 0$ tzn. w każdym przedziale $\mathbb{P}_k = (2k\pi, (2k+1)\pi)$ gdzie k jest liczbą całkowitą. Ponieważ jest to funkcja okresowa o okresie 2π , możemy ją rozważać tylko w jednym z przedziałów np. \mathbb{P}_0 czyli dla $0 < x < \pi$. Mamy

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

a stąd

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ = 0 & \text{dla } x = \frac{\pi}{2}, \\ < 0 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Wobec tego funkcja f jest ściśle rosnąca w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ i ściśle malejąca w przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ a w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$ osiąga maksimum, przy czym

$$y_{max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(zauważmy, że y_{max} jest kresem górnym funkcji f w przedziale \mathbb{P}_0). Ponieważ

$$f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0,$$

funkcja f jest wklęsła w przedziale \mathbb{P}_0 . Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -\infty,$$

zatem proste $x = 0$ oraz $x = \pi$ stanowią asymptoty pionowe wykresu. Wykres funkcji f podajemy na rys. 48.

♡ ♡ ♡

8*. Przybliżone rozwiązywanie równań - metoda siecznych (regula falsi). Równanie, które chcemy rozwiązać, ma postać

$$(50) \quad f(x) = 0.$$

Jeżeli f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i na końcach tego przedziału przyjmuje wartości różnych znaków, to z twierdzenia Darboux (twierdzenie 13 §3) wynika, że w przedziale otwartym (a, b) istnieje rozwiązanie α równania (50). Jeżeli ponadto funkcja f jest ściśle monotoniczna w $[a, b]$, to rozwiązanie to jest jedyne. Zakładając, że f jest dwukrotnie różniczkowalna i wypukła względnie wklęsła w przedziale $[a, b]$ skonstruujemy ciąg zbieżny do rozwiązania równania (50). Dla ustalenia uwagi załóżmy, że

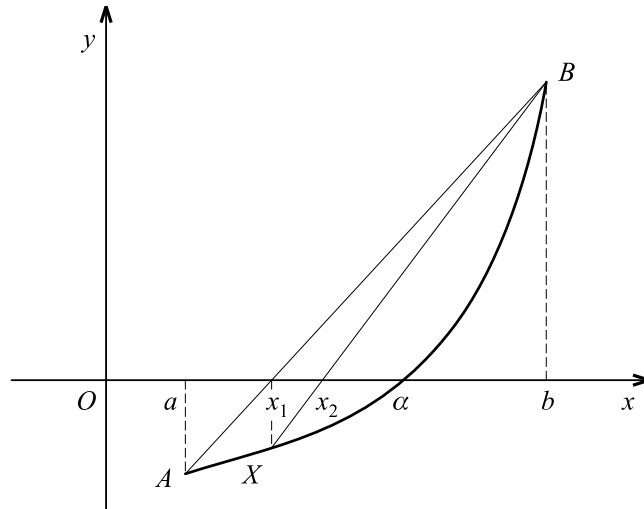
- (i) $f(a) < 0 < f(b)$,
- (ii) f jest ściśle rosnąca w $[a, b]$,
- (iii) f jest dwukrotnie różniczkowalna i wypukła w $[a, b]$.

Sieczna wykresu funkcji f przechodząca przez punkty $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ ma równanie

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

i przecina oś x -ów w punkcie

$$x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}.$$



[rys.49]

Ponieważ f jest wypukła w $[a, b]$, jej wykres leży pod cięciwą AB (por. punkt 3 i rys. 49), zatem $f(x_1) \leq 0$. Jeżeli $f(x_1) = 0$, to $x_1 = \alpha$ jest szukanym rozwiązaniem. Zakładając, że

$$f(x_1) < 0$$

mamy

$$a < x_1 < \alpha < b$$

i możemy powtórzyć przeprowadzoną konstrukcję zastępując przedział $[a, b]$ przez przedział $[x_1, b]$. Prowadząc sieczną przez punkty $X = (x_1, f(x_1))$, $B = (b, f(b))$ znajdujemy jej punkt przecięcia z osią x -ów (rys. 49)

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1)f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

przy czym

$$a < x_1 < x_2 \leq \alpha < b.$$

Kontynuując opisane postępowanie dostajemy ciąg punktów określony wzorem rekurencyjnym

$$(51) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

przy czym

$$(52) \quad a < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \alpha < b.$$

Zauważmy, że jeżeli dla pewnego n_0 mamy $f(x_{n_0}) = 0$, to oczywiście $x_{n_0} = \alpha$ i ze wzoru (51) wynika, że $x_n = \alpha$ dla $n \geq n_0$. Rozwiązanie równania (50) otrzymujemy wówczas w postaci dokładnej po n_0 krokach. Jeżeli taka sytuacja nie zachodzi, to z nierówności (52) wynika, że ciąg nieskończony $\{x_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony a więc zbieżny zgodnie z twierdzeniem 5 rozdz. II §2. Oznaczając

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$$

mamy na mocy (52)

$$(53) \quad a < g \leq \alpha < b.$$

Po przejściu do granicy w (51) i wykorzystaniu ciągłości funkcji f dostajemy

$$\frac{(b-g)f(g)}{f(b)-f(a)} = 0$$

co po uwzględnieniu (53) daje $f(g) = 0$. Zatem

$$g = \alpha$$

jest szukanym rozwiązaniem równania (50), a wyrazy ciągu $\{x_n\}$ dają jego przybliżenie (z niedomiarem). Aby oszacować błąd, jaki popełniamy zastępując rozwiązanie α przez jego przybliżenie założmy dodatkowo, że

$$(iv) \quad f'(x) > 0 \text{ dla } x \in [a, b].$$

Z założenia dwukrotnej różniczkowalności funkcji f wynika, że f' jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, wobec tego na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12 §3) osiąga w tym przedziale swój kres dolny m . Z uwagi na (iv) mamy

$$m = \inf_{[a,b]} f' > 0.$$

Zakładając, że $x_n \neq \alpha$ (a więc $x_n < \alpha$) i stosując twierdzenie o wartości średniej dostajemy

$$f(\alpha) - f(x_n) = (\alpha - x_n)f'(c),$$

gdzie $c \in (x_n, \alpha)$, skąd

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{f'(c)},$$

a zatem

$$(54) \quad |x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

Nierówność (54) pozwala sprowadzić oszacowanie błędu znalezione przybliżenia do wyliczenia wartości $f(x_n)$. Zauważmy, że wartość $f(x_n)$ potrzebna jest do znalezienia następnego przybliżenia x_{n+1} . Znajdując ją możemy zdecydować w oparciu o (54), czy już uzyskaliśmy przybliżenie rozwiązania α z wystarczającą dokładnością czy też należy kontynuować obliczenia.

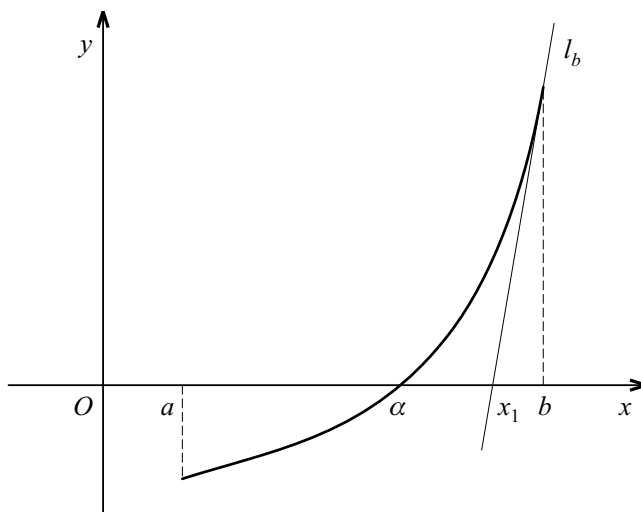
9*. Przybliżone rozwiązywanie równań - metoda stycznych (Newtona). Podamy jeszcze inną metodę przybliżonego rozwiązywania równania (50), w którym funkcja f oprócz założeń podanych w punkcie 8 spełnia jeszcze założenie dodatkowe

$$f'(x) \neq 0 \quad (x \in [a, b]).$$

Dla ustalenia uwagi założymy, że spełnione są warunki (i) - (iv) punktu 8.

Styczna l_b do wykresu w punkcie $(b, f(b))$ ma równanie

$$y = f(b) + f'(b)(x - b)$$



[rys.50]

i przecina oś x -ów (rys. 50) w punkcie

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Z założenia wypukłości funkcji f wynika, że jej wykres leży nad styczną l_b , zatem $f(x_1) \geq 0$. Jeżeli $f(x_1) = 0$, to $x_1 = \alpha$ jest szukanym rozwiązaniem równania (50). Zakładając, że

$$f(x_1) > 0$$

mamy

$$a < \alpha < x_1 < b$$

i możemy powtórzyć opisaną konstrukcję zastępując punkt b przez punkt x_1 . Styczna l_{x_1} w punkcie $(x_1, f(x_1))$ przecina oś x -ów w punkcie

$$(55) \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

przy czym z założenia wypukłości funkcji f wynika, że $f(x_2) \geq 0$, a stąd i z (55) mamy

$$a < \alpha \leq x_2 < x_1 < b.$$

Kontynuując opisaną postępowanie otrzymujemy ciąg punktów określony wzorem rekurencyjnym

$$(56) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

przy czym

$$(57) \quad a < \alpha \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 < b.$$

Podobnie jak w metodzie siecznych, jeżeli dla pewnego n_0 mamy $f(x_{n_0}) = 0$, to $x_{n_0} = \alpha$ jest szukanym rozwiązaniem i ze wzoru (56) wynika, że wówczas $x_n = \alpha$ dla wszystkich $n \geq n_0$. Wówczas po skończonej ilości n_0 kroków dostajemy rozwiązanie dokładne równania (50). Jeżeli taka sytuacja nie zachodzi, to z (57) wynika, że ciąg nieskończony $\{x_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony a więc zbieżny zgodnie z twierdzeniem 5 rozdz. II §2. Oznaczmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g.$$

Przechodząc do granicy w (56) i korzystając z ciągłości funkcji f i jej pochodnej dostajemy

$$\frac{f(g)}{f'(g)} = 0$$

skąd wynika, że $f(g) = 0$. Zatem

$$g = \alpha$$

jest szukanym rozwiązaniem równania (50), a wyrazy ciągu (56) dają jego przybliżenie (z nadmiarem).

Aby oszacować błąd podanej metody założymy dodatkowo, że

(v) $f \in C^2([a, b])$, wówczas, zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (twierdzenie 12 §3), druga pochodna f'' jest ograniczona w przedziale $[a, b]$. Zakładając, że $x_n \neq \alpha$ i stosując wzór Taylora do przedziału $[\alpha, x_n]$ dostajemy

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(c)(\alpha - x_n)^2$$

gdzie $c \in (\alpha, x_n)$, a stąd

$$(58) \quad -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha - x_n + \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (\alpha - x_n)^2.$$

Ze wzoru rekurencyjnego (56) wynika

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

co po wykorzystaniu (58) daje

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c)}{f'(x_n)}.$$

Oznaczając

$$M = \sup_{[a,b]} f''(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f'(x)$$

dostajemy oszacowanie błędu w postaci

$$(59) \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} (x_n - \alpha)^2 \frac{M}{m}.$$

Z otrzymanego oszacowania widać, że w metodzie Newtona błąd $(n+1)$ -ego przybliżenia jest proporcjonalny do kwadratu błędu n -tego przybliżenia, co zapewnia szybką zbieżność metody.

Przykład 17. Rozważmy równanie

$$x^2 = a \quad (a > 1).$$

Jak wiemy (rozdz.I §2 punkt 7), ma ono w zbiorze liczb dodatnich dokładnie jedno rozwiązanie \sqrt{a} , którego przybliżoną wartość możemy obliczyć stosując metody opisane w punktach 8, 9 do funkcji

$$f(x) = x^2 - a$$

w przedziale $[1, a]$. Mamy

$$f(1) = 1 - a < 0 < f(a) = a^2 - a$$

oraz

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2,$$

zatem założenia (i) - (v) są spełnione. Stosując *metodę siecznych* otrzymujemy ze wzoru (51)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(a - x_n)(x_n^2 - a)}{a^2 - x_n^2},$$

co po prostych przekształceniach daje

$$x_{n+1} = a \frac{x_n + 1}{x_n + a}.$$

Wobec tego błąd przybliżenia x_{n+1} wynosi

$$0 < \alpha_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1} = c_n (\sqrt{a} - x_n),$$

gdzie

$$c_n = \frac{a - \sqrt{a}}{x_n + a}.$$

Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do $\sqrt{a} \in (1, a)$, mamy $x_n > 1$ dla dużych n i stąd

$$0 < c_n < \frac{a - \sqrt{a}}{1 + a},$$

co daje

$$0 < \alpha_{n+1} < c \alpha_n,$$

gdzie

$$0 < c = \frac{a - \sqrt{a}}{1 + a} < 1,$$

zaś α_n oznacza błąd przybliżenia x_n .

Przechodząc do *metody Newtona* dostajemy z (56)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n},$$

czyli po przekształceniu prawej strony

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}.$$

Oznaczając przez β_n błąd przybliżenia x_n w metodzie Newtona otrzymujemy

$$0 < \beta_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n},$$

co daje dla dużych n

$$0 < \beta_{n+1} < \frac{1}{2} \beta_n^2$$

(por. wzór (59)). Z otrzymanych oszacowań widać, że dla dużych n ciąg $\{\alpha_n\}$ zachowuje się jak ciąg geometryczny o ilorazie $c \in (0, 1)$, natomiast w ciągu $\{\beta_n\}$ każdy następny wyraz jest mniejszy od kwadratu poprzedniego. Oznacza to, że stosując metodę Newtona, przy

przejściu od x_n do x_{n+1} otrzymujemy, dla dostatecznie dużych n , conajmniej podwojoną liczbę dokładnych miejsc po przecinku.

10*. Funkcje wypukłe. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że *funkcja f jest wypukła w przedziale \mathbb{P}* , jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$ i dowolnych liczb nieujemnych λ_1, λ_2 spełniających warunek

$$(60) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

zachodzi nierówność

$$(61) \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Zauważmy, że przyjmując $x_1 \leq x_2$ oraz $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ mamy wobec (60)

$$x = \lambda_1(x_1 - x_2) + x_2 \leq x_2$$

oraz

$$x = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) \geq x_1$$

zatem $x \in [x_1, x_2]$, a więc również $x \in \mathbb{P}$ i lewa strona nierówności (61) jest dobrze określona.

Od funkcji f nie żądamy żadnej regularności, może ona nie być różniczkowalna, wystarczy jedynie, by była określona w pewnym przedziale. W dalszym ciągu zobaczymy, że w klasie funkcji dwukrotnie różniczkowalnych rozważana obecnie definicja funkcji wypukłej jest równoważna tej, którą podaliśmy w punkcie 3.

Twierdzenie 6. *Funkcja f jest wypukła w przedziale \mathbb{P} wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego przedziału $[a, b] \subset \mathbb{P}$ (gdzie $a < b$) zachodzi nierówność*

$$(62) \quad f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

dla $x \in [a, b]$.

DOWÓD. Połóżmy dla ustalonego $x \in [a, b]$

$$\lambda_1 = \frac{b-x}{b-a}, \quad \lambda_2 = \frac{x-a}{b-a}.$$

Obie liczby λ_1, λ_2 są nieujemne i spełniają warunek (60). Zakładając, że f jest wypukła i przyjmując $x_1 = a, x_2 = b$ stwierdzamy, że

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \frac{b-x}{b-a} a + \frac{x-a}{b-a} b = x$$

i wobec tego nierówność (62) wynika z (61).

Założmy teraz, że f spełnia warunek podany w twierdzeniu. Udowodnimy, że f jest wypukła w \mathbb{P} .

Dla $x_1 = x_2$ nierówność (61) jest oczywista (przyjmuje ona wtedy postać równości $f(x_1) = f(x_1)$.) Założmy wobec tego, że liczby x_1, x_2 są różne i niech będzie $x_1 < x_2$. Dla dowolnie obranych liczb nieujemnych λ_1, λ_2 spełniających (60) połączmy

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

Jak już stwierdziliśmy na początku tego punktu, z warunku (60) wynika, że $x \in [x_1, x_2]$. Ponadto mamy, ponownie wykorzystując (60),

$$x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2 = \lambda_1 (x_1 - x_2) + x_2$$

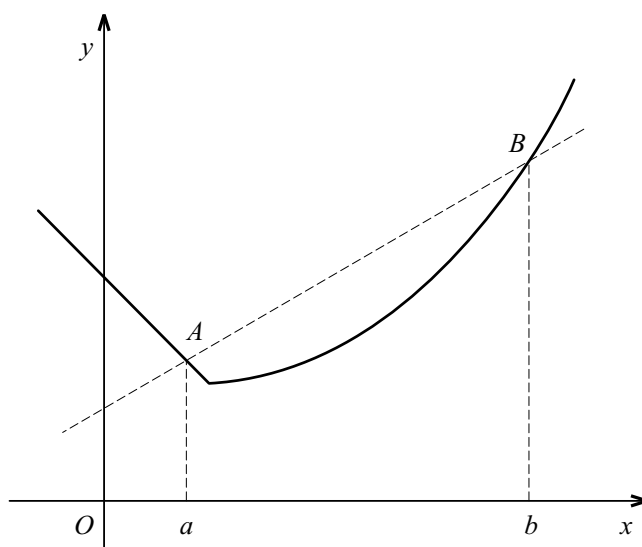
skąd

$$\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

a zatem

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Możemy teraz zastosować nierówność (62) przyjmując $a = x_1, b = x_2$, co daje (61). \square



[rys. 51]

Udowodnione twierdzenie ma prostą interpretację geometryczną. Równanie

$$y(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

określa prostą wyznaczoną przez punkty $A = (a, f(a))$ oraz $B = (b, f(b))$, zwaną *sieczną wykresu funkcji f* . Zbiór punktów $(x, y(x))$, gdzie $x \in [a, b]$ jest odcinkiem AB który nazywamy *cięciwą wykresu* (por. punkt 3). Zatem twierdzenie 6 można sformułować następująco (por. rys. 51)

Twierdzenie 6'. Funkcja f jest wypukła w przedziale \mathbb{P} wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres leży pod każdą cięciwą wyznaczoną przez punkty $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, gdzie $a, b \in \mathbb{P}$, $a < b$.

Przykład 18. Sprawdźmy, że funkcja

$$f(x) = |x|$$

jest wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (-\infty, \infty)$. Jeżeli liczby a, b są tego samego znaku, to cięciwa AB pokrywa się z częścią wykresu dla $x \in [a, b]$, zatem w nierówności (62) mamy znak równości. Załóżmy wobec tego, że

$$a < 0 < b.$$

Równanie siecznej ma postać

$$y(x) = (-a) \frac{b-x}{b-a} + b \frac{x-a}{b-a}$$

zatem

$$(63) \quad y(x) - |x| = \begin{cases} \frac{2a(x-b)}{b-a} & \text{dla } 0 \leq x \leq b, \\ \frac{2b(x-a)}{b-a} & \text{dla } a \leq x < 0. \end{cases}$$

Ponieważ obie liczby po prawej stronie (63) są nieujemne, nierówność (62) jest spełniona dla $x \in [a, b]$. Zgodnie z twierdzeniem 6 funkcja f jest wypukła. Warunek geometryczny sformułowany w twierdzeniu 6' wynika natychmiast z rysunku (rys. 22).

Twierdzenie 7. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale \mathbb{P} . Następujące warunki są równoważne:

- (i) f jest wypukła;
- (ii) f' jest funkcją rosnącą;
- (iii) dla dowolnych $x_0, x \in \mathbb{P}$ zachodzi nierówność

$$(64) \quad f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód według schematu

$$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii).$$

$$(ii) \Rightarrow (iii).$$

Wprowadźmy funkcję

$$g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \quad (x \in \mathbb{P}).$$

Funkcja g jest różniczkowalna w \mathbb{P} i przy tym

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Z założenia

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } x > x_0, \\ = 0 & \text{dla } x = x_0, \\ < 0 & \text{dla } x < x_0, \end{cases}$$

wobec tego funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość w przedziale \mathbb{P} w punkcie x_0 . Ponieważ

$$g(x_0) = 0,$$

mamy

$$g(x) \geq 0$$

dla $x \in \mathbb{P}$, co jest równoważne z nierównością (64).

(iii) \Rightarrow (i).

Najpierw udowodnimy lemat dotyczący funkcji liniowych (jest on oczywisty geometrycznie - proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku).

Lemat 1. *Jeżeli $y(x)$, $z(x)$ są funkcjami liniowymi oraz dla pewnych a, b ($a < b$) zachodzą nierówności*

$$(65) \quad y(a) \geq z(a), \quad y(b) \geq z(b),$$

to

$$(66) \quad y(x) \geq z(x)$$

dla dowolnego $x \in (a, b)$.

DOWÓD LEMATU. Każdy punkt $x \in (a, b)$ można przedstawić w postaci

$$x = ta + (1 - t)b,$$

gdzie $0 < t < 1$ (wystarczy w tym celu przyjąć $t = \frac{b-x}{b-a}$). Niech

$$y(x) = Ax + B, \quad z(x) = Cx + D,$$

wówczas

$$y(x) = t(Aa + B) + (1 - t)(Ab + B)$$

oraz

$$z(x) = t(Ca + D) + (1 - t)(Cb + D)$$

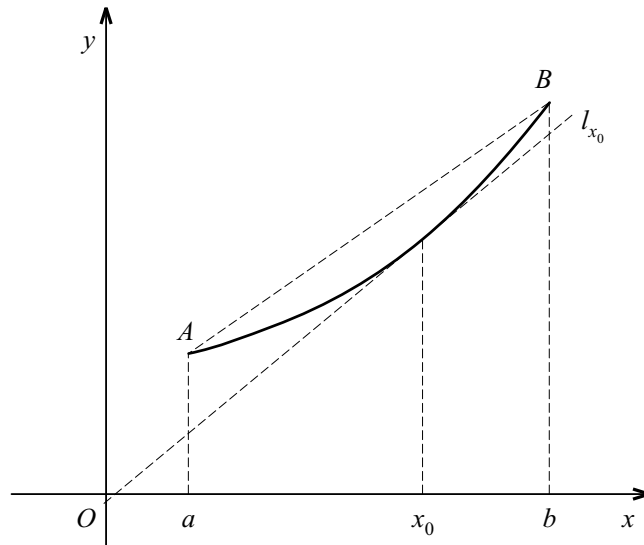
co można inaczej zapisać jako

$$(67) \quad y(x) = ty(a) + (1 - t)y(b)$$

oraz

$$(68) \quad z(x) = tz(a) + (1 - t)z(b).$$

Ponieważ liczby t , $1 - t$ są dodatnie, z (67), (68) i nierówności (65) wynika (66), co kończy dowód lematu.



[rys. 52]

Kontynuując dowód twierdzenia obierzmy dowolnie przedział $[a, b] \subset \mathbb{I}$ ($a < b$) oraz punkt $x_0 \in (a, b)$ i niech prosta l_{x_0} będzie styczną do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Założenie (iii) oznacza, że każdy punkt wykresu funkcji f leży nad prostą l_{x_0} - dotyczy to w szczególności punktów $A = (a, f(a))$ oraz $B = (b, f(b))$. Na mocy lematu 1 również każdy punkt cięciwy o końcach A, B leży nad prostą l_{x_0} , w szczególności punkt cięciwy o pierwszej współrzędnej x_0 leży nad punktem styczności $(x_0, f(x_0))$. Wobec dowolności $x_0 \in (a, b)$ oznacza to, że cała cięciwa o końcach A, B leży nad wykresem funkcji f w przedziale $[a, b]$. Przedział $[a, b] \subset \mathbb{I}$ był również obrany dowolnie, zatem zgodnie z twierdzeniem 6' funkcja f jest wypukła w przedziale \mathbb{I} . Przeprowadzone rozumowanie ilustruje rys. 52.

(i) \Rightarrow (ii).

Dowód zaczniemy od lematu.

Lemat 2. Dla $t_1 < t < t_2$ i dowolnych y, y_1, y_2 nierówności

$$(69) \quad y \leq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} y_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} y_2$$

oraz

$$(70) \quad \frac{y - y_1}{t - t_1} \leq \frac{y_2 - y}{t_2 - t}$$

są równoważne.

DOWÓD LEMATU. Po wykonaniu mnożenia w licznikach po prawej stronie (69) oraz pomnożeniu obu stron nierówności przez mianownik $t_2 - t_1$ dostajemy

$$yt_2 - y_1 t_2 + y_1 t \leq yt_1 - y_2 t_1 + y_2 t.$$

Odejmując od obu stron ostatniej nierówności wyrażenie yt otrzymujemy

$$(y - y_1)(t_2 - t) \leq (y_2 - y)(t - t_1)$$

skąd po podzieleniu przez dodatnie wyrażenie $(t_2 - t)(t - t_1)$ wynika (70). Jak łatwo zauważyć, przeprowadzony rachunek wykazuje, że i na odwrót z (70) wynika (69).

Wróćmy do dowodu twierdzenia. Wobec założonej wypukłości funkcji f i twierdzenia 6 nierówność (69) jest spełniona, jeżeli przyjmiemy

$$t_1 = a, \quad t = x, \quad t_2 = b, \quad y_1 = f(a), \quad y = f(x), \quad y_2 = f(b).$$

Zgodnie z lematem 2 zachodzi wobec tego nierówność

$$(71) \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

dla dowolnych $a, b, x \in \mathbb{P}$ takich, że $a < x < b$. Ustalmy teraz dwa punkty $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$ zakładając, że $x_1 < x_2$ i obierzmy $h > 0$ tak, by

$$x_1 + h < x_2 - h.$$

Z nierówności (71) dla

$$a = x_1, \quad x = x_1 + h, \quad b = x_2 - h$$

dostajemy

$$(72) \quad \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq \frac{f(x_2 - h) - f(x_1 + h)}{(x_2 - h) - (x_1 + h)}$$

zaś dla

$$a = x_1 + h, \quad x = x_2 - h, \quad b = x_2$$

mamy

$$(73) \quad \frac{f(x_2 - h) - f(x_1 + h)}{(x_2 - h) - (x_1 + h)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h}.$$

Z nierówności (72), (73) wynika, że

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq \frac{f(x_2 - h) - f(x_2)}{-h},$$

co po przejściu do granicy przy $h \rightarrow 0$ daje

$$f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

Ponieważ punkty x_1, x_2 były obrane dowolnie, ostatnia nierówność oznacza, że pochodna f' jest funkcją rosnącą, co kończy dowód twierdzenia. \square

Jak już wspominaliśmy, równanie

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

określa styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Wobec tego możemy podać następujące sformułowanie geometryczne punktów (i), (iii) twierdzenia 7.

Twierdzenie 7'. Funkcja f różniczkowalna w przedziale \mathbb{P} jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy jej wykres leży nad styczną poprowadzoną w dowolnym punkcie $(x_0, f(x_0))$, gdzie $x_0 \in \mathbb{P}$.

Jeżeli f jest dwukrotnie różniczkowalna w \mathbb{P} , to z punktów (i), (ii) twierdzenia 7 wynika natychmiast

Twierdzenie 8. Funkcja f dwukrotnie różniczkowalna w przedziale \mathbb{P} jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy $f''(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{P}$.

Zatem podana w tym punkcie ogólna definicja funkcji wypukłej jest w klasie funkcji dwukrotnie różniczkowalnych równoważna definicji podanej w punkcie 3.

Twierdzenie 9. Jeżeli funkcja f określona w przedziale \mathbb{P} jest wypukła, to dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{P}$ i dowolnych liczb nieujemnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ spełniających warunek

$$(74) \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$$

mamy $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in \mathbb{P}$ i zachodzi nierówność

$$(75) \quad f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Nierówność (75) nosi nazwę *nierówności Jensena*.

DOWÓD. Zastosujemy indukcję względem n . Dla $n = 1$ z warunku (74) wynika $\lambda_1 = 1$ i nierówność (75) przyjmuje postać równości $f(x_1) = f(x_1)$, zaś dla $n = 2$ twierdzenie zawiera się w definicji funkcji wypukłej. Zakładając teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n = k \geq 2$ udowodnimy, że jest ono prawdziwe dla $n = k + 1$. Rozważmy układ punktów $x_1, \dots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{P}$ i układ liczb nieujemnych $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ spełniających warunek

$$(76) \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1.$$

Należy udowodnić, że

$$(77) \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in \mathbb{P}$$

oraz że zachodzi nierówność

$$(78) \quad f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

Jeżeli $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, to wobec (76) musi być $\lambda_{k+1} = 1$ i nierówność (78) przyjmuje postać równości $f(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$. W przeciwnym razie

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k > 0$$

i przyjmując $\lambda'_j = \frac{\lambda_j}{\lambda}$ ($j = 1, \dots, k$) stwierdzamy, że liczby λ'_j spełniają warunek (74) z zastąpieniem n przez k . Na mocy założenia indukcyjnego mamy $\lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_k x_k \in \mathbb{P}$ przy czym zachodzi nierówność

$$(79) \quad f(\lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_k x_k) \leq \lambda'_1 f(x_1) + \dots + \lambda'_k f(x_k).$$

Z definicji liczby λ i warunku (76) wynika, że

$$\lambda + \lambda_{k+1} = 1,$$

zatem oznaczając

$$x = \lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_k x_k$$

stwierdzamy stosując nasze twierdzenie dla $n = 2$, że

$$(80) \quad \lambda x + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in \mathbb{P}$$

oraz że

$$(81) \quad f(\lambda x + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leq \lambda f(x) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

Ponieważ

$$\lambda \lambda'_j = \lambda_j \quad (j = 1, \dots, k)$$

oraz

$$\lambda x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k,$$

z warunku (80) wynika (77) zaś z nierówności (79), (81) dostajemy (78), co kończy dowód indukcyjny. \square

Przykład 19. Niech

$$f(x) = -\log x \quad (x > 0).$$

Ponieważ

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0,$$

zgodnie z twierdzeniem 8 funkcja f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Przyjmując w twierdzeniu 9

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

dostajemy

$$(82) \quad -\log \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \leq -\frac{1}{n}(\log x_1 + \cdots + \log x_n)$$

dla $x_1, \dots, x_n \in (0, \infty)$. Zmieniając znak po obu stronach nierówności (82) i przekształcając prawą stronę (82) otrzymujemy

$$\log \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \geq \log \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

skąd wynika

$$(83) \quad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

dla $x_1, \dots, x_n \geq 0$ (jeżeli niektóre liczby x_j są równe zero, nierówność jest oczywista). Nierówność (83) nosi nazwę *nierówności Cauchy'ego*.

Podstawiając w (83)

$$x_j = \frac{1}{y_j} \quad (y_j > 0; j = 1, \dots, n)$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{y_1} + \cdots + \frac{1}{y_n} \right)$$

skąd

$$(84) \quad \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{y_1} + \cdots + \frac{1}{y_n}}.$$

Dla dodatnich liczb x_1, \dots, x_n określamy ich średnie arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną następująco:

średnia arytmetyczna

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} (x_1 + \cdots + x_n),$$

średnia geometryczna

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

średnia harmoniczna

$$H(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Z nierówności (83), (84) wynika, że (por. zadanie 7 rozdz.I §1)

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n).$$

Na zakończenie przyjmijmy, że *funkcja f jest wklęsła w przedziale \mathbb{P}* jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła w tym przedziale (por. punkt 3). Wszystkie nierówności podane poprzednio dla funkcji wypukłych przenoszą się na funkcje wklęsłe z tym, że znak \leq należy zamienić na \geq i vice versa.

11*. Funkcje ściśle wypukłe. Mówimy, że funkcja f określona w przedziale \mathbb{P} jest *ściśle wypukła w \mathbb{P}* jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{P}$, ($x_1 \neq x_2$) i dowolnych liczb dodatnich λ_1, λ_2 spełniających warunek (60) zachodzi nierówność

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Oczywiście każda funkcja ściśle wypukła w przedziale \mathbb{P} jest wypukła w tym przedziale, ale nie na odwrót (por. zadanie 38). Twierdzenia udowodnione poprzednio dla funkcji wypukłych można łatwo zmodyfikować dla funkcji ściśle wypukłych.

Twierdzenie 10. Funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale \mathbb{P} wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego przedziału $[a, b] \subset \mathbb{P}$ (gdzie $a < b$) zachodzi nierówność

$$f(x) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

dla $x \in (a, b)$.

Twierdzenie 11. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale \mathbb{P} . Następujące warunki są równoważne:

- (i) f jest ściśle wypukła;
- (ii) f' jest funkcją ściśle rosnącą;
- (iii) dla dowolnych $x, x_0 \in \mathbb{P}$ ($x \neq x_0$) zachodzi nierówność

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Twierdzenie 12. Jeżeli funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale \mathbb{P} , to dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{P}$ nie wszystkich równych między sobą oraz dowolnych liczb dodatnich $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ spełniających warunek (74) zachodzi nierówność

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) < \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Dowody twierdzeń 10 - 12 przebiegają zupełnie podobnie do dowodów twierdzeń 6, 7, 9 i pozostawiamy je Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Zadania.

1. Udowodnić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

ma w punkcie $x = 0$ pochodne wszystkich rzędów równe zeru. Wskazówka. Najpierw udowodnić metodą indukcji, że

$$f^{(n)}(x) = w_n \left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{dla } x > 0,$$

gdzie w_n jest wielomianem (podać postać wielomianu w_n dla $n = 1, 2$). Przy badaniu kolejnych pochodnych w punkcie $x = 0$ wystarczy rozważać granicę prawostronną ilorazu różnicowego (dlaczego?). Przy obliczaniu tej granicy wykorzystać Przykład 33 §4.

2. Z badać przebieg funkcji f określonej w zadaniu 1 i naszkicować jej wykres.
3. Niech

$$f(x) = \arctg x \quad (x \in (-\infty, \infty)).$$

Znaleźć wzór rekurencyjny wyrażający $f^{(n)}(x)$ przy pomocy pochodnych tej funkcji niższych rzędów. Następnie obliczyć wartości wszystkich pochodnych funkcji f w punkcie $x = 0$.

Wskazówka. Zastosować wzór Leibniza do lewej strony tożsamości

$$(1 + x^2)f'(x) = 1.$$

4. Podać wzór na n -tą pochodną funkcji

$$\text{a.) } f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$\text{b.) } g(x) = \log x \quad (x > 0).$$

5. Posługując się wzorem Leibniza znaleźć n -tą pochodną funkcji f gdy

$$\text{a.) } f(x) = x \log x \quad (x > 0),$$

$$\text{b.) } f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0),$$

$$\text{c.) } f(x) = x^2 e^x.$$

6. Posługując się wzorem Leibniza znaleźć $f^{(3)}(x)$ oraz $g^{(7)}(x)$, jeżeli

$$f(x) = e^x \sin x, \quad g(x) = e^{2x} \cos x.$$

7. Udowodnić wzór Halphena

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

Wskazówka. Najpierw sprawdzić prawdziwość wzoru dla $n = 1, 2$, następnie zastosować indukcję względem n .

8. Udowodnić, że jeżeli funkcja n -krotnie różniczkowalna w przedziale \mathbb{P} znika w $n + 1$ różnych punktach, to istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{P}$ taki, że $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu Rolle'a (twierdzenie 10 §4) i zastosować indukcję względem n .

9. Zbadać, przy jakim naturalnym n funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w przedziale $(-\infty, \infty)$, gdy

$$\text{a.) } f(x) = x|x|,$$

$$\text{b.) } f(x) = |x^k| \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$\text{c.) } f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

$$(\alpha > 0).$$

10. Niech f będzie funkcją n -krotnie różniczkowalną w przedziale \mathbb{IP} i niech $a \in \mathbb{IP}$. Udowodnić, że dla dowolnego $x \in \mathbb{IP}$ istnieje $\Theta \in (0, 1)$ takie, że

$$(85) \quad f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

gdzie

$$(86) \quad R_n = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} (1-\Theta)^{n-1} f^{(n)}(\bar{x}), \quad \bar{x} = a + \Theta(x-a)$$

(zatem \bar{x} jest punktem leżącym między a , x).

Wskazówka. Zastępując x przez b ($b > a$) zastosować twierdzenie Lagrange'a (twierdzenie 11" §4, $b = a + h$) do funkcji g wprowadzonej w dowodzie twierdzenia 1. Następnie zauważyć, że w twierdzeniu Lagrange'a można założyć, że $b < a$ i rozważać przedział $[b, a]$.

Uwaga. Wzór (85) nosi nazwę *wzoru Taylora* z resztą R_n w postaci *Cauchy'ego* określoną wzorem (86).

11. Załóżmy, że

- (i) f jest $(n-1)$ -krotnie różniczkowalna w przedziale \mathbb{IP} ,
- (ii) istnieje $f^{(n)}(a)$, gdzie $a \in \mathbb{IP}$.

Udowodnić, że istnieje funkcja $\eta(x)$ taka, że

- (a) η jest $(n-1)$ -krotnie różniczkowalna w $\mathbb{IP} \setminus \{a\}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0$,
- (c) dla $x \in \mathbb{IP}$ zachodzi równość

$$(87) \quad f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

gdzie

$$(88) \quad R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} \eta(x).$$

Wskazówka. Określając dla $x \neq a$

$$\varphi(x) = \frac{n!}{(x-a)^n} \cdot \left(f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$$

wykazać najpierw stosując regułę de l'Hospitala, że

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

Uwaga. Wzór (87) nosi nazwę *wzoru Taylora z resztą w postaci Peano*⁴ określoną wzorem (88).

12. Zakładając, że

- (i) f jest różniczkowalna w otoczeniu $a \in \mathbb{R}$,
- (ii) istnieje $f''(a)$

udowodnić równość

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

Wskazówka. Zastosować wzory (87), (88) przyjmując $n = 2$, $x = a + h$ oraz $x = a - h$.

13. Uogólnić twierdzenie sformułowane w zadaniu 12 na przypadek, gdy

- (i) f jest $(n-1)$ -krotnie różniczkowalna w otoczeniu $a \in \mathbb{R}$,
- (ii) istnieje $f^{(n)}(a)$.

14. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P} = (A, \infty)$ i taką, że kresy górne

$$M_0 = \sup_{\mathbb{P}} |f|, \quad M_1 = \sup_{\mathbb{P}} |f'|, \quad M_2 = \sup_{\mathbb{P}} |f''|$$

są skończone. Udowodnić nierówność

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

Wskazówka. Zastosować wzór Taylora (8) przyjmując $n = 2$, $x = a + 2h$ ($a > A, h > 0$), następnie dobrać odpowiednio h .

15. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$ i taką, że

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,
- (ii) $f''(x)$ jest ograniczona w \mathbb{P} .

Udowodnić, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

Wskazówka. Wykorzystać zadanie 14.

16. Na przykładzie funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2 \quad (x > 0)$$

okazać, że twierdzenie sformułowane w zadaniu 15 nie jest prawdziwe, jeżeli opuścimy założenie (ii).

⁴Giuseppe Peano (1858 - 1932), matematyk włoski, zajmował się logiką matematyczną i podstawami matematyki, podał aksjomatykę liczb naturalnych.

17. Zbadać dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi uogólniona nierówność Bernoulliego (por. rozdz.I §1 punkt 7)

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad (x > -1).$$

Wskazówka. Zbadać wypukłość funkcji

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad (x > -1).$$

18. Pokazać, że nierówność

$$\operatorname{tg} x > x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

(por. (39) §1) wynika ze wzoru Taylora w postaci (20).

19. Udowodnić, że w każdym przedziale $\mathbb{I}_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, gdzie k jest liczbą całkowitą, leży dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji

$$p(x) = \operatorname{tg} x - x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Narysować wykres tej funkcji.

Wskazówka. Najpierw rozważać przedział \mathbb{I}_0 , następnie zauważyć, że

$$p(x + k\pi) = p(x) - k\pi.$$

20. Udowodnić, że w każdym przedziale $\mathbb{I}_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, gdzie k jest liczbą całkowitą różną od zera, leży dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji

$$h(x) = 2x - \operatorname{tg} x.$$

Narysować wykres tej funkcji.

Wskazówka. Najpierw rozważać przedział \mathbb{I}_0 , następnie zauważyć, że

$$h(x + k\pi) = h(x) + 2k\pi.$$

21. Zbadać ekstrema i naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin x \quad (x > 0).$$

Wskazówka. Najpierw zbadać zachowanie się funkcji w przedziale $(0, \frac{\pi}{2}]$. Następnie zauważyć, że w każdym przedziale $\mathbb{I}_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k = 1, 2, \dots$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{x^2} p(x),$$

gdzie

$$p(x) = \operatorname{tg}x - x$$

i wykorzystać zadanie 19.

22. Zbadać ekstrema i naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2 \quad (x > 0).$$

Wskazówka. Podstawiając $t = x^2$ zauważyć, że

$$f'(x) = \frac{\cos t}{t} h(t)$$

w każdym przedziale $Q_k = (\sqrt{k\pi - \frac{\pi}{2}}, \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}})$, $k = 1, 2, \dots$, gdzie

$$h(t) = 2t - \operatorname{tg}t.$$

Następnie wykorzystać zadanie 20, zaczynając od badania funkcji f w przedziale $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$.

23. Zbadać ekstrema i punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = \cos x.$$

24. Podać na wspólnym rysunku wykresy funkcji

$$f(x) = \log(1+x), \quad g(x) = \frac{x}{1+x}, \quad h(x) = x.$$

Porównać z nierównością (63) §4.

25. Znaleźć równania asymptot i narysować wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

26. Narysować wykresy funkcji

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= e^{-x^2}, & (6) \quad f(x) &= \frac{5-3x}{x^2-1}, \\ (2) \quad f(x) &= e^{-\frac{1}{x+1}}, & (7) \quad f(x) &= e^{px} - x \quad (p > 0), \\ (3) \quad f(x) &= \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x+1}, & (8) \quad f(x) &= \frac{1}{2} \log x - \frac{x^2}{2}, \\ (4) \quad f(x) &= \frac{x^3}{x^2+1}, & (9) \quad f(x) &= 5 - x - \frac{4}{x}, \\ (5) \quad f(x) &= x - \frac{2}{x} - 3 \log x. \end{aligned}$$

badając ich ekstrema, punkty przegięcia i asymptoty.

27. Zbadać ekstrema i punkty przegięcia oraz narysować wykresy funkcji

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } f(x) = x\sqrt{4-x^2}, & \text{b.) } f(x) = x(a-x)^2 \quad (a > 0), \\ \text{c.) } f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 1, & \text{d.) } f(x) = \sin x + \sin 2x. \end{array}$$

28. Zbadać ekstrema i punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = ax + \sin x$$

w zależności od parametru a . Naszkicować wykres.

29. Zbadać ekstrema, punkty przegięcia i asymptoty wykresu funkcji

$$f(x) = x^k e^{-x}$$

w zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$. Naszkicować wykres.

30. Zbadać ekstrema i asymptoty wykresu funkcji

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

Naszkicować wykres.

31*. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale \mathbb{I} i niech dla $a \in \mathbb{I}$

$$g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in \mathbb{I}, \quad x \neq a).$$

Udowodnić, że funkcja g_a jest rosnąca w $\mathbb{I} \setminus \{a\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wypukła w \mathbb{I} .

Wskazówka. Mamy udowodnić, że z nierówności $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{I} \setminus \{a\}$) wynika

$$(88) \quad g_a(x_1) \leq g_a(x_2).$$

Należy rozważyć przypadki

$$1^0 \quad a < x_1 < x_2, \quad 2^0 \quad x_1 < a < x_2, \quad 3^0 \quad x_1 < x_2 < a.$$

W przypadku 1^0 i 3^0 opierając się na twierdzeniu 6 zauważyć, że nierówność (88) jest równoważna wypukłości funkcji f w przedziale \mathbb{I} . W przypadku 2^0 zakładając wypukłość funkcji f udowodnić (88) w oparciu o twierdzenie 6 i lemat 2.

32*. Niech f będzie funkcją wypukłą w przedziale \mathbb{I} i niech x_0 będzie punktem wewnętrznym tego przedziału. Udowodnić, że f ma w punkcie x_0 skończone pochodne lewostronną $f'_-(x_0)$ i prawostronną $f'_+(x_0)$, przy czym zachodzi nierówność

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 6 i lemacie 2 udowodnić nierówność

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

dla $x < x_0 < y$ ($x, y \in \mathbb{I}$). Następnie skorzystać z zadania 31 i oprzeć się na twierdzeniu o zbieżności monotonicznej (twierdzenie 11 §2).

33*. Udowodnić, że funkcja wypukła w przedziale \mathbb{I} jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału.

Wskazówka. Niech x_0 będzie punktem wewnętrznym przedziału \mathbb{I} . Opierając się na zadaniu 32 zauważyć, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Następnie skorzystać z twierdzenia 10 §2.

34*. Udowodnić, że funkcja wypukła w przedziale \mathbb{I} nie będąca stałą nie może osiągać swego kresu górnego w żadnym punkcie wewnętrznym tego przedziału.

Wskazówka. Niech

$$M = \sup_{\mathbb{I}} f < \infty$$

i niech x_0 będzie punktem wewnętrznym przedziału \mathbb{I} takim, że

$$M = f(x_0).$$

Wykazać, że istnieją punkty $a, b \in \mathbb{I}$ spełniające warunki

$$1^\circ \quad a < x_0 < b$$

$$2^\circ \quad \text{przynajmniej jedna z liczb } f(a), f(b) \text{ jest różna od } M.$$

Następnie opierając się na twierdzeniu 6 dojść do sprzeczności.

35*. Podać przykład funkcji wypukłej w przedziale $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}; a < b$) nieciągłej w punktach a, b . Porównać z zadaniem 33.

36*. W jakich przedziałach funkcja

$$\text{a.) } f(x) = \sin x, \quad \text{b.) } f(x) = \cos x$$

jest wypukła a w jakich wklęsła?

37*. Które z podanych niżej funkcji są wypukłe względnie wklęsłe w przedziale \mathbb{P} ?

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad f(x) &= x^2 - \frac{1}{x^2}, \quad \mathbb{P} = (-\infty, -\sqrt[4]{3}], \\
 \text{(ii)} \quad f(x) &= \begin{cases} |x| & \text{dla } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{dla } 1 < |x| \leq 2 \end{cases} \quad \mathbb{P} = [-2, 2] \\
 \text{(iii)} \quad f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } -3 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2} & \text{dla } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \mathbb{P} = [-3, 2] \\
 \text{(iv)} \quad f(x) &= \begin{cases} 4 & \text{dla } x = -1, \\ 2x^2 & \text{dla } -1 < x < 2, \\ 9 & \text{dla } x = 2 \end{cases} \quad \mathbb{P} = [-1, 2] \\
 \text{(v)} \quad f(x) &= \begin{cases} -2x & \text{dla } -1 < x < 0, \\ x & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases} \quad \mathbb{P} = (-1, 1] \\
 \text{(vi)} \quad f(x) &= \begin{cases} x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ 2x & \text{dla } 0 < x < 2 \end{cases} \quad \mathbb{P} = (-1, 2)
 \end{aligned}$$

Wskazówka. W punktach (ii) - (vi) narysować wykres funkcji f .

38*. Sprawdzić, że funkcja liniowa

$$f(x) = ax + b$$

jest wypukła, ale nie jest ściśle wypukła w przedziale $(-\infty, \infty)$.

39*. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale \mathbb{P} . Udowodnić, że jeżeli

$$f''(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{P},$$

to f jest ściśle wypukła w \mathbb{P} . Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

Wskazówka. Zastosować twierdzenie 11.

40*. Udowodnić, że znak równości w nierówności (83) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie liczby x_1, \dots, x_n są równe. Wynioskować stąd, że

$$H(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n)$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 11 stwierdzić, że funkcja

$$f(x) = -\log x \quad (x > 0)$$

jest ściśle wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Następnie zastosować twierdzenie 12 i rozmawiać podobnie jak w Przykładzie 19.

41. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunek

$$f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad a < x < b.$$

Udowodnić, że wówczas

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

dla $a < x < b$. Jaki jest sens geometryczny tej nierówności?

Wskazówka. Dowód jest podobny do dowodu nierówności (16) punkt 3.

42*. Niech f będzie funkcją ściśle rosnącą i dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunki

$$f(a) < 0 < f(b), \quad f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad a < x < b$$

i niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem przybliżeń pierwiastka α równania

$$f(x) = 0$$

otrzymanym metodą siecznych (wzór (51)). Udowodnić, że

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \alpha < b$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 41.

43. Zakładając, że funkcja f spełnia założenia podane w zadaniu 41 udowodnić nierówność

$$f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

dla $x, x_0 \in [a, b]$, $x \neq x_0$ i podać jej sens geometryczny.

Wskazówka. Skorzystać ze wzoru Taylora przy $n = 2$.

44*. Niech f będzie funkcją ściśle rosnącą i dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunki

$$f(a) < 0 < f(b); \quad f''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad a < x < b; \quad f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b.$$

i niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem przybliżeń pierwiastka α równania

$$f(x) = 0$$

otrzymanym metodą stycznych (wzór (56)). Udowodnić, że

$$a < \alpha < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < b$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wskazówka. Skorzystać z zadania 43.

45*. Niech f będzie funkcją ściśle rosnącą, dwukrotnie różniczkowalną i wklęsłą w przedziale $[a, b]$ przyjmującą na jego końcach wartości różnych znaków. Skonstruować ciąg przybliżeń $\{x_n\}$ pierwiastka α równania

$$f(x) = 0$$

a.) metodą siecznych,

b.) metodą stycznych, zakładając dodatkowo, że $f'(x) \neq 0$ w przedziale $[a, b]$.

Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha.$$

Co można powiedzieć o ciągu $\{x_n\}$, jeżeli wzmocnimy założenia przyjmując, że

$$f''(x) < 0 \quad \text{dla} \quad a < x < b?$$

Wskazówka. Przeprowadzić rozumowanie podobne jak w punktach 8,9 oraz w zadaniach 42, 44.

46*. Udowodnić, że równanie

$$x^3 + 3x - 2 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$. Znaleźć jego przybliżenia stosując

a.) metodę siecznych,

b.) metodę Newtona.

47*. Udowodnić, że równanie

$$e^x + \sin x = 0$$

(i) ma dokładnie jedno rozwiązanie w każdym przedziale (a_k, c_k) oraz (c_k, b_k) , gdzie

$$a_k = -(2k + 1)\pi, \quad c_k = -(2k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad b_k = -2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

(ii) nie ma innych rozwiązań poza wymienionymi w punkcie (i).

Znaleźć przybliżenia rozwiązania leżącego w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ stosując

a.) metodę siecznych,

b.) metodę Newtona.

Wskazówka. Oznaczając przez $f(x)$ lewą stronę równania zbadać przebieg funkcji f w przedziale $[a_k, b_k]$.

48*. Wyznaczyć przybliżoną wartość liczby e stosując

- a.) metodę siecznych,
 - b.) metodę Newtona
- do równania

$$\log x = 1$$

w przedziale $[1, 4]$. Oszacować błąd otrzymanych przybliżeń.
Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 45.

49*. Wyznaczyć przybliżoną wartość wyrażeń

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{5}, \quad \sqrt[4]{7}$$

stosując do odpowiednio dobranego równania

- a.) metodę siecznych,
 - b.) metodę Newtona.
- Oszacować błąd otrzymanych przybliżeń.

Szeregi liczbowe.

§1. Podstawowe własności szeregów.

♡ ♡ ♡

1. Szereg nieskończony i jego suma. Z aksjomatów określających zbiór \mathbb{R} (rozd. I §1) wynika, że dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych a_1, a_2 określona jest ich suma $a_1 + a_2$. Przypuśćmy teraz, że mamy dodać do siebie n_0 liczb rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_{n_0} . Możemy to zrobić przy pomocy skończonej liczby kroków tworząc następujące sumy:

$$\text{krok (1): } S_2 = a_1 + a_2 = \sum_{n=1}^2 a_n,$$

$$\text{krok (2): } S_3 = S_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{n=1}^3 a_n$$

(zgodnie z aksjomelem łączności (2a) wynik dodawania nie zależy od sposobu w jaki pogrupowaliśmy składniki, możemy więc opuścić nawiasy),

$$\text{krok (3): } S_4 = S_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{n=1}^4 a_n,$$

.....

$$\begin{aligned} \text{krok } (n_0 - 1): \quad S_{n_0} &= S_{n_0-1} + a_{n_0} = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0} a_n. \end{aligned}$$

Ostateczny, szukany przez nas wynik dodawania przedstawia ostatnia suma S_{n_0} .

Powstaje pytanie, czy można opisaną postępowanie przenieść na przypadek, gdy chcemy dodać nieskończenie wiele liczb tworzących ciąg $\{a_n\}$ to znaczy utworzyć sumę

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Sumy

$$(2) \quad S_k = a_1 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n \quad (k = 2, 3, \dots)$$

tworzą teraz ciąg nieskończony. Oczywiście nie ma w tym ciągu wyrazu ostatniego, możemy jednak badać, czy ma on skończoną granicę. W przypadku zbieżności przyjmując

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S \in \mathbb{R}$$

umówimy się, że liczba S stanowi wynik naszego nieskończonego dodawania czyli, że

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Wyrażenie (1) nazywamy *szeregiem nieskończonym o wyrazie ogólnym a_n* , suma S_k określona wzorem (2) jest *k -tą sumą częściową szeregu (1)* - dla wygody przyjmiemy dodatkowo

$$(2') \quad S_1 = a_1.$$

Jeżeli istnieje granica (3), to mówimy, że szereg (1) jest *zbieżny*. Wzór (3) określa *sumę szeregu zbieżnego*. Jeżeli granica (3) nie istnieje - co oznacza, że ciąg $\{S_k\}$ nie ma granicy lub ma granicę niewłaściwą, to mówimy, że szereg jest *rozbieżny*. Jeżeli w szczególności

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty \quad (\text{lub} \quad -\infty),$$

to mówimy że szereg (1) jest rozbieżny do ∞ (lub do $-\infty$).

Uwaga. Czasami wygodnie jest określić wyraz a_0 i rozważać ciąg sum częściowych w postaci

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_1 &= a_0 + a_1, \\ &\dots\dots\dots \\ S_k &= a_0 + a_1 + \cdots + a_k. \end{aligned}$$

Zakładając, że istnieje granica (3) przyjmujemy wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Przykład 1. Niech

$$a_n = q^n \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

wówczas

$$S_k = 1 + q + \cdots + q^k.$$

Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + \dots + q^n + \dots$$

nazywamy *szeregiem geometrycznym o ilorazie q* . Zbadamy jego zbieżność.

Dla $q \neq 1$ mamy

$$(5) \quad S_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

- słuszność wzoru (5) sprawdzamy łatwo mnożąc obie strony przez mianownik $1 - q$.

(i) Jeżeli $|q| < 1$, to (por. Przykład 4 rozdz.II §1)

$$(6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$$

zatem z (5) wynika

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{1}{1 - q}.$$

Szereg geometryczny jest w tym przypadku zbieżny i zachodzi równość

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad (|q| < 1).$$

(ii) Jeżeli $q > 1$, to

$$0 < p = \frac{1}{q} < 1,$$

zatem zgodnie z (6)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^k = 0,$$

a stąd

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = \infty$$

i wobec (5)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty.$$

W tym przypadku szereg geometryczny jest rozbieżny.

(iii) Jeżeli $q < -1$, to rozumując podobnie jak w punkcie (ii) stwierdzamy, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^{2k} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} q^{2k+1} = -\infty$$

i wobec tego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = -\infty.$$

Ciąg $\{S_k\}$ nie ma granicy (nawet niewłaściwej), gdyż zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Zatem szereg geometryczny jest i w tym przypadku rozbieżny.

(iv) Jeżeli $q = 1$, to

$$S_k = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(k+1) \text{ razy}} = k + 1$$

a więc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty.$$

Gdy $q = -1$, to jak łatwo sprawdzić

$$S_{2k} = 1, \quad S_{2k+1} = 0$$

zatem granica (3) nie istnieje, bo ciąg $\{S_k\}$ ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic. W obu przypadkach szereg geometryczny jest rozbieżny.

Przykład 2. Zbadamy zbieżność szeregu

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

więc

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

skąd po redukcji

$$S_k = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Wobec tego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 1,$$

zatem szereg (8) jest zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2. Niektóre działania na szeregach. Przypuśćmy, że mamy dane dwa szeregi

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\beta) \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Oznaczając k -tą sumę szeregu (α) , (β) odpowiednio przez S_k , T_k mamy

$$S_k = B + T_k \quad (B = b_1 + b_2 + \cdots + b_p).$$

Z twierdzenia o granicy sumy ciągów wynika, że ciąg $\{S_k\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy, zbieżny jest ciąg $\{T_k\}$. Zachodzi zatem

Twierdzenie 1. *Dopisanie do szeregu lub skreślenie w szeregu skończonej ilości wyrazów nie wpływa na jego zbieżność.*

Równie łatwo można udowodnić

Twierdzenie 2. *Jeżeli szeregi*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są zbieżne, to zbieżny jest szereg

$$(\gamma) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Jeżeli oznaczymy przez A, B, C sumy szeregów $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ odpowiednio, to zachodzi równość

$$A + B = C$$

co można zapisać inaczej

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli szereg*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to zbieżny jest szereg

$$(\delta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$. Jeżeli sumy szeregów $(\alpha), (\delta)$ oznaczyć odpowiednio przez A, D to zachodzi równość

$$D = cA,$$

czyli w innym zapisie

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dowody obu twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi.

Założmy, że szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny. Z twierdzenia 1 wynika, że zbieżny jest również szereg nieskończony

$$r_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

przy dowolnie ustalonym $k \in \mathbb{N}$. Szereg ten nazywamy k -tą resztą szeregu (α) .

Twierdzenie 4. *Jeżeli szereg (α) jest zbieżny, to*

$$(9) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0.$$

DOWÓD. Oznaczając przez A sumę szeregu (α) i przez S_k jego k -tą sumę częściową mamy dla każdego k

$$A = S_{k-1} + r_k.$$

Ponieważ na mocy definicji sumy szeregu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = A$$

z twierdzenia o granicy różnicy ciągów dostajemy (9). □

Zakładając, że szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

jest zbieżny, utwórzmy nowy szereg

$$(\bar{\alpha}) \quad (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \cdots$$

i niech S_k będzie k -tą sumą częściową szeregu (α) . Ciąg sum częściowych szeregu $(\bar{\alpha})$ ma postać

$$S_2, S_4, \dots, S_{2n}, \dots$$

jest więc podciągiem ciągu $\{S_k\}$ i jako taki jest zbieżny do tej samej granicy, będącej sumą szeregu (α) . Podobne rozumowanie można przeprowadzić łącząc w nawiasy wyrazy szeregu (α) w dowolny inny sposób. Dochodzimy w ten sposób do twierdzenia

Twierdzenie 5. *W szeregu zbieżnym można łączyć wyrazy nawiasami nie zmieniając jego sumy.* □

Przykład 3. Szereg o wyrazie ogólnym

$$a_n = (-1)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

można zapisać w postaci

$$(\beta) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Oznaczając przez S_k jego k -tą sumę częściową mamy

$$S_{2k-1} = 1, \quad S_{2k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

skąd widać, że ciąg $\{S_k\}$ nie może być zbieżny gdyż zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Wobec tego szereg (β) jest rozbieżny. Natomiast łącząc w nawias po dwa kolejne jego wyrazy dostajemy szereg zbieżny

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$$

Twierdzenie 5 uogólnia zasadę łączności dodawania (aksjomat (2a) rozdz. I §1) na przypadek dodawania nieskończonego. Jak widać z przykładu 3 zasada ta jest słuszna jedynie w odniesieniu do szeregów zbieżnych.

3. Warunek Cauchy'ego. Z twierdzenia 6 rozdz. II §2 zastosowanego do ciągu sum częściowych $\{S_k\}$ wynika natychmiast

Twierdzenie 6. Szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, że dla $n > N$ i dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(10) \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

□

Wyrażenie

$$a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$$

nazywamy *odcinkiem szeregu* (α) . Warunek podany w twierdzeniu 6 nosi nazwę *warunku Cauchy'ego dla szeregów*. W sposób mniej precyzyjny można twierdzenie 6 sformułować następująco:

Twierdzenie 6'. Szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jego dostatecznie dalekie odcinki są bezwzględnie mniejsze od dowolnie obranej liczby dodatniej ε .

Przykład 4. Szereg *harmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny, mamy bowiem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

zatem warunek Cauchy'ego podany w twierdzeniu 6 nie jest spełniony przy $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Przykład 5. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest również rozbieżny, gdyż

$$S_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k},$$

a więc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty.$$

Z twierdzenia 6 łatwo wyprowadzić

Twierdzenie 7 (kryterium porównawcze zbieżności). *Jeżeli dla $n \geq n_0$ (gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$) zachodzi nierówność*

$$(11) \quad |a_n| \leq b_n$$

i szereg

$$(\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest zbieżny, to również szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny.

DOWÓD. Z twierdzenia 6 wynika, że szereg (β) spełnia warunek Cauchy'ego, co oznacza, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ i dowolnego $p \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(12) \quad b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon.$$

Ponieważ na mocy (11) dla $n \geq n_0$

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}$$

z nierówności (12) wynika, że również szereg (α) spełnia warunek Cauchy'ego, co zgodnie z twierdzeniem 6 zapewnia jego zbieżność. \square

Przykład 6. Okazaliśmy (Przykład 2), że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

jest zbieżny. Ponieważ dla $n \geq 2$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

jest również zbieżny na mocy twierdzenia 7.

Przykład 7. Przy dowolnie obranym x szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

jest zbieżny na mocy twierdzenia 7, gdyż

$$\left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2} < 1$ (por. Przykład 1).

Przykład 8. Zbadamy zbieżność szeregu

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sqrt[n]{3}}{3^n}.$$

Ponieważ (por. Przykład 13 rozdz.II §1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1,$$

istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{3} < 2,$$

wobec tego

$$(14) \quad \frac{2 \sqrt[n]{3}}{3^n} < \frac{4}{3^n}$$

dla $n \geq n_0$. Ponieważ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{3}$ (Przykład 1), na mocy twierdzenia 3 zbieżny jest również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$$

a stąd w oparciu o nierówność (14) i twierdzenie 7 wynika zbieżność szeregu (13).

Opierając się na twierdzeniu 6 dostajemy warunek konieczny zbieżności szeregu.

Twierdzenie 8. *Jeżeli szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

DOWÓD. Wystarczy przyjąć $p = 1$ w nierówności (10). □

Z Przykładu 4 widać, że warunek (15) jest jedynie warunkiem koniecznym ale nie dostatecznym zbieżności szeregu. Mamy bowiem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ale szereg harmoniczny jest rozbieżny.

4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej jako szereg. W praktycznych rachunkach mamy zazwyczaj do czynienia z liczbami zapisanymi w postaci rozwinięć dziesiętnych, które możemy inaczej przedstawić jako sumę potęg liczby 10 z odpowiednimi współczynnikami. Dla przykładu

$$(16) \quad 0,351 = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{1}{10^3},$$

$$(17) \quad 273 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0.$$

Oczywiście nie wszystkie liczby rzeczywiste mają skończone rozwinięcia dziesiętne. Na przykład zamieniając $\frac{1}{3}$ na ułamek dziesiętny otrzymujemy rozwinięcie nieskończone w którym wszystkie cyfry są równe 3, czyli

$$(18) \quad \frac{1}{3} = 0,333\dots$$

Nasuwa się myśl, by przez analogię ze wzorem (16) traktować prawą stronę (18) jako sumę szeregu nieskończonego postaci

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n},$$

powstają jednak pytania

a.) czy szereg (19) jest zbieżny (tylko wtedy nieskończone dodawanie ma sens liczbowy), oraz

b.) czy jego suma jest równa $\frac{1}{3}$?

Zauważmy, że szereg

$$(20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{10}$, jest zatem zbieżny (por. Przykład 1) i przy tym

$$(21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1}{9}.$$

Zgodnie z twierdzeniem szereg (19) jest również zbieżny i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź na oba pytania jest więc pozytywna. Ogólnie, oznaczając n -tą cyfrę ułamka dziesiętnego przez c_n przyjmujemy, że

$$(22) \quad 0, c_1 c_2 \dots c_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}$$

(w przypadku ułamka dziesiętnego skończonego mamy $c_n = 0$ począwszy od pewnego $n = n_0$). Ponieważ $0 \leq c_n \leq 9$, dla ogólnego wyrazu szeregu po prawej stronie (22) mamy oszacowanie

$$(23) \quad \left| \frac{c_n}{10^n} \right| \leq \frac{9}{10^n}.$$

Jak zauważyliśmy przed chwilą, szereg (20) jest zbieżny, wobec tego zgodnie z twierdzeniem 3 szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

również jest zbieżny. Na podstawie kryterium porównawczego (twierdzenie 6) z nierówności (23) wynika zbieżność szeregu po prawej stronie (22).

Zapis (22) można uogólnić na przypadek dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$. Zakładając, że $[x]$ ma rozwinięcie dziesiętne postaci

$$(24) \quad [x] = a_l a_{l-1} \dots a_0 = \sum_{j=0}^l a_j 10^j$$

(por. (17)) mamy

$$x = \sum_{j=0}^l a_j 10^j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}.$$

Przykład 9. Wiemy, że

$$1 = 1,000\dots$$

Okażemy, że również

$$(25) \quad 1 = 0,999\dots$$

Zadanie można rozwiązać dwoma sposobami.

(i) Oznaczając przez x prawą stronę (25) mamy zgodnie z przyjętą umową

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

a więc w oparciu o twierdzenie 3 i równość (21)

$$x = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

(ii) Zgodnie z wprowadzonym oznaczeniem mamy

$$x = 0,999\dots$$

a stąd

$$10x = 9,999\dots$$

czyli

$$10x = 9 + x$$

co po redukcji daje $x = 1$. □

Przykład 9 wskazuje, że pewne liczby mogą mieć dwa różne rozwinięcia dziesiętne.
♡ ♡ ♡

5*. Rozwinięcie liczby naturalnej przy dowolnej podstawie. Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną. Oprócz rozwinięcia dziesiętnego liczby m postaci (24) możemy rozważać rozwinięcie tej liczby przy dowolnej podstawie p ($p \in \mathbb{N}, p \geq 2$) postaci

$$(26) \quad m = \sum_{j=0}^k a_j p^j \quad (a_j \in 0, 1, \dots, p-1; a_k \neq 0).$$

Rozwinięcie to zapisujemy symbolicznie

$$m = a_k a_{k-1} \dots a_0 (p)$$

opuszczając indeks p w przypadku rozwinięcia dziesiętnego. Liczby a_0, a_1, \dots, a_k nazywamy *cyframi rozwinięcia* (26).

Twierdzenie 9. *Cyfry rozwinięcia (26) są określone jednoznacznie przez liczby m, p .*

DOWÓD. Niech

$$t_r = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^r} \quad (r \in \mathbb{N}).$$

Stosując znany wzór (por. (17) rozdz.II §2)

$$1 + q + \cdots + q^r = \frac{1 - q^{r+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

mamy podstawiając $q = \frac{1}{p}$

$$(27) \quad t_r < \frac{1}{1 - q} - 1 = \frac{1}{p - 1}.$$

Dzieląc obie strony (26) przez p^k dostajemy

$$(28) \quad \frac{m}{p^k} = a_k + s_k,$$

gdzie

$$0 \leq s_k = \sum_{j=0}^{k-1} a_j p^{j-k} \leq (p-1)t_k.$$

Na mocy (27)

$$0 \leq s_k < 1,$$

a zatem z (28) wynika

$$(29) \quad a_k = \left[\frac{m}{p^k} \right],$$

co oznacza, że pierwsza cyfra rozwinięcia a_k jest określona jednoznacznie wzorem (29). Przyjmując

$$(30) \quad m_k = m - a_k p^k$$

dostajemy z (26)

$$(31) \quad \frac{m_k}{p^{k-1}} = a_{k-1} + s_{k-1},$$

gdzie

$$0 \leq s_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-2} a_j p^{j-(k-1)} \leq (p-1)t_{k-1}$$

a stąd wobec (27)

$$0 \leq s_{k-1} < 1$$

a więc zgodnie z (31)

$$(32) \quad a_{k-1} = \left[\frac{m_k}{p^{k-1}} \right]$$

przy czym liczba m_k jest określona wzorem (30). Zatem druga cyfra rozwinięcia a_{k-1} jest również określona jednoznacznie wzorem (32). Kontynuując opisane rozumowanie dostajemy

$$(33) \quad a_{j-1} = \left[\frac{m_j}{p^{j-1}} \right] \quad (j = k+1, k, \dots, 1; \quad m = m_{k+1})$$

gdzie

$$(34) \quad m_j = m - (a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_j p^j),$$

przy czym cyfry rozwinięcia a_k, a_{k-1}, \dots, a_j zostały już poprzednio określone jednoznacznie przez liczby m, p . \square

Aby znaleźć rozwinięcie (26) danej liczby m zauważmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \infty,$$

istnieje wobec tego liczba $N \in \mathbb{N}$ taka, że dla $n \geq N$ zachodzi nierówność

$$m < p^n.$$

Oznaczając przez n_0 najmniejszą liczbę N o tej własności i przyjmując $n_0 = k + 1$ mamy

$$(35) \quad p^k \leq m < p^{k+1}$$

a stąd

$$1 \leq \frac{m}{p^k} < p.$$

Przyjmując

$$a_k = \left[\frac{m}{p^k} \right]$$

otrzymujemy pierwszą cyfrę rozwinięcia (26), przy czym liczba k jest wyznaczona jednoznacznie przez oszacowanie (35). Dalsze cyfry obliczamy stosując kolejno wzory (33), (34). Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie, że przy tak określonych liczbach a_0, a_1, \dots, a_k równość (26) jest spełniona.

Przykład 10. Niech

$$p = 2, \quad m = 23.$$

Kolejne potęgi liczby p wynoszą

$$2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32.$$

Ponieważ

$$16 < 23 < 32$$

mamy $k = 4$, zatem w rozwinięciu dwójkowym liczby 23 występuje 5 cyfr. Stosując opisane poprzednio postępowanie dostajemy

$$\begin{aligned} \text{(krok 1)} \quad & \frac{23}{16} = 1 + \frac{7}{16}, \quad 23 = 1 \cdot 2^4 + 7, \\ \text{(krok 2)} \quad & \frac{7}{8} = 0 + \frac{7}{8}, \quad 7 = 0 + 7, \quad 23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 7, \\ \text{(krok 3)} \quad & \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}, \quad 7 = 1 \cdot 2^2 + 3, \quad 23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 3, \\ \text{(krok 4)} \quad & \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \quad 3 = 1 \cdot 2 + 1, \end{aligned}$$

$$(35) \quad 23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1.$$

Równość (35) daje szukane rozwinięcie liczby 23 przy podstawie $p = 2$, które możemy zapisać inaczej

$$23 = 10111 (2)$$

Przykład 11. Niech

$$p = 5, \quad m = 72.$$

Kolejne potęgi liczby p wynoszą

$$5, \quad 5^2 = 25, \quad 5^3 = 125.$$

Ponieważ

$$25 < 72 < 125,$$

mamy $k = 2$, zatem w rozwinięciu występują 3 cyfry. Dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} \text{(krok 1)} \quad & \frac{72}{25} = 2 + \frac{22}{25}, \quad 72 = 2 \cdot 5^2 + 22, \\ \text{(krok 2)} \quad & \frac{22}{5} = 4 + \frac{2}{5}, \quad 22 = 4 \cdot 5 + 2, \end{aligned}$$

$$(36) \quad 72 = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2.$$

Równość (36) daje szukane rozwinięcie liczby 72 przy podstawie $p = 5$, w innym zapisie

$$72 = 242 (5).$$

6*. Rozwinięcie liczby rzeczywistej dodatniej przy dowolnej podstawie. Niech $\alpha > 0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Przez *rozwinięcie liczby α przy podstawie p* ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) rozumiemy przedstawienie jej w postaci sumy

$$(37) \quad \alpha = c_{-k}p^k + \cdots + c_{-1}p + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}$$

gdzie c_n ($n \in -k, \dots, -1, 0 \cup \mathbb{N}$) są liczbami całkowitymi spełniającymi warunek

$$(38) \quad 0 \leq c_n \leq p - 1.$$

Równość (37) zapisujemy symbolicznie

$$\alpha = c_{-k}c_{-k+1} \dots c_{-1}c_0, c_1c_2 \dots c_n \dots (p)$$

opuszczając indeks p w przypadku $p = 10$. Rozwinięcie (37) nazywamy *właściwym*, jeżeli

$$c_n < p - 1$$

dla nieskończenie wielu n ,

niewłaściwym, jeżeli zachodzi sytuacja przeciwna tzn. jeżeli istnieje takie n_0 , że

$$c_n = p - 1$$

dla $n \geq n_0$.

Twierdzenie 10. *Dowolna liczba rzeczywista $\alpha > 0$ ma jednoznacznie określone rozwinięcie właściwe (37), przy czym*

$$(39) \quad c_n = [p^n \alpha] - p[p^{n-1} \alpha] \quad (n \in \{-k, \dots, -1, 0\} \cup \mathbb{N}).$$

DOWÓD. Dowód zaczniemy od przypadku, gdy $\alpha \in (0, 1)$. W rozwinięciu (37) mogą wówczas występować jedynie ujemne potęgi podstawy p , inaczej mówiąc musi być

$$c_{-k} = c_{-k+1} = \cdots = c_{-1} = c_0 = 0.$$

Gdyby bowiem było $c_{-j} \neq 0$ dla pewnego $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, to z (37) wynikałoby

$$\alpha \geq c_{-j}p^j \geq 1$$

wbrew założeniu. Wobec tego szukane rozwinięcie liczby α ma postać

$$(37') \quad \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}.$$

Zauważmy, że zgodnie ze wzorem (7) dla $q = \frac{1}{p}$

$$(40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}$$

a stąd wynika natychmiast

Lemat 1. Dla dowolnych $0 \leq d_n \leq p - 1$ zachodzi nierówność

$$(41) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} \leq 1$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$(42) \quad d_n = p - 1 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

DOWÓD LEMATU. Załóżmy, że warunek (42) nie jest spełniony, istnieje zatem takie $k \in \mathbb{N}$, że

$$d_k < p - 1.$$

W oparciu o (40) dostajemy wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} &= \frac{d_k}{p^k} + \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} < \frac{p-1}{p^k} + \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} \frac{d_n}{p^n} \\ &\leq (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = 1 \end{aligned}$$

co oznacza, że w (41) mamy nierówność ostrą $<$. □

Udowodnimy jeszcze

Lemat 2. Załóżmy, że d_n ($n \in \mathbb{N}$) są liczbami całkowitymi spełniającymi warunek

$$0 \leq d_n \leq p - 1,$$

przy czym nierówność ostra

$$d_n < p - 1$$

spełniona jest dla nieskończenie wielu n . Wówczas oznaczając

$$(43) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{p^n}$$

mamy

$$(44) \quad d_n = [p^n x] - p[p^{n-1} x] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

DOWÓD LEMATU. Zbieżność szeregu po prawej stronie (43) została wykazana w dowodzie lematu 1. Dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$p^n x = p^{n-1} d_1 + p^{n-2} d_2 + \cdots + d_n + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_{n+r}}{p^r}.$$

W szeregu po prawej stronie nierówność

$$d_{n+r} < p - 1$$

zachodzi dla nieskończenie wielu r , zatem zgodnie z lematem 1 jego suma leży w przedziale $[0, 1)$. Wobec tego

$$(45) \quad [p^n x] = p^{n-1}d_1 + p^{n-2}d_2 + \cdots + d_n,$$

co po zamianie n na $n - 1$ daje

$$[p^{n-1}x] = p^{n-2}d_1 + p^{n-3}d_2 + \cdots + d_{n-1}$$

a z ostatnich dwóch równości wynika (44) dla $n \geq 2$. Dla $n = 1$ mamy z (45)

$$[px] = d_1$$

zaś

$$[x] = 0,$$

gdyż na mocy lematu 1 mamy $0 \leq x < 1$. Zatem wzór (44) jest prawdziwy również dla $n = 1$. \square

Z lematu 2 wynika, że jeżeli istnieje rozwinięcia właściwe (37') liczby α , to jego współczynniki c_n są określone jednoznacznie wzorami (39). Pozostaje do wykazania, że takie rozwinięcie istnieje. Zauważmy, że jeżeli liczby c_n są określone wzorami (39), to k -ta suma częściowa szeregu po prawej stronie (37') ma postać

$$S_k = \frac{[p\alpha]}{p} + \left(\frac{[p^2\alpha]}{p^2} - \frac{[p\alpha]}{p} \right) + \cdots + \left(\frac{[p^k\alpha]}{p^k} - \frac{[p^{k-1}\alpha]}{p^{k-1}} \right),$$

czyli po redukcji

$$S_k = \frac{[p^k\alpha]}{p^k}.$$

Ponieważ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$0 \leq x - [x] < 1,$$

więc

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Przyjmując $x = p^k \alpha$ dostajemy stąd

$$(46) \quad \alpha - \frac{1}{p^k} < S_k \leq \alpha,$$

przy czym

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p^k} = 0.$$

Z nierówności (46) wynika na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \alpha.$$

Okazaliśmy więc, że równość (37') jest prawdziwa, jeżeli liczby c_n są określone wzorem (39). Ponadto z tożsamości

$$[x] - m = [x - m] \quad (x \in \mathbb{R}, m \text{ całkowite})$$

wynika, że

$$(47) \quad c_n = [p^n \alpha - p[p^{n-1} \alpha]] = [p\beta]$$

gdzie

$$(48) \quad 0 \leq \beta = p^{n-1} \alpha - [p^{n-1} \alpha] < 1.$$

Z (47), (48) wynika, że liczby c_n są całkowite i spełniają warunek (38). Zatem (37') jest rozwinięciem liczby α przy podstawie p .

Pozostaje do wykazania, że jest to rozwinięcie właściwe. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieje zatem liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że

$$(49) \quad c_k < p - 1, \quad c_n = p - 1 \quad \text{dla} \quad n > k$$

a zatem rozwinięcie (37') ma postać

$$(50) \quad \alpha = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots + \frac{c_k}{p^k} + S_k$$

gdzie

$$S_k = (p - 1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{p^n}.$$

Z równości (40) dostajemy

$$S_k = \frac{p-1}{p^k} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^k},$$

równość (50) może być więc zapisana w postaci

$$(51) \quad \alpha = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots + \frac{c_{k-1}}{p^{k-1}} + \frac{\bar{c}_k}{p^k},$$

gdzie wobec (49)

$$0 \leq \bar{c}_k = c_k + 1 \leq p - 1.$$

Rozwinięcie (51) liczby α spełnia założenia lematu 2, zatem musi być

$$\bar{c}_k = [p^k \alpha] - p[p^{k-1} \alpha],$$

a to oznacza, że

$$\bar{c}_k = c_k + 1 = c_k,$$

co daje sprzeczność.

Dowód twierdzenia jest zakończony w przypadku $\alpha \in (0, 1)$. Jeżeli $\alpha \geq 1$, to podobnie jak w punkcie 5 okazujemy, że istnieje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla którego spełniona jest nierówność

$$(52) \quad p^k \leq \alpha < p^{k+1}.$$

Przyjmując

$$(53) \quad \beta = \frac{\alpha}{p^{k+1}}$$

wniosujemy z nierówności (52), że $\beta \in (0, 1)$, ma zatem rozwinięcie właściwe

$$(54) \quad \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n},$$

gdzie

$$(55) \quad b_n = [p^n \beta] - p[p^{n-1} \beta] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Z (53), (54) wynika

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^{n-k-1}},$$

co można inaczej zapisać (przyjmując $n - k - 1 = r$) jako

$$(56) \quad \alpha = b_1 p^k + b_2 p^{k-1} + \dots + b_k p + b_{k+1} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{b_{r+k+1}}{p^r}.$$

Zgodnie z (53), (55)

$$b_n = [p^{n-k-1} \alpha] - p[p^{n-k-2} \alpha] = c_r \quad (r \in \{-k, \dots, -1, 0\} \cup \mathbb{N})$$

gdzie liczby c_r są określone wzorami (39). Równość (56) zapisana w postaci

$$\alpha = c_{-k} p^k + \dots + c_{-1} p + c_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{p^r}$$

daje szukane rozwinięcie właściwe liczby α . Dowód twierdzenia jest zakończony. \square .

Uwaga. W punkcie 5 podaliśmy regułę rachunkową pozwalającą obliczyć współczynniki a_j w przedstawieniu (26) liczby naturalnej m . Zauważmy, że obliczając współczynniki c_n ze wzoru (39) dla $\alpha = m$ i korzystając z przedstawienia (26) dostajemy

$$c_j = \frac{a_k p^k + \dots + a_j p^j}{p^j} - p \frac{a_k p^k + \dots + a_{j+1} p^{j+1}}{p^{j+1}}$$

co po uproszczeniu drugiego ułamka i redukcji daje

$$c_{-j} = a_j \quad (j = 0, 1, \dots, k).$$

Ponadto

$$c_n = p^n m - p(p^{n-1} m) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zatem otrzymane w punkcie 5 rozwinięcie liczby m przy podstawie p jest jej rozwinięciem właściwym, o którym mowa w twierdzeniu 10. Jak widać rozwinięcie to jest skończone i nie zawiera potęg ujemnych podstawy p .

Przechodząc do rozwinięć niewłaściwych udowodnimy

Twierdzenie 11. *Liczba rzeczywista $\alpha > 0$ ma rozwinięcie niewłaściwe wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie właściwe jest skończone.*

DOWÓD. Jak już zauważyliśmy w dowodzie twierdzenia 10, do dowolnie ustalonej liczby $\alpha \geq 1$ można dobrać liczbę $\beta \in (0, 1)$ określoną wzorem (53) (gdzie k jest wyznaczone przez nierówność (52)), przy czym rozwinięcie właściwe (względnie niewłaściwe) liczby β daje po pomnożeniu przez p^{k+1} rozwinięcie liczby α o tej samej własności. Wobec tego dowód twierdzenia możemy ograniczyć do przypadku $\alpha \in (0, 1)$.

Załóżmy, że (37') jest rozwinięciem niewłaściwym i niech r będzie największą liczbą naturalną taką, że

$$c_r < p - 1$$

(liczba taka istnieje, gdyż w przeciwnym razie z (37'), (40) wynikałoby, że $\alpha = 1$). Mamy wówczas

$$\alpha = \frac{c_1}{p} + \dots + \frac{c_r}{p^r} + \frac{p-1}{p^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$$

a więc zgodnie z (40)

$$(57) \quad \alpha = \frac{c_1}{p} + \dots + \frac{c_{r-1}}{p^{r-1}} + \frac{c_r + 1}{p^r}.$$

Ponieważ $c_r + 1 < p$, równość (57) daje skończone rozwinięcie właściwe liczby α . Naodwrot, opierając się na wzorze (40) możemy skończone rozwinięcie właściwe

$$\alpha = \frac{c_1}{p} + \dots + \frac{c_s}{p^s} \quad (c_s \neq 0)$$

zapisać w postaci

$$(58) \quad \alpha = \frac{c_1}{p} + \dots + \frac{c_s - 1}{p^s} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n}.$$

Ponieważ $c_s - 1 \geq 0$, przedstawienie (58) daje rozwinięcie niewłaściwe liczby α . \square

Powstaje pytanie, jakie liczby dodatnie mają skończone rozwinięcie właściwe. Prosta odpowiedź daje

Twierdzenie 12. Liczba rzeczywista $\alpha > 0$ ma skończone rozwinięcie właściwe przy podstawie p wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(59) \quad \alpha = \frac{l}{p^r} \quad (l \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

DOWÓD. Jeżeli α ma skończone rozwinięcie właściwe w którym występują ujemne potęgi p , to po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika stwierdzamy, że α jest postaci (59) gdzie $r \in \mathbb{N}$. Jeżeli w rozwinięciu właściwym liczby α nie ma wyrazów z ujemnymi potęgami p , to jest ona liczbą naturalną, a więc równość (50) zachodzi przy $r = 0$.

Na odwrót, z (59) wynika, że $p^n \alpha \in \mathbb{N}$ dla $n \geq r$, zatem wzór (39) daje dla $n > r$

$$c_n = p^n \alpha - p(p^{n-1} \alpha) = 0.$$

□

Przykład 12. Niech

$$\alpha = \frac{125}{1000}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 12 liczba α ma przy podstawie $p = 10$ skończone rozwinięcie właściwe

$$(60) \quad \alpha = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0,125.$$

Zgodnie ze wzorem (40)

$$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{s=4}^{\infty} \frac{9}{10^s}$$

zatem z (60) otrzymujemy rozwinięcie niewłaściwe liczby α

$$\alpha = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{9}{10^s} = 0,124999 \dots$$

Przykład 13. Zgodnie z twierdzeniem 12 liczba

$$\alpha = \frac{5}{8}$$

ma przy podstawie $p = 2$ skończone rozwinięcie właściwe. Ze wzorów (39) dostajemy

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_n = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 4,$$

zatem rozwinięcie właściwe ma postać

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = 0,101 \quad (2).$$

Zgodnie ze wzorem (40)

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{s=4}^{\infty} \frac{1}{2^s}$$

a więc rozwinięcie niewłaściwe ma postać

$$\alpha = \frac{1}{2} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{1}{2^s} = 0,100111\dots (2).$$

Przykład 14. Zgodnie z twierdzeniem 12 liczba

$$\alpha = \frac{7}{25}$$

ma skończone rozwinięcie właściwe przy podstawie $p = 5$. Ze wzorów (39) mamy

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_n = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 3,$$

zatem

$$\alpha = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = 0,12 (5)$$

jest rozwinięciem właściwym. Zgodnie z (40)

$$\frac{1}{5^2} = \frac{1}{5^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n} = \sum_{s=3}^{\infty} \frac{4}{5^s}$$

zatem rozwinięcie niewłaściwe ma postać

$$\alpha = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{4}{5^s} = 0,1144\dots (5)$$

7*. Rozwinięcia liczb wymiernych. Zaczniemy od następującego prostego lematu.

Lemat 3 (algorytm dzielenia). Niech $p \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Dla dowolnych $l, m \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $a, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takie, że

$$(61) \quad \frac{l}{m} = \frac{a}{p} + \frac{r}{pm}, \quad 0 \leq r < m.$$

DOWÓD. Wystarczy przyjąć

$$(62) \quad a = \left[\frac{pl}{m} \right],$$

wówczas

$$\frac{pl}{m} = a + q,$$

gdzie

$$0 \leq q = \frac{pl - am}{m} < 1.$$

Oznaczając

$$r = pl - am$$

dostajemy (61). □

Uwaga. Jeżeli $l < m$, to z (62) wynika, że

$$0 \leq a \leq p - 1.$$

Liczbę r nazywamy *resztą z dzielenia $l : m$* przy podstawie p .

Przy pomocy algorytmu dzielenia możemy otrzymać rozwinięcie przy podstawie p dowolnej liczby wymiernej z przedziału $(0, 1)$. Niech

$$w = \frac{l}{m} \quad (l < m; \quad l, m \in \mathbb{N}).$$

Oznaczając $a = a_1$, $r = r_1$ dostajemy zgodnie z lematem 3

$$w = \frac{a_1}{p} + \frac{r_1}{pm}$$

gdzie $a_1 \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$, $0 \leq r_1 < m$. Stosując lemat 3 z zastąpieniem l przez r_1 dostajemy przyjmując $r = r_2$

$$\frac{r_1}{m} = \frac{a_2}{p} + \frac{r_2}{pm},$$

a stąd

$$w = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{r_2}{p^2m},$$

gdzie również $a_2 \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$, $0 \leq r_2 < m$. Opisane postępowanie możemy kontynuować przyjmując kolejno (zgodnie z lematem 3) dla $n = 1, 2, \dots$

$$(63) \quad \frac{r_n}{m} = \frac{a_{n+1}}{p} + \frac{r_{n+1}}{pm},$$

gdzie

$$(64) \quad a_{n+1} = \left[\frac{pr_n}{m} \right],$$

przy czym zachodzą nierówności

$$(65) \quad 0 \leq a_{n+1} \leq p - 1, \quad 0 \leq r_n, r_{n+1} < m.$$

Jeżeli $r_k = 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to stosując kolejno wzory (63), (64) dostajemy $a_n = r_n = 0$ dla $n > k$. Otrzymujemy wówczas przedstawienie liczby w postaci

$$w = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_k}{p^k}.$$

Jest to oczywiście rozwinięcie właściwe liczby w przy podstawie p , z twierdzenia 10 wynika więc, że $a_j = c_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$), gdzie liczby c_j są określone wzorem (39). Jeżeli przeciwnie, wszystkie reszty r_j są dodatnie, to dla dowolnie ustalonego $k \in \mathbb{N}$ mamy rozkład

$$(66) \quad w = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_k}{p^k} + \frac{r_k}{p^k m}.$$

Ponieważ

$$0 < \frac{r_k}{p^k m} < \frac{1}{p^k}$$

po przejściu do granicy w (66) przy $k \rightarrow \infty$ dostajemy rozwinięcie

$$(67) \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n},$$

gdzie współczynniki a_n są określone wzorami rekurencyjnymi (63), (64). Łatwo okazać, że (67) jest rozwinięciem właściwym. Przypuśćmy bowiem, że istnieje $q \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > q$ mamy $a_n = p - 1$. Wówczas (67) można zapisać w postaci

$$(68) \quad w = \sum_{n=1}^q \frac{a_n}{p^n} + S_q,$$

gdzie

$$S_q = (p - 1) \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{p^n},$$

a więc wobec (40)

$$(69) \quad S_q = \frac{1}{p^q}.$$

Porównując (68), (69) z (66) dla $k = q$ dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{r_q}{p^q m} = \frac{1}{p^q},$$

co oznacza, że

$$r_q = m$$

wbrew drugiemu z warunków (65). Ponieważ rozwinięcie (67) jest rozwinięciem właściwym, z twierdzenia 10 wynika

$$a_n = c_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Doszliliśmy w ten sposób do twierdzenia

Twierdzenie 13. *Jeżeli*

$$w = \frac{l}{m} \quad (l < m; \quad l, m \in \mathbb{N})$$

to współczynniki c_n rozwinięcia właściwego (37') mogą być wyznaczone ze wzorów rekurencyjnych

$$(70) \quad \begin{aligned} r_0 &= l, & \frac{r_n}{m} &= \frac{c_{n+1}}{p} + \frac{r_{n+1}}{pm} \\ c_{n+1} &= \left[\frac{pr_n}{m} \right] \\ & (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

przy czym $r_n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ dla każdego n .

□

Mówimy, że rozwinięcie właściwe (37) liczby rzeczywistej $\alpha > 0$ jest *okresowe*, jeżeli istnieją liczby $s \in \{-k, \dots, -1, 0\} \cup \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{N}$ takie, że $c_n = c_{n+t}$ dla $n \geq s$. Rozwinięcie to będziemy zapisywać w postaci

$$\alpha = c_{-k}c_{-k+1} \dots c_{-1}c_0, c_1 \dots c_{s-1} [c_s c_{s+1} \dots c_{s+t-1}] (p)$$

opuszczając wskaźnik p , gdy $p = 10$.

Twierdzenie 14. *Niech $p \geq 2$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Liczba rzeczywista $\alpha > 0$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy ma okresowe rozwinięcie właściwe przy podstawie p .*

DOWÓD. Jeżeli $\alpha \in \mathbb{N}$ to, jak wynika z dowodu twierdzenia 12, α ma skończone rozwinięcie właściwe w którym $c_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Takie rozwinięcie jest oczywiście okresowe.

Dowolną liczbę $\alpha > 0$ nie będącą liczbą naturalną można przedstawić w postaci

$$\alpha = [\alpha] + \beta \quad (0 < \beta < 1)$$

przy czym

1^o α jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy β jest liczbą wymierną,

2^o rozwinięcie właściwe liczby α jest okresowe wtedy i tylko wtedy, gdy rozwinięcie właściwe liczby β ma tę własność.

Wobec tego możemy przeprowadzić dowód twierdzenia zakładając, że $\alpha \in (0, 1)$ oraz że rozwinięcie właściwe liczby α jest nieskończone.

Założmy, że jest to rozwinięcie okresowe. Zgodnie z twierdzeniem 5 możemy w szeregu połączyć wyrazy nawiasami otrzymując

$$(71) \quad \alpha = \alpha_1 + \left(\frac{c_s}{p^s} + \frac{c_{s+1}}{p^{s+1}} + \dots + \frac{c_{s+t-1}}{p^{s+t-1}} \right) + \left(\frac{c_s}{p^{s+t}} + \frac{c_{s+1}}{p^{s+t+1}} + \dots + \frac{c_{s+t-1}}{p^{s+2t-1}} \right) + \dots$$

gdzie

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{s-1} \frac{c_n}{p^n}.$$

Oznaczając

$$s_j = \frac{c_s}{p^{s+jt}} + \frac{c_{s+1}}{p^{s+jt+1}} + \dots + \frac{c_{s+t-1}}{p^{s+jt+t-1}}$$

możemy (71) zapisać krócej w postaci

$$(72) \quad \alpha = \alpha_1 + \sum_{j=0}^{\infty} s_j.$$

Zauważmy, że

$$s_j = \frac{d}{p^{s+jt}}, \quad d = c_s + \frac{c_{s+1}}{p} + \dots + \frac{c_{s+t-1}}{p^{t-1}}$$

i wobec tego z (72) dostajemy

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{d}{p^s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{jt}},$$

czyli w oparciu o wzór (7) dla $q = \frac{1}{p^t}$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{d}{p^s} \cdot \frac{p^t}{1 - p^t},$$

a to oznacza, że α jest liczbą wymierną.

Załóżmy teraz, że

$$(73) \quad \alpha = \frac{l}{m} \quad (l < m; \quad l, m \in \mathbb{N}).$$

W celu otrzymania rozwinięcia możemy zastosować algorytm dzielenia, co doprowadza do wzorów rekurencyjnych (70) wiążących cyfry rozwinięcia c_n i reszty z dzielenia r_n . Ponieważ reszty te są liczbami całkowitymi przyjmującymi wartości $\{0, 1, \dots, m-1\}$, w ciągu $\{r_0, r_1, \dots, r_m\}$ muszą występować co najmniej dwie liczby równe. Istnieją zatem liczby $s, t \in \mathbb{N}$ takie, że

$$(74) \quad r_s = r_{s+t} \quad (0 \leq s < s+t \leq m).$$

Oznaczając

$$f(x) = px - m \left[\frac{px}{m} \right]$$

dostajemy ze wzorów (70)

$$r_{n+1} = f(r_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Teraz już łatwo udowodnić metodą indukcji, że

$$(75) \quad r_{n+t} = r_n \quad \text{dla} \quad n \geq s.$$

Istotnie, dla $n = s$ równość (75) jest prawdziwa na mocy (74). Zakładając, że warunek (75) jest spełniony dla pewnego n otrzymujemy po zastąpieniu n przez $n + 1$

$$r_{n+t+1} = f(r_{n+t}) = f(r_n) = r_{n+1}$$

co kończy dowód indukcyjny. Warunek (75) zastosowany do ostatniego ze wzorów (70) daje

$$c_{n+1+t} = \left[\frac{pr_{n+t}}{m} \right] = \left[\frac{pr_n}{m} \right] = c_{n+1}$$

a to oznacza, że

$$c_{n+t} = c_n \quad \text{dla} \quad n \geq s + 1.$$

Zatem liczba α postaci (73) ma okresowe rozwinięcie właściwe przy podstawie p , co kończy dowód. \square

Uwaga. Wzory (70) pozwalające wyznaczyć rozwinięcie przy podstawie p liczby wymiernej

$$w = \frac{l}{m} \quad (l < m; \quad l, m \in \mathbb{N})$$

można zapisać w innej (równoważnej) postaci dogodnej rachunkowo:

$$(70') \quad \begin{aligned} r_0 &= l, \\ c_{n+1} &= \left[\frac{pr_n}{m} \right], & (n \in \mathbb{N}) \\ r_{n+1} &= pr_n - mc_{n+1}. \end{aligned}$$

Przykład 15. Znajdziemy rozwinięcie dziesiętne liczby

$$w = \frac{5}{7}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 14 liczba w ma rozwinięcie okresowe. Ze wzorów (70') dostajemy kolejno

$$r_0 = 5, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 2, \quad r_4 = 6, \quad r_5 = 4, \quad r_6 = 5 = r_0$$

oraz

$$c_1 = 7, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 4, \quad c_4 = 2, \quad c_5 = 8, \quad c_6 = 5, \quad c_7 = 7 = c_1$$

zatem

$$\frac{5}{7} = 0, [714285].$$

Z dowodu twierdzenia 14 wynika, że okres rozwinięcia może składać się conajwyżej z $m = 7$ cyfr. W rzeczywistości otrzymaliśmy rozwinięcie o okresie zawierającym 6 cyfr, czyli o jedną mniej niż można było przewidywać.

Przykład 16. Znajdziemy rozwinięcie przy podstawie $p = 2$ liczby

$$w = \frac{1}{3}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 14 rozwinięcie to jest okresowe o okresie zawierającym co najwyżej $m = 3$ cyfr. Ze wzorów (70') otrzymujemy kolejno

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 1 = r_0$$

oraz

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0 = c_1.$$

Zatem

$$\frac{1}{3} = 0, [01] (2),$$

okres składa się z 2 cyfr.

Przykład 17. Znajdziemy rozwinięcie przy podstawie $p = 3$ liczby

$$w = \frac{17}{18}.$$

Ze wzorów (70') dostajemy kolejno

$$r_0 = 17, \quad r_1 = 15, \quad r_2 = 9, \quad r_3 = 9 = r_2$$

oraz

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 1 = c_4,$$

zatem rozwinięcie ma postać

$$\frac{17}{18} = 0, 22[1] (3).$$

Na podstawie twierdzenia 14 można było przewidywać, że okres będzie zawierał conajwyżej $m = 18$ cyfr. Okazało się, że okres ma tylko 1 cyfrę.

Przykład 18. Przedstawimy przy pomocy ułamka liczbę α , której rozwinięcie dziesiętne ($p = 10$) ma postać

$$\alpha = 0, 1[123].$$

Używając oznaczeń wprowadzonych w dowodzie twierdzenia 14 mamy

$$\alpha = \alpha_1 + \sum_{j=0}^{\infty} s_j,$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{1}{10},$$

$$s_j = \frac{1}{10^{2+3j}} + \frac{2}{10^{2+3j+1}} + \frac{3}{10^{2+3j+2}} = \frac{d}{10^{2+3j}},$$

$$d = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} = \frac{123}{100}.$$

Zatem

$$\alpha = \frac{1}{10} + \frac{d}{10^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10^{3j}} = \frac{1}{10} + \frac{123}{10^4} \cdot \frac{10^3}{999}$$

co daje ostatecznie

$$\alpha = \frac{1122}{9990}.$$

Przykład 19. Przedstawimy przy pomocy ułamka liczbę α , której rozwinięcie przy podstawie $p = 2$ ma postać

$$\alpha = 0,110[01] (2).$$

W oznaczeniach użytych w dowodzie twierdzenia 14 mamy

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} = \frac{3}{4}, \quad s_j = \frac{0}{2^{4+2j}} + \frac{1}{2^{4+2j+1}} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{4^j}$$

zatem

$$\alpha = \alpha_1 + \sum_{j=0}^{\infty} s_j = \frac{3}{4} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^5} \cdot \frac{4}{3}$$

czyli

$$\alpha = \frac{19}{24}.$$

Zadania.

1. Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej.

2. Znaleźć sumy szeregów

$$\text{a.) } \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sqrt{2}}, \quad \text{b.) } e + e^2 + e^3 + \sum_{n=5}^{\infty} e^{-2n}$$

$$\text{c.) } \sum_{n=1}^{\infty} 5e^{-3n}.$$

3. Dla jakich x zbieżny jest szereg

$$\text{a.) } \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} \quad \text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x^n).$$

W przypadku zbieżności znaleźć jego sumę.

Wskazówka. W punkcie b.) rozważyć przypadki $1^0 |x| < 1$, $2^0 x = \pm 1$, $3^0 |x| > 1$.

4. Znaleźć wzór na k -tą sumę częściową i obliczyć sumę szeregu o wyrazie ogólnym

$$\begin{aligned} \text{a.) } a_n &= \frac{1}{n(n+2)}, & \text{b.) } a_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \\ \text{c.) } a_n &= \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

5. Podać wzór określający ogólny wyraz każdego z podanych szeregów:

$$\begin{aligned} \text{a.) } & \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \dots \\ \text{b.) } & \frac{6}{1} + \frac{7}{3} + \frac{8}{5} + \frac{9}{7} + \frac{10}{9} + \dots \\ \text{c.) } & \log \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 7} + \log \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10} + \log \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot 13} + \log \frac{5 \cdot 13}{4 \cdot 16} + \dots \end{aligned}$$

Które z tych szeregów są zbieżne? W przypadku zbieżności znaleźć sumę szeregu, badając ciąg sum częściowych.

6. Udowodnić następujące

Kryterium porównawcze rozbieżności. Jeżeli dla $n \geq n_0$ (gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$) zachodzi nierówność

$$a_n \geq b_n > 0$$

i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest rozbieżny, to również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest rozbieżny.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 6.

7. Zbadać zbieżność szeregów o następującym wyrazie ogólnym

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } a_n = \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{3^n}, & \text{b.) } a_n = \frac{1}{n5^n}, \\ \text{c.) } a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{7^n}, & \text{d.) } a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{2}, \\ \text{e.) } a_n = n^{-\frac{n+2}{2n}}, & \text{f.) } a_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}, \\ \text{g.) } a_n = \frac{\sqrt[n]{10}}{n^2}, & \text{h.) } a_n = \frac{2}{\sqrt{n+3}}. \end{array}$$

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie 7 i zadanie 6.

8. Udowodnić, że ze zbieżności szeregu o wyrazie ogólnym $a_n \geq 0$ wynika zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n^2 . Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

9. Udowodnić, że szereg utworzony z odwrotności wyrazów ciągu arytmetycznego jest rozbieżny.

Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 6.

10. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n , jeżeli

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } a_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n, & \text{b.) } a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n + 2^n}}, \\ \text{c.) } a_n = \log \frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[k]{n} - 1} \quad (k \in \mathbb{N}; k, n \geq 2), & \text{d.) } a_n = \log \frac{1+n^2}{n^2}, \\ \text{e.) } a_n = \frac{1}{\log n}, \quad n \geq 2, & \text{f.) } a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{array}$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenie 7 i zadanie 6. W punktach c.) - f.) oprzeć się na nierówności (63) rozdz. III §4.

11. Udowodnić zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \quad (n \geq 2).$$

Wskazówka. Najpierw udowodnić równość

$$(\log n)^{\log n} = n^{\log \log n},$$

następnie skorzystać z twierdzenia 7.

12. Udowodnić, że ze zbieżności szeregu o wyrazie ogólnym $a_n > 0$ wynika zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

Wskazówka. Najpierw udowodnić nierówność

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a, b \geq 0),$$

następnie zastosować twierdzenie 7.

13. Udowodnić, że ze zbieżności szeregu o wyrazie ogólnym $a_n > 0$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

14. Udowodnić rozbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}, \quad \text{gdzie} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \neq 2^k, \\ -1 & \text{gdy } n = 2^k. \end{cases}$$

Wskazówka. Oznaczając

$$A_k = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}-1} - \frac{1}{2^k}$$

oszacować z dołu wyrażenie A_k a następnie sumę częściową S_{2^k} .

15. W przedziale $(0, 1]$ rozważmy funkcję przedziałami liniową

$$f(x) = b_n - nx \quad \text{dla} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

przy czym ciąg $\{b_n\}$ określony jest wzorem rekurencyjnym

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n+1}, \quad b_1 = 1.$$

Udowodnić, że funkcja f

a.) jest ciągła w przedziale $(0, 1]$,

b.) nie jest jednostajnie ciągła w tym przedziale.

Zbadać jej różniczkowalność i naszkicować wykres.

Wskazówka. W punkcie b.) zauważyć, że

$$\Delta_p = f\left(\frac{1}{n+p+1}\right) - f\left(\frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n+p+1}$$

i wobec tego różnica między największą i najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $[\frac{1}{n+p+1}, \frac{1}{n}]$ wynosi

$$\Delta_0 + \Delta_1 + \cdots + \Delta_p = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p+1}.$$

Następnie ustalić liczbę n i dobrać odpowiednio liczbę p korzystając z rozbieżności szeregu harmonicznego.

16*. Znaleźć rozwinięcie przy podstawie p liczby naturalnej m gdy

$$\text{a.) } p = 2; \quad m = 35, \quad m = 49, \quad m = 57,$$

$$\text{b.) } p = 3; \quad m = 21, \quad m = 39, \quad m = 72.$$

17*. Przy podstawie p znaleźć rozwinięcia właściwe i niewłaściwe liczby α , gdy

$$\text{a.) } p = 2, \quad \alpha = \frac{7}{32};$$

$$\text{b.) } p = 4, \quad \alpha = \frac{35}{64};$$

$$\text{c.) } p = 10, \quad \alpha = \frac{275}{100}.$$

18*. Znaleźć rozwinięcie przy podstawie p liczby wymiernej w gdy

$$\text{a.) } p = 10, \quad w = \frac{5}{6};$$

$$\text{b.) } p = 2, \quad w = \frac{4}{5};$$

$$\text{c.) } p = 5, \quad w = \frac{153}{500}.$$

19*. Liczba α ma przy podstawie p rozwinięcie

$$\text{a.) } p = 10, \quad \alpha = 1,27323232\dots$$

$$\text{b.) } p = 10, \quad \alpha = 0,135010305001003005\dots$$

$$\text{c.) } p = 2, \quad \alpha = 10,101001000100001\dots (2)$$

$$\text{d.) } p = 2, \quad \alpha = 0,1110101010\dots (2)$$

$$\text{e.) } p = 5, \quad \alpha = 0,123401020304001002003004\dots (5)$$

$$\text{f.) } p = 5, \quad \alpha = 4,1234343434\dots (5)$$

Które z podanych liczb α są wymierne? Przedstawić te liczby przy pomocy ułamka.

20. Przedstawić w postaci ułamka liczbę w mającą rozwinięcie dziesiętne

$$\text{a.) } w = 0,272727\dots, \quad \text{b.) } w = 1,351351351\dots,$$

mnożąc obie strony równości przez odpowiednią potęgę 10 i rozumując podobnie, jak w Przykładzie 9 (ii).

21. Liczba w ma rozwinięcie okresowe

a.) $w = 0, c_1 c_2 c_1 c_2 c_1 c_2 \dots (p)$,

b.) $w = 0, c_1 c_2 \dots c_t c_1 c_2 \dots c_t c_1 c_2 \dots c_t \dots (p)$.

Przedstawić liczbę w w postaci ułamka, stosując metodę podaną w zadaniu 20

(i) dla $p = 10$,

(ii) dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

22. Załóżmy, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są zbieżne i że zachodzą nierówności

(i) $a_n \leq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $a_{n_0} < b_{n_0}$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$.

Udowodnić, że wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$



§2. Szeregi o wyrazach dodatnich

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie, to ciąg sum częściowych $\{S_n\}$ jest ściśle rosnący. Zachodzą wówczas dwie możliwości:

a.) ciąg $\{S_n\}$ jest ograniczony z góry - wówczas zgodnie z twierdzeniem 5 rozdz.II §2 ciąg ten jest zbieżny a to oznacza, że szereg jest zbieżny;

b.) ciąg $\{S_n\}$ jest nieograniczony z góry - wówczas jest on rozbieżny do ∞ a to oznacza, że szereg jest rozbieżny (jego suma jest równa ∞).

Z tych uwag wynika natychmiast (por. zadanie 6 §1)

Twierdzenie 1 (kryterium porównawcze rozbieżności). *Jeżeli dla $n \geq n_0$ (gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$) zachodzi nierówność*

$$a_n \geq b_n > 0$$

i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest rozbieżny, to również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest rozbieżny.

W dalszym ciągu przedstawimy warunki dostateczne zapewniające zbieżność szeregu o wyrazach dodatnich (tzw. *kryteria zbieżności*.)

Twierdzenie 2 (kryterium zagęszczania Cauchy'ego). *Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich. Wówczas szereg*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$(\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

DOWÓD. Niech S_n będzie n -tą sumą częściową szeregu (α) , zaś T_n n -tą sumą częściową szeregu zagęszczonego (β) . Zauważmy, że

$$S_{2^n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n-1})$$

przy czym ostatni nawias zawiera $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ wyrazów. Wobec tego

$$(1) \quad S_{2^n-1} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} = a_1 + T_{n-1}.$$

Podobnie

$$S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots + a_{2^n}),$$

a stąd

$$(2) \quad S_{2^n} \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} = a_1 + \frac{1}{2}T_n.$$

Ponieważ $2^n - 1 \rightarrow \infty$, do dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje wskaźnik n_k taki, że

$$k \leq 2^{n_k} - 1$$

skąd wynika

$$(3) \quad S_k \leq S_{2^{n_k} - 1}.$$

Z nierówności (1), (2), (3) wynika, że ciąg $\{T_n\}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{S_n\}$ ma tę własność, a to stwierdzenie jest równoważne z tezą twierdzenia. \square

Przykład 1. Zbadamy zbieżność szeregu

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Jeżeli $\alpha \leq 0$, to ogólny wyraz szeregu nie dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$, szereg jest więc rozbieżny (por. twierdzenie 8 §2).

Rozważmy teraz przypadek $\alpha > 0$. Szereg zagęszczony ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie $q = 2^{1-\alpha}$, który jest zbieżny gdy $q < 1$ (czyli gdy $1 - \alpha < 0$), rozbieżny w przeciwnym przypadku. Zgodnie z twierdzeniem 1 szereg (4) jest zbieżny, gdy $\alpha > 1$, rozbieżny, gdy $0 < \alpha \leq 1$.

Zauważmy, że dla $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

zatem w obu przypadkach spełniony jest konieczny warunek zbieżności. Dla $\alpha = 1$ szereg (4) jest szeregiem harmonicznym, którego rozbieżność udowodniliśmy w Przykładzie 4 §1. W §1 rozważaliśmy również szereg (4) dla $\alpha = \frac{1}{2}$ (Przykład 5) i $\alpha = 2$ (Przykład 6).

Przykład 2. Szereg

$$(5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg zagęszczony

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n \log 2)^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^\alpha n^\alpha},$$

który różni się tylko stałym czynnikiem od szeregu (4). Wobec tego szereg (5) jest zbieżny, gdy $\alpha > 1$, rozbieżny, gdy $0 < \alpha \leq 1$.

Twierdzenie 3 (kryterium d'Alemberta).¹ Załóżmy, że istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Wówczas szereg

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest

- (i) zbieżny gdy $0 \leq g < 1$,
- (ii) rozbieżny gdy $1 < g \leq \infty$.

DOWÓD. W przypadku (i) do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać $N \in \mathbb{N}$ tak, by dla $n \geq N$ zachodziła nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \varepsilon.$$

Ustalając $\varepsilon \in (0, 1 - g)$ i przyjmując $b = g + \varepsilon$ mamy zatem

$$(7) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < b \quad \text{dla} \quad n \geq N.$$

Z nierówności (7) dostajemy kolejno

$$(8) \quad \begin{aligned} a_{N+1} &< b a_N, \\ a_{N+2} &< b^2 a_N, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{N+p} &< b^p a_N \quad \text{dla} \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ponieważ $b \in (0, 1)$, szereg geometryczny

$$\sum_{p=1}^{\infty} b^p$$

jest zbieżny i wobec tego ostatnia nierówność (8) zapewnia na mocy kryterium porównawczego zbieżność szeregu

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p},$$

który powstaje z szeregu (6) przez skreślenie początkowych N wyrazów. Zgodnie z twierdzeniem 1 §1 szereg (6) jest również zbieżny.

W przypadku (ii) dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

z której wynika, że przynajmniej począwszy od pewnego wyrazu ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący, nie może być zatem zbieżny do zera. Wobec tego szereg (6) jest rozbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (por. twierdzenie 8 §1). \square

¹Jean d'Alembert (1717 - 1783), matematyk francuski, od 1741 r. członek Paryskiej Akademii Nauk. Zajmował się analizą matematyczną, mechaniką i astronomią, z jego nazwiskiem związana jest metoda wyznaczania drgań poprzecznych struny sprężystej.

Twierdzenie 4 (kryterium Cauchy'ego). *Załóżmy, że istnieje granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g.$$

Wówczas szereg

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest

- (i) zbieżny gdy $0 \leq g < 1$,
- (ii) rozbieżny gdy $1 < g \leq \infty$.

DOWÓD. Dowód przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 3. W przypadku (i) można obrać liczbę $0 < b < 1$ tak, że dla $n \geq N \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_n} < b$$

z której wynika

$$(10) \quad a_n < b^n \quad \text{dla} \quad n \geq N.$$

Ponieważ szereg geometryczny

$$\sum_{n=N}^{\infty} b^n$$

jest zbieżny, nierówność (10) zapewnia zbieżność szeregu

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$

a więc i zbieżność szeregu (9).

W przypadku (ii) dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

z której wynika, że przynajmniej począwszy od pewnego wyrazu mamy $a_n > 1$, ciąg $\{a_n\}$ nie może być więc zbieżny do zera. Wobec tego szereg (9) jest rozbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu (por. twierdzenie 8 §1). \square

Uwaga. Kryterium d'Alemberta jest na ogół wygodniejsze w użyciu niż kryterium Cauchy'ego. Ponadto

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

więc na podstawie twierdzenia o średniej geometrycznej (zadanie 2 rozdz. III §3) z istnienia granicy rozważanej w twierdzeniu 3 wynika istnienie granicy, o której mowa

w twierdzeniu 4 oraz równość obu granic. Jeżeli $g = 1$ to mówimy, że szereg *nie reaguje na kryterium (d'Alembert'a, Cauchy'ego)*.

Przykład 3. Rozważmy szereg

$$(11) \quad 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

Ogólny wyraz tego szeregu można wyrazić wzorem

$$a_{2n-1} = a_{2n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

zatem

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1, \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Wobec tego ciąg $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ jest przeplatanką dwóch różnych ciągów stałych, nie istnieje więc granica rozważana w twierdzeniu 3 i nie możemy stosować kryterium d'Alemberta. Natomiast

$$\sqrt[k]{a_k} = 2^{\alpha_k},$$

gdzie

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1-n}{2^n} & \text{dla } k = 2n, \\ \frac{1-n}{2^{n-1}} & \text{dla } k = 2n - 1. \end{cases}$$

Ponieważ ciąg $\{\alpha_k\}$ jest przeplatanką dwóch ciągów zbieżnych do granicy $-\frac{1}{2}$, mamy (por. zadanie 4 rozdz.II §1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = -\frac{1}{2}$$

a stąd wobec ciągłości funkcji wykładniczej $y = 2^x$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Wobec tego kryterium Cauchy'ego zapewnia zbieżność szeregu (11).

Z podanego przykładu widać, że może istnieć granica rozważana w twierdzeniu 4, podczas gdy granica w twierdzeniu 3 nie istnieje. Kryterium Cauchy'ego jest więc ogólniejsze niż kryterium d'Alemberta. Korzystając ze zbieżności szeregu (11) możemy zgodnie z twierdzeniem 5 §1 połączyć w nim wyrazy parami nie zmieniając jego sumy. Dostajemy w ten sposób szereg

$$(1 + 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Zatem suma szeregu (11) wynosi 4.

Przykład 4. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

rozważany w przykładzie 1 nie reaguje na kryterium d'Alemberta (a więc i na kryterium Cauchy'ego), gdyż

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{\alpha}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$$

korzystając z ciągłości funkcji potęgowej $y = x^{\alpha}$ i z twierdzenia o granicy ilorazu dostajemy dla dowolnego α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

niezależnie od tego, czy szereg jest zbieżny czy rozbieżny.

Przykład 5. Rozważmy szereg

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

gdzie x jest ustaloną liczbą dodatnią. Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1},$$

a stąd

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

co zapewnia zbieżność szeregu (12).

Aby zastosować kryterium Cauchy'ego zauważmy najpierw, że

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Mamy

$$b_n = \log \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}(\log 1 + \log 2 + \dots + \log n)$$

skąd na podstawie twierdzenia o średniej arytmetycznej (twierdzenie 12 rozdz.II §2)

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

Ponieważ

$$\sqrt[n]{n!} = e^{b_n},$$

więc z (14) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$

a zatem

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.$$

Zgodnie z uwagą sformułowaną po twierdzeniu 4 granice (13) i (15) są równe. W dalszym ciągu zobaczymy, że suma szeregu (12) wynosi e^x .

Przykład 6. Wykorzystując własności szeregów możemy łatwo udowodnić, że

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

przy ustalonych $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$ (por. zadanie 12 rozdz.II §2). Zgodnie z twierdzeniem 8 §1 wystarczy udowodnić zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{n^k}{a^n}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta dostajemy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a} \left(\frac{n+1}{n} \right)^k,$$

skąd

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a} < 1.$$

Podobnie zastosowanie kryterium Cauchy'ego daje

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a}$$

skąd

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{a} < 1$$

(oczywiście granice (17) i (18) są równe). Oba kryteria zapewniają zbieżność szeregu a więc i warunek (16).

Na zakończenie udowodnimy jeszcze jedno proste i bardzo wygodne w stosowaniu kryterium zbieżności względnie rozbieżności szeregu.

Twierdzenie 5. *Jeżeli istnieje*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g \neq 0$$

to szeregi

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są albo oba zbieżne albo oba rozbieżne.

DOWÓD. Ustalając $0 < \varepsilon < g$ mamy począwszy od pewnego wskaźnika n_0

$$g - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < g + \varepsilon$$

czyli

$$(19) \quad (g - \varepsilon)b_n < a_n < (g + \varepsilon)b_n.$$

Z twierdzeń 1, 3 §1 wynika, że szeregi

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (g - \varepsilon)b_n, \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} (g + \varepsilon)b_n$$

są zbieżne wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg (β) . Z nierówności (19) wynika zatem teza twierdzenia po zastosowaniu kryterium porównawczego zbieżności (twierdzenie 7 §1) oraz kryterium porównawczego rozbieżności (twierdzenie 1). \square

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Przy założeniach twierdzenia 2 udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n}.$$

Czy liczby 2, 3 mogą być zastąpione przez dowolną inną liczbę naturalną różną od 1?

2. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

w zależności od parametru α . Dla jakich n określone jest wyrażenie a_n ?

Wskazówka. Opierając się na nierówności (por. rozdz. II §2 punkt 5)

$$(20) \quad 2 \leq e \leq 3$$

zastosować kryteria porównawcze zbieżności i rozbieżności (twierdzenie 7 §1 i twierdzenie 1) wykorzystując twierdzenie 2, przykład 2 i zadanie 1.

3. Oznaczmy

$$\underbrace{\log \log \dots \log x}_{p \text{ razy}} = \log_{(p)} x,$$

$$b_n(0) = 1, \quad b_n(p) = \log n(\log_{(2)} n) \dots (\log_{(p)} n),$$

$$a_n(p, \alpha) = \frac{1}{nb_n(p-1)(\log_{(p)} n)^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym $a_n(p, \alpha)$ w zależności od parametru α . Dla jakich n określone są wyrażenia $b_n(p)$, $a_n(p, \alpha)$?

Wskazówka. Korzystając z nierówności (20) udowodnić najpierw oszacowanie

$$\log_{(k)} 2^n \leq \log_{(k-1)} n \leq \log_{(k)} 3^n \quad (k \geq 2).$$

Następnie zastosować indukcję względem p wykorzystując twierdzenie 2, zadanie 1 i przykład 2.

4. Rozważmy szeregi o wyrazach dodatnich

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

i niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Jeżeli oba szeregi są zbieżne, to mówimy, że *szereg (β) jest zbieżny szybciej niż szereg (α)* . Jeżeli oba szeregi są rozbieżne, to mówimy, że *szereg (β) jest rozbieżny wolniej niż szereg (α)* . Przyjmijmy oznaczenia zadania 3 i niech $A_\alpha(p)$ będzie szeregiem

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(p, \alpha) \quad (n_0 \text{ dostatecznie duże}).$$

Udowodnić, że

a.) w przypadku zbieżności szereg $A_\alpha(p)$ jest zbieżny szybciej niż szereg $A_\alpha(p+1)$,

b.) w przypadku rozbieżności szereg $A_\alpha(p+1)$ jest rozbieżny wolniej niż szereg $A_\alpha(p)$.

Wskazówka. Oprzeć się na wyniku zadania 3. W punkcie a.) zastosować regułę de l'Hospitala obliczania granicy wyrażen nieoznaczonych.

5. Przyjmijmy oznaczenia

$$(S_\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad (S_\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$$

przy czym $\beta > \alpha > 0$. Przyjmując terminologię wprowadzoną w zadaniu 4 udowodnić, że

- a.) gdy oba szeregi są zbieżne, to szereg (S_β) jest zbieżny szybciej niż szereg (S_α) ;
 b.) gdy oba szeregi są rozbieżne, to szereg (S_β) jest rozbieżny wolniej niż szereg (S_α) .

6. Zbadać zbieżność szeregów o wyrazie ogólnym

$$\begin{aligned} \text{a.) } a_n &= \frac{\log n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0), & \text{b.) } a_n &= \frac{1}{(\log n)^\alpha} \quad (\alpha > 0), \\ \text{c.) } a_n &= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}, & \text{d.) } a_n &= \frac{1}{2\sqrt{n}}, \\ \text{e.) } a_n &= \frac{1}{(\log n)\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Wskazówka. Zastosować twierdzenia 2 i 4.

7. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} \quad (a > 0)$$

w zależności od parametru a .

8. Udowodnić, że następujące ciągi są zbieżne do zera:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{d^n}{n!} \quad (d > 0), & v_n &= \frac{n^n}{(n!)^2}, \\ w_n &= \frac{n^\alpha}{n!} \quad (\alpha \in \mathbb{R}), & z_n &= \frac{n!}{n^n} \end{aligned}$$

(por. zadanie 12 rozdz. II §2).

Wskazówka. Wykorzystać warunek konieczny zbieżności odpowiedniego szeregu.

9. Opierając się na twierdzeniu 5 zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n , jeśli

$$\begin{aligned} \text{a.) } a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{a}{\sqrt{n}} \quad (a > 0), & \text{b.) } a_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}, \\ \text{c.) } a_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}, & \text{d.) } a_n &= \frac{1}{4n-1}, \\ \text{e.) } a_n &= \frac{n}{n^2+1}, & \text{f.) } a_n &= \frac{\sqrt{n} + \sin n}{n^2 - n + 1}, \\ \text{g.) } a_n &= n^\alpha \sin^2 \frac{1}{n} \quad (\alpha > 0) \end{aligned}$$

10. Zakładając, że szereg o wyrazie ogólnym $a_n > 0$ jest zbieżny oraz że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0.$$

Porównać z twierdzeniem 8 §1.

Wskazówka. Udowodnić najpierw nierówność

$$na_n \leq \frac{n}{n-k} r_k \quad \text{dla } n > k,$$

gdzie r_k oznacza k -tą resztę szeregu, następnie oprzeć się na twierdzeniu 4 §1.

11. Na przykładzie szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

pokazać, że szereg spełniający warunki podane w zadaniu 10 może być rozbieżny.

12. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$\text{a.) } a_n = n^{-a} \sin \frac{1}{n} \quad \text{b.) } a_n = a^{\log n} \quad (a > 0)$$

w zależności od parametru a .

13. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n , gdy

$$\begin{aligned} \text{a.) } a_n &= \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0, a \neq e), & \text{b.) } a_n &= \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n, \\ \text{c.) } a_n &= \frac{2^n}{n^k} \quad (k \in \mathbb{N}), & \text{d.) } a_n &= (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \\ \text{e.) } a_n &= \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

14. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta + 1}$$

w zależności od parametrów α, β .

15. Udowodnić następujące

Uogólnione kryterium d'Alemberta. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$$

jest

(i) zbieżny, jeżeli $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, (ii) rozbieżny, jeżeli $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Wskazówka. Rozumowanie podobne jak w dowodzie twierdzenia 3.

16. Udowodnić następujące

Uogólnione kryterium Cauchy'ego. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$$

jest

(i) zbieżny, jeżeli $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$, (ii) rozbieżny, jeżeli $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$.

Wskazówka. W dowodzie zbieżności przeprowadzić rozumowanie podobne jak w dowodzie twierdzenia 4. Dla dowodu rozbieżności wykazać, że nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu (twierdzenie 8 §1).

17. Wykazać, że w przypadku szeregu rozważanego w Przykładzie 3 również uogólnione kryterium d'Alemberta (zadanie 15) nie pozwala rozstrzygnąć jego zbieżności ani rozbieżności.

18. Rozważmy szereg

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

Sprawdzić, że

a.) kryterium d'Alemberta (nawet uogólnione - zadanie 15) nie zapewnia zbieżności ani rozbieżności szeregu,

b.) uogólnione kryterium Cauchy'ego (zadanie 16) zapewnia jego zbieżność. Obliczyć sumę szeregu. Dlaczego nie można zastosować kryterium Cauchy'ego w postaci podanej w twierdzeniu 4?

19. Oznaczając przez $\tau(n)$ ilość dzielników pierwszych liczby n zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n \quad (x > 0).$$

Wskazówka Zastosować uogólnione kryterium Cauchy'ego (zadanie 16).

20. Rozważmy szeregi o wyrazach dodatnich

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Udowodnić następujące

Uogólnione kryterium porównawcze. Jeżeli począwszy od pewnego wskaźnika n_0 zachodzi nierówność

$$(21) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

to

- (i) ze zbieżności szeregu (β) wynika zbieżność szeregu (α) ,
- (ii) z rozbieżności szeregu (α) wynika rozbieżność szeregu (β) .

Wskazówka. Nie zmniejszając ogólności można założyć (dlaczego?), że nierówność (21) zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Pomnożyć stronami nierówności (21) dla $n = 1, 2, \dots, k$, następnie skorzystać z kryterium porównawczego zbieżności (twierdzenie 7 §1) i kryterium porównawczego rozbieżności (twierdzenie 1).

21. Rozważmy szereg o wyrazach dodatnich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i niech

$$R_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

Udowodnić następujące

Kryterium Raabego. ² Załóżmy, że istnieje granica (skończona lub niewłaściwa)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = r.$$

Wówczas

- a.) jeżeli $r < 1$, to szereg jest rozbieżny,
- b.) jeżeli $r > 1$, to szereg jest zbieżny.

Wskazówka. W przypadku a.) dojść do nierówności (dla dostatecznie dużych n)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1}$$

i zastosować zadanie 20. W przypadku b.) zauważyć, że przyjmując $p = \frac{r+1}{2}$ mamy dla dostatecznie dużych n

$$(22) \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{p}{n}.$$

²Joseph Ludwig Raabe (1801 - 1859), urodzony w Polsce w miejscowości Brody, matematyk szwajcarski, od 1843 r. profesor uniwersytetu w Zurichu. Prace z analizy matematycznej, algebry i geometrii.

Obierając następnie $1 < \alpha < p$ udowodnić, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$(23) \quad 1 + \frac{p}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$$

po czym opierając się na nierównościach (22), (23) zastosować zadanie 20. Nierówność (23) można otrzymać stosując wzór Taylora przy $a = 0$ do funkcji

$$f(x) = 1 + px - (1 + x)^\alpha$$

przy założeniu, że liczba $x > 0$ jest dostatecznie mała (por. rozdz. III §5).

22. Zbadać zbieżność szeregu (por. zadanie 13 a.))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

stosując kryterium Raabego (zadanie 21). Czy szereg reaguje na kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego?

23. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$\text{a.) } a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}, \quad \text{b.) } a_n = \frac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)} \quad (x > 0)$$

stosując kryterium Raabego (zadanie 21). Czy szeregi te reagują na kryterium d'Alemberta?

24. Rozważmy szereg o wyrazach dodatnich

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i niech

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \quad (c_n > 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}).$$

Udowodnić następujące

Kryterium Kummera. ³ Załóżmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

³Ernst Eduard Kummer (1810 - 1893), urodzony w Polsce w miejscowości Żary. W 1831 r. ukończył studia matematyczne w Halle, w latach 1832 - 1842 był nauczycielem w gimnazjum realnym w Legnicy a w latach 1842 - 1855 profesorem Uniwersytetu Wrocławskiego, pełniąc w okresie Wiosny Ludów (1848/49) funkcję rektora. We Wrocławiu powstały jego najważniejsze prace z teorii liczb, m.in. dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata dla wykładników $n < 101$. Od 1855 r. aż do przejścia na emeryturę był profesorem Uniwersytetu Berlińskiego. Zajmował się również analizą, geometrią różniczkową i fizyką matematyczną.

jest rozbieżny oraz że istnieje granica (skończona lub niewłaściwa)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = k.$$

Wówczas

jeżeli $k > 0$ to szereg (α) jest zbieżny,
jeżeli $k < 0$ to szereg (α) jest rozbieżny.

Pokazać, że

a.) dla $c_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) kryterium Kummera przechodzi w kryterium d'Alemberta,
b.) dla $c_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$) z kryterium Kummera otrzymujemy kryterium Raabego (zadanie 21).

Wskazówka. W przypadku $k > 0$ zauważyć, że istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla dużych n zachodzi nierówność

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1}.$$

Wywnioskować stąd, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

jest zbieżny (jaki jest ciąg sum częściowych tego szeregu?). Następnie oprzeć się na kryterium porównawczym zbieżności (twierdzenie 7 §1). W przypadku $k < 0$ zastosować uogólnione kryterium porównawcze (zadanie 20).

25. Załóżmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$$

jest rozbieżny i niech S_n oznacza jego n -tą sumę częściową. Udowodnić, że

a.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$$

jest rozbieżny,

b.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

jest rozbieżny,

c.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$$

jest zbieżny.

Wskazówka. W punkcie a.) rozważyć dwa przypadki, gdy ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry lub gdy nie ma tej własności. W punkcie b.) okazać, że badany szereg nie spełnia warunku Cauchy'ego (twierdzenie 6 §1). W punkcie c.) zauważyć, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \right)$$

jest zbieżny (jaki jest ciąg sum częściowych tego szeregu?), następnie zastosować kryterium porównawcze zbieżności (twierdzenie 7 §1).

26. Załóżmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$$

jest zbieżny i niech

$$r_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_j$$

będzie jego n -tą resztą. Udowodnić, że

a.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$$

jest rozbieżny,

b.) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$$

jest zbieżny.

Wskazówka. W punkcie a.) wykazać, że szereg nie spełnia warunku Cauchy'ego (twierdzenie 6 §1). W punkcie b.) zauważyć, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$$

jest zbieżny i zastosować kryterium porównawcze zbieżności (twierdzenie 7 §1).

27. Zakładając, że szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$$

jest rozbieżny rozważmy szereg

$$(\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n}.$$

a.) Przyjmując

$$a_n = \frac{1}{n}$$

sprawdzić, że szereg (β) jest rozbieżny.

b.) Przyjmując

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{gdy } n \neq k^2, \\ 1 & \text{gdy } n = k^2 \end{cases}$$

(dlaczego szereg (α) jest w tym przypadku rozbieżny?) udowodnić, że szereg (β) jest zbieżny.

Wskazówka. W przypadku b.) zauważyć, że szereg (β) jest sumą dwóch szeregów zbieżnych.

28. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n} \quad (a_n > 0)$$

jest zawsze zbieżny niezależnie od zbieżności lub rozbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

§3. Szeregi o wyrazach dowolnego znaku.

♡ ♡ ♡

Zajmiemy się teraz badaniem szeregów, których wyrazy mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Zaczniemy od prostego przekształcenia algebraicznego.

1. Przekształcenie Abela. Niech dana będzie suma

$$(1) \quad S = \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j.$$

Przyjmując oznaczenie

$$B_r = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r \quad (1 \leq r \leq m)$$

mamy

$$(2) \quad \beta_j = B_j - B_{j-1} \quad \text{dla } j = 2, \dots, m.$$

Wobec tego sumę S można zapisać w postaci

$$S = \alpha_1 B_1 + \sum_{j=2}^m \alpha_j (B_j - B_{j-1}),$$

co po otwarciu nawiasów i przegrupowaniu daje

$$(3) \quad S = \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) B_j + \alpha_m B_m.$$

Przejdźcie od postaci (1) do postaci (3) sumy S nazywamy *przekształceniem Abela*.¹ Zauważmy, że oznaczając

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \Delta \alpha_j, \quad B_j - B_{j-1} = \Delta B_j$$

i korzystając z (2) możemy tożsamość (3) zapisać w postaci

$$(3') \quad \sum_{j=2}^m \alpha_j (\Delta B_j) = \alpha_m B_m - \alpha_1 B_1 - \sum_{j=1}^{m-1} (\Delta \alpha_j) B_j.$$

Czytelnik znający elementy rachunku całkowego zauważy napewno analogię wzoru (3') z formułą całkowania przez części.

2. Kryterium Dirichleta i twierdzenie Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Wykorzystując przekształcenie Abela udowodnimy kolejne kryterium zbieżności szeregu, tym razem o wyrazach dowolnego znaku.

¹Niels Henrik Abel (1802 - 1829), urodzony w Findöe (Norwegia), oceniany przez swych nauczycieli jako wielki talent matematyczny. Zajmował się teorią funkcji eliptycznych i równaniami algebraicznymi, udowodnił m.in. niemożliwość algebraicznego rozwiązania ogólnego równania stopnia wyższego niż cztery, odkrywając ponownie wynik Paolo Ruffiniego z 1799 r. Podał zastosowania funkcji eliptycznych w teorii liczb.

Twierdzenie 1 (kryterium Dirichleta). *Załóżmy, że*

- (i) *ciąg $\{a_n\}$ jest monotoniczny i zbieżny do zera,*
- (ii) *ciąg sum częściowych szeregu*

$$(\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest ograniczony.

Wówczas szereg

$$(\gamma) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

jest zbieżny.

DOWÓD. Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, wówczas dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ mamy

$$(4) \quad a_n \geq a_{n+m}$$

skąd przechodząc do granicy przy $m \rightarrow \infty$ dostajemy

$$(5) \quad a_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

(w przeciwnym przypadku zastąpilibyśmy ciąg $\{a_n\}$ przez ciąg $\{-a_n\}$, co nie wpłynęłoby na zbieżność szeregu (γ)).

Dowód twierdzenia polega na sprawdzeniu, że szereg (γ) spełnia warunek Cauchy'ego (twierdzenie 6 §1). Rozważmy odcinek szeregu (γ)

$$C_{n,m} = \sum_{j=1}^m a_{n+j} b_{n+j}.$$

Przyjmując

$$\alpha_j = a_{n+j}, \quad \beta_j = b_{n+j}$$

i korzystając z przekształcenia Abela dostajemy

$$C_{n,m} = \sum_{j=1}^{m-1} (a_{n+j} - a_{n+j+1}) B_j + a_{n+m} B_m.$$

Oznaczając n -tą sumę częściową szeregu (β) przez T_n mamy na mocy założenia (ii)

$$|T_n| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}),$$

a zatem

$$|B_r| = |T_{n+r} - T_n| \leq 2M \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Wobec tego korzystając z (4), (5) dostajemy po redukcji po prawej stronie

$$(6) \quad |C_{n,m}| \leq 2Ma_{n+1}.$$

Z założenia (i) wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$a_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}$$

a stąd wynika wobec (6)

$$|C_{n,m}| < \varepsilon$$

dla $n > N$ i dowolnego $m \in \mathbb{N}$. □

Przykład 1. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem monotonicznym i zbieżnym do zera. Zbadamy zbieżność szeregów

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

w zależności od parametru x . Aby zastosować kryterium Dirichleta zbadamy ciąg sum częściowych szeregu

$$(\alpha') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

oraz szeregu

$$(\beta') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

Oznaczając k -tą sumę częściową szeregu (α') przez S_k mamy dla $x \neq 2r\pi$ (r całkowite)

$$S_k = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{n=1}^k 2 \sin nx \sin \frac{1}{2}x,$$

co po zastosowaniu ostatniego ze wzorów (38) rozdz. III §1 daje

$$S_k = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{n=1}^k \left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right],$$

czyli po redukcji

$$(7) \quad S_k = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Podobnie oznaczając k -tą sumę częściową szeregu (β') przez T_k dostajemy dla $x \neq 2r\pi$ (r całkowite)

$$T_k = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{n=1}^k 2 \cos nx \sin \frac{1}{2}x,$$

skąd po zastosowaniu pierwszego ze wzorów (38) rozdz. III §1 dostajemy

$$T_k = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{n=1}^k \left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \right],$$

czyli po redukcji

$$(8) \quad T_k = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Ze wzorów (7), (8) widać, że przy ustalonym x zachodzą nierówności

$$(9) \quad |S_k| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad |T_k| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

zatem oba ciągi sum częściowych są ograniczone. Z twierdzenia 1 wynika, że oba szeregi (α) , (β) są zbieżne dla $x \neq 2r\pi$. Jeżeli $x = 2r\pi$ dla pewnego r całkowitego, to szereg (α) jest zbieżny, gdyż wszystkie jego wyrazy są równe zero. Natomiast

$$\cos 2nr\pi = 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

wobec tego szereg (β) przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i może być zbieżny lub rozbieżny (proponujemy Czytelnikowi podanie przykładów).

Szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (a_n > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N})$$

nazywamy *szeregiem naprzemiennym*. Z twierdzenia 1 otrzymujemy jako prosty wniosek

Twierdzenie 2 (Leibniza). *Jeżeli w szeregu naprzemiennym ciąg $\{a_n\}$ monotonicznie dąży do zera, to szereg jest zbieżny.*

DOWÓD. Wystarczy przyjąć w twierdzeniu 1

$$b_n = (-1)^{n+1}.$$

Ciąg sum częściowych szeregu (β) ma postać

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

jest więc ograniczony. □

Przykład 2. Z twierdzenia Leibniza wynika, że *szereg anharmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

jest zbieżny, gdyż ciąg

$$a_n = \frac{1}{n}$$

jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera.

♡ ♡ ♡

3. Prawo łączności dla szeregów nieskończonych. W §1 zauważyliśmy, że w szeregu zbieżnym można w dowolny sposób łączyć wyrazy nawiasami nie zmieniając jego sumy. A kiedy można w szeregu nieskończonym opuszczać nawiasy? Odpowiedź daje

Twierdzenie 3. *Niech $\{n_k\}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Rozważmy szeregi*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\tilde{\alpha}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_k,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}, \\ \tilde{a}_k &= a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k} \quad \text{dla } k \geq 2 \end{aligned}$$

i założymy, że wszystkie wyrazy występujące w sumie \tilde{a}_k ($k \in \mathbb{N}$) są tego samego znaku. Wówczas

(i) *ze zbieżności szeregu $(\tilde{\alpha})$ wynika zbieżność szeregu (α) , przy czym oba szeregi mają tę samą sumę;*

(ii) *jeżeli szereg $(\tilde{\alpha})$ jest rozbieżny do ∞ (do $-\infty$), to tę samą własność ma szereg (α) .*

DOWÓD. Oznaczmy n -tą sumę częściową szeregu (α) , $(\tilde{\alpha})$ przez S_n , \tilde{S}_n odpowiednio. Zakładając, że szereg $(\tilde{\alpha})$ jest zbieżny i oznaczając przez A jego sumę mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k = A.$$

Wobec tego ustalając dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ można dobrać do niej wskaźnik k_0 tak, by dla $k \geq k_0$ zachodziła nierówność

$$(10) \quad A - \varepsilon < \tilde{S}_{k-1} < A + \varepsilon.$$

Ponieważ dla $n_{k-1} \leq n \leq n_k$ suma S_n spełnia jedną z nierówności

$$\tilde{S}_{k-1} \leq S_n \leq \tilde{S}_k \quad \text{lub} \quad \tilde{S}_k \leq S_n \leq \tilde{S}_{k-1}$$

(zależnie od znaku wyrazów występujących w sumie \tilde{a}_k), z nierówności (10) wynika, że

$$A - \varepsilon < S_n < A + \varepsilon$$

dla $n \geq n_{k_0-1}$ co kończy dowód punktu (i). Dowód punktu (ii) przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

A oto krótsze, nieco mniej precyzyjne, sformułowanie twierdzenia 3:

Twierdzenie 3'. W szeregu zbieżnym można opuścić nawiasy, jeżeli każdy nawias zawiera wyrazy tego samego znaku.

Przykład 3. Rozważmy szereg

$$(11) \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Jest to szereg postaci (\tilde{a}_k) gdzie

$$\tilde{a}_k = (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right).$$

Oznaczając

$$b_k = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}$$

mamy

$$\tilde{a}_k = (-1)^{k+1} b_k,$$

szereg (11) jest więc szeregiem naprzemiennym. Ponieważ ciąg $\{b_k\}$ jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera, na mocy twierdzenia Leibniza szereg (11) jest zbieżny i zgodnie z twierdzeniem 3 możemy w nim opuścić nawiasy. Oznaczając jego sumę przez S mamy zatem

$$S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Przykład 4. Szereg postaci $(\tilde{\alpha}_k)$

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \dots$$

jest oczywiście zbieżny, gdyż w każdym nawiasie suma jest równa zeru. Opuszczając nawiasy dostajemy szereg

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots$$

który jest rozbieżny, gdyż jego ogólny wyraz nie dąży do zera. Twierdzenie 3 nie ma tu zastosowania, gdyż w każdym nawiasie mamy wyrazy różnych znaków.

♡ ♡ ♡

4. Prawo przemienności dla szeregów nieskończonych. Zaczniemy od przykładu.

Przykład 5. Wiemy (por Przykład 2), że szereg anharmoniczny jest zbieżny. Oznaczając jego sumę przez s mamy

$$(12) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = s.$$

Zmieńmy kolejność wyrazów szeregu (12) w taki sposób, by po każdym wyrazie dodatnim występowały dwa ujemne. Otrzymujemy w ten sposób szereg

$$(12') \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

Oznaczając przez S_k , S'_k sumy częściowe szeregów (12), (12') odpowiednio mamy

$$S'_{3k} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2} S_{2k},$$

a stąd

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S'_{3k} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = \frac{1}{2} s.$$

Ponadto

$$S'_{3k+1} = S'_{3k} + \frac{1}{2k+1}, \quad S'_{3k+2} = S'_{3k+1} - \frac{1}{4k+2},$$

skąd wynika, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S'_{3k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S'_{3k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} S'_{3k} = \frac{1}{2} s.$$

Ciąg $\{S'_k\}$ jest więc przeplatanką trzech ciągów zbieżnych do tej samej granicy, zatem (por. zadanie 4 rozdz.II §1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k = \frac{1}{2} s,$$

a to oznacza, że szereg (12') jest zbieżny i jego suma wynosi $\frac{1}{2}s$.

Przykład 5 wykazuje, że zmiana kolejności wyrazów szeregu zbieżnego może zmienić jego sumę. W przypadku nieskończonego dodawania nie zachodzi więc prawo przemienności (dla sum skończonych wynika ono z aksjomatu (1a) rozdz.I §1). Można jednak wyodrębnić klasę szeregów, dla których zachodzi prawo przemienności - są to szeregi bezwzględnie zbieżne.

Mówimy, że szereg

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest *bezwzględnie zbieżny*, jeżeli zbieżny jest szereg

$$(\alpha^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Oczywiście każdy szereg zbieżny o wyrazach nieujemnych (lub ogólniej - mający od pewnego miejsca wyrazu tego samego znaku) jest zbieżny bezwzględnie. Zachodzi łatwe do udowodnienia

Twierdzenie 4. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

DOWÓD. Mamy dla dowolnych $n, p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|.$$

Wynika stąd, że szereg (α) spełnia warunek Cauchy'ego, jeżeli szereg (α^*) ma tę własność zaś (twierdzenie 6 §1) warunek Cauchy'ego jest równoważny zbieżności szeregu. \square

Istnieją szeregi zbieżne, które nie są bezwzględnie zbieżne - takie szeregi nazywamy *warunkowo zbieżnymi*. Najprostszym przykładem jest szereg anharmoniczny (Przykład 2). Szereg (α^*) ma tu postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

jest to więc szereg harmoniczny o którym wiemy, że jest rozbieżny (Przykład 4 §1).

Mówimy, że ciąg liczb naturalnych $\{m_n\}$ jest *permutacją zbioru liczb naturalnych*, jeżeli każda liczba naturalna występuje w nim dokładnie raz. O szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$$

mówimy wówczas, że *powstał z szeregu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

przez zmianę kolejności wyrazów.

Twierdzenie 5. *Jeżeli w szeregu bezwzględnie zbieżnym zmienimy kolejność wyrazów to otrzymany szereg pozostaje bezwzględnie zbieżny i ma tę samą sumę, co szereg wyjściowy.*

Twierdzenie to można sformułować krócej

Twierdzenie 5'. *W szeregu bezwzględnie zbieżnym można zmieniać kolejność wyrazów.*

DOWÓD. Ponieważ szereg (α^*) jest zbieżny, zgodnie z twierdzeniem 4 §1 do ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $k > N$ zachodziła nierówność

$$(13) \quad \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Oznaczmy odpowiednio przez S_n, T_n sumy częściowe szeregów

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}.$$

Ustalając $k > N$ możemy dobrać $n_k \geq k$ tak, by dla $n > n_k$ w sumie T_n występowały wszystkie wyrazy a_1, \dots, a_{k-1} . Wówczas w różnicy $S_n - T_n$ wyrazy te ulegną redukcji, skąd wynika wobec (13), że

$$(14) \quad |S_n - T_n| < \varepsilon$$

dla $n > n_k$. Zgodnie z twierdzeniem 4 szereg (α) jest zbieżny co oznacza, że ciąg $\{S_n\}$ ma granicę. Z nierówności (14) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n,$$

a więc szereg (β) jest również zbieżny i ma tą samą sumę co szereg (α) . Aby udowodnić, że szereg (β) jest bezwzględnie zbieżny wystarczy okazać, że szereg

$$(\beta^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m_n}|$$

jest zbieżny. Zauważmy jednak, że szereg

$$(\alpha^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

jest bezwzględnie zbieżny jako szereg o wyrazach nieujemnych i możemy do niego zastosować udowodnioną już część twierdzenia. Wynika z niej, że szereg (β^*) jest również zbieżny, co kończy dowód. \square

W Przykładzie 5 pokazaliśmy, że w szeregu warunkowo zbieżnym zmiana kolejności wyrazów może zmienić jego sumę. Nie jest to przypadek lecz ogólna prawidłowość, zachodzi bowiem następujące

Twierdzenie 6 (Riemanna). ² *Załóżmy, że szereg*

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest warunkowo zbieżny. Wówczas

(i) *obierając dowolnie liczbę rzeczywistą A możemy tak zmienić kolejność wyrazów w szeregu (α) by otrzymać szereg zbieżny o sumie A ;*

(ii) *można tak zmienić kolejność wyrazów w szeregu (α) aby otrzymać szereg rozbieżny do ∞ lub do $-\infty$.*

♡ ♡ ♡

²Bernhard Riemann (1826 - 1866), wybitny matematyk niemiecki, autor fundamentalnych prac z zakresu teorii funkcji zmiennej zespolonej, szeregów trygonometrycznych oraz geometrii, od 1859 r. profesor uniwersytetu w Getyndze. Sformułował nie udowodnioną do dziś hipotezę dotyczącą funkcji dzeta.

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że w szeregu (α) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych, w przeciwnym wypadku byłby on bezwzględnie zbieżny wbrew założeniu. Przyjmując

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n & \text{gdy } a_n > 0, \\ 0 & \text{gdy } a_n \leq 0, \end{cases}$$

$$q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n & \text{gdy } a_n < 0, \\ 0 & \text{gdy } a_n \geq 0 \end{cases}$$

stwierdzamy łatwo, że oba szeregi o wyrazach nieujemnych

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

są rozbieżne do ∞ . Mamy bowiem

$$a_n = p_n - q_n, \quad |a_n| = p_n + q_n,$$

zatem zbieżność jednego z szeregów (15) pociągałaby za sobą zbieżność drugiego, a stąd wynikałaby bezwzględna zbieżność szeregu (α) wbrew założeniu.

Dowód zaczniemy od punktu (i). Przyjmijmy

$$P_1 = p_1 + \cdots + p_{k_1}$$

obierając wskaźnik k_1 w taki sposób, by

$$p_1 + \cdots + p_s \begin{cases} \leq A & \text{dla } s = k_1 - 1, \\ > A & \text{dla } s = k_1 \end{cases}$$

(jeżeli $p_1 > A$, to wystarczy obrać $k_1 = 1$). Następnie obierzmy wskaźnik m_1 tak, by

$$P_1 - (q_1 + \cdots + q_s) \begin{cases} \geq A & \text{dla } s < m_1, \\ < A & \text{dla } s = m_1 \end{cases}$$

i oznaczmy

$$Q_1 = q_1 + \cdots + q_{m_1}.$$

Mamy zatem

$$P_1 > A, \quad A - q_{m_1} \leq P_1 - Q_1 < A.$$

Powtarzając opisane postępowanie utwórzmy wyrażenie

$$P_2 = p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2}$$

w taki sposób, by

$$P_1 - Q_1 + (p_{k_1+1} + \cdots + p_s) \begin{cases} \leq A & \text{dla } k_1 < s < k_2, \\ > A & \text{dla } s = k_2, \end{cases}$$

wówczas

$$A < P_1 - Q_1 + P_2 \leq A + p_{k_2}.$$

Następnie obierzmy wskaźnik m_2 tak, by

$$P_1 - Q_1 + P_2 - (q_{m_1+1} + \cdots + q_s) \begin{cases} \geq A & \text{dla } m_1 < s < m_2, \\ < A & \text{dla } s = m_2, \end{cases}$$

i niech

$$Q_2 = q_{m_1+1} + \cdots + q_{m_2},$$

wówczas

$$A - q_{m_2} \leq P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 < A.$$

Opisana konstrukcja sum P_1, Q_1, P_2, Q_2 jest wykonalna dzięki rozbieżności obu szeregów (15) - oczywiście tą samą własność mają szeregi powstałe z nich przez skreślenie pewnej skończonej ilości wyrazów. Ciągi sum częściowych tych szeregów są rozbieżne do ∞ i wobec tego sumując dostatecznie dostatecznie dużą ilość wyrazów można przekroczyć każdą z góry daną liczbę. Kontynuując tą konstrukcję możemy utworzyć dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$ sumy

$$S_{2r} = P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + \cdots + P_r - Q_r, \quad S_{2r-1} = P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + \cdots + P_r$$

gdzie

$$P_j = p_{k_{j-1}+1} + \cdots + p_{k_j}, \quad Q_j = q_{m_{j-1}+1} + \cdots + q_{m_j},$$

przy czym zachodzą nierówności

$$(16) \quad k_j \geq j, \quad m_j \geq j$$

oraz

$$(17) \quad A < S_{2r-1} \leq A + p_{k_r}, \quad A - q_{m_r} \leq S_{2r} < A.$$

Oczywiście każdy wyraz szeregu (α) znajdzie się w pewnej sumie P_j lub w pewnej sumie $-Q_j$. Z nierówności (16) wynika, że ciągi wskaźników $\{k_j\}, \{m_j\}$ są rozbieżne do ∞ . Ponieważ na mocy założenia zbieżności szeregu (α) jego ogólny wyraz a_n dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$, mamy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_{k_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} q_{m_r} = 0.$$

Do dowolnego $\varepsilon > 0$ można więc dobrać liczbę R tak, by dla $r > R$ zachodziły nierówności

$$0 < p_{k_r} < \varepsilon, \quad 0 < q_{m_r} < \varepsilon$$

a to oznacza wobec (17), że

$$A < S_{2r-1} < A + \varepsilon, \quad A - \varepsilon < S_{2r} < A$$

dla $r > R$. Zatem

$$(18) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} S_{2r-1} = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{2r} = A.$$

Rozważmy teraz szereg

$$(19) \quad P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + \cdots + P_r - Q_r + \cdots .$$

Ciąg jego sum częściowych jest przeplatanką ciągów $\{S_{2r-1}\}$ oraz $\{S_{2r}\}$ więc na mocy (18) jest on zbieżny do granicy A (por. zadanie 4 rozdz.II §1). Mamy zatem

$$(20) \quad (p_1 + \cdots + p_{k_1}) - (q_1 + \cdots + q_{m_1}) + (p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2}) - (q_{m_1+1} + \cdots + q_{m_2}) + \cdots + (p_{k_{r-1}+1} + \cdots + p_{k_r}) - (q_{m_{r-1}+1} + \cdots + q_{m_r}) + \cdots = A.$$

Zgodnie z twierdzeniem w szeregu (20) można opuścić nawiasy nie zmieniając jego sumy. Otrzymany w ten sposób szereg zawiera wszystkie wyrazy szeregu (α) lecz w zmienionej kolejności i jego suma jest równa danej z góry liczbie A . Punkt (i) został udowodniony.

Przechodząc do punktu (ii) pokażemy, że zmieniając odpowiednio kolejność wyrazów szeregu (α) można otrzymać szereg rozbieżny do ∞ . Wobec rozbieżności pierwszego z szeregów (15) możemy utworzyć ciąg sum

$$P_1 = p_1 + \cdots + p_{k_1}, \quad P_j = p_{k_{j-1}+1} + \cdots + p_{k_j} \quad (j = 2, 3, \dots)$$

tak, aby

$$(21) \quad P_1 > 1, \\ S_{2r-1} = P_1 - q_1 + P_2 - q_2 + \cdots + P_{r-1} - q_{r-1} + P_r > r \quad \text{dla } r = 2, 3, \dots$$

Z nierówności (21) wynika, że

$$(22) \quad S_{2r} = P_1 - q_1 + P_2 - q_2 + \cdots + P_r - q_r > r - q_r.$$

Ponieważ podobnie jak w dowodzie punktu (i) stwierdzamy, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q_r = 0$$

z oszacowań (21), (22) wynika, że

$$(23) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} S_{2r} = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{2r-1} = \infty.$$

Ciąg sum częściowych szeregu

$$(24) \quad P_1 - q_1 + P_2 - q_2 + \cdots + P_r - q_r + \cdots$$

jest przeplatanką ciągów $\{S_{2r}\}$ i $\{S_{2r-1}\}$ zatem wobec (23) jest również rozbieżny do ∞ . Wobec tego szereg (24), który możemy zapisać inaczej w postaci

$$(24') \quad (p_1 + \dots + p_{k_1}) - q_1 + (p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2}) - q_2 + \dots + (p_{k_{r-1}+1} + \dots + p_{k_r}) - q_r + \dots$$

jest rozbieżny do nieskończoności i zgodnie z twierdzeniem 3 to samo dotyczy szeregu powstałego z (24') przez opuszczenie nawiasów. Szereg ten zawiera wszystkie wyrazy szeregu (α) lecz w zmienionej kolejności i jest rozbieżny do ∞ .

Proponujemy, by Czytelnik samodzielnie zakończył dowód punktu (ii) wykazując, że przez odpowiednią zmianę kolejności wyrazów w szeregu (α) można otrzymać szereg rozbieżny do $-\infty$. \square

♡ ♡ ♡

5. Mnożenie szeregów nieskończonych. Gdy mnożymy przez siebie dwie sumy skończone, reguła jest prosta i dobrze znana Czytelnikowi z kursu szkolnego: mnożymy każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy a następnie dodajemy otrzymane iloczyny. Reguła ta wynika z aksjomatu (9a) zapewniającego rozdzielność mnożenia względem dodawania (rozd. I §1 punkt 1). Powstaje pytanie, czy można ją przenieść na przypadek mnożenia przez siebie dwóch szeregów nieskończonych

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Częściową odpowiedź daje

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że oba szeregi (α) , (β) są bezwzględnie zbieżne i niech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = B^*.$$

Załóżmy następnie, że ciąg $\{p_n\}$ jest utworzony z iloczynów częściowych postaci $a_k b_m$ ustawionych w dowolnej kolejności. Wówczas szereg

$$(\gamma) \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

jest również bezwzględnie zbieżny i jego suma jest równa AB .

DOWÓD. Niech P_n^* oznacza n -tą sumę częściową szeregu

$$(\gamma^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |p_n|.$$

W sumie tej występują iloczyny (być może nie wszystkie) postaci $|a_k||b_m|$ gdzie $k \leq k_n$, $m \leq m_n$, wobec tego

$$(25) \quad P_n^* \leq (|a_1| + \dots + |a_{k_n}|)(|b_1| + \dots + |b_{m_n}|) \leq A^* B^*.$$

Z nierówności (25) wynika, że szereg (γ^*) jest zbieżny, gdyż jest to szereg o wyrazach nieujemnych i jego ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry. Zatem szereg (γ) jest bezwzględnie zbieżny i możemy w nim

a.) dowolnie zmieniać kolejność wyrazów (twierdzenie 5),

b.) dowolnie łączyć wyrazy nawiasami (twierdzenie 5 §1) nie zmieniając jego sumy.

W szczególności rozważmy szereg

$$(\delta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n,$$

gdzie

$$d_1 = a_1 b_1, \quad d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1, \dots$$

$$d_n = a_1 b_n + a_2 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

W szeregu tym występuje każdy iloczyn $a_k b_m$ dokładnie raz, zatem zgodnie z tym, co udowodniliśmy przed chwilą, jego suma jest równa sumie szeregu (γ) . Oznaczając n -tą sumę częściową szeregu (α) , (β) (δ) odpowiednio przez A_n , B_n , D_n mamy

$$D_n = A_n \cdot B_n,$$

skąd po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ wynika, że suma szeregu (δ) (a więc i szeregu (γ)) jest równa AB . \square

$a_1 b_1$	$a_2 b_1$...	$a_n b_1$...
$a_1 b_2$	$a_2 b_2$...	$a_n b_2$...
...
...	$a_n b_{n-1}$...
$a_1 b_n$	$a_2 b_n$...	$a_n b_n$...
...
...

[rys. 53]

$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	$a_4 b_1$...
$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	$a_4 b_2$...
$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	$a_4 b_3$...
$a_1 b_4$	$a_2 b_4$	$a_3 b_4$	$a_4 b_4$...
...
...

[rys. 54]

Uwaga. Na rys. 53 pokazano jak można utworzyć z iloczynów częściowych $a_k b_m$ nieograniczoną prostokątną tablicę. Iloczyny występujące w sumach d_1, d_2, \dots, d_n są obramowane grubszą linią.

Z twierdzenia 7 wynika, że mnożąc szeregi bezwzględnie zbieżne możemy w dowolny sposób porządkować i łączyć w nawiasy iloczyny częściowe występujące w tablicy na

rys. 53. Specjalnie wygodny jest sposób podany schematycznie na rys. 54: łączymy w nawias wyrazy leżące na tej samej przekątnej zaznaczonej na rysunku przerywaną linią. Otrzymujemy w ten sposób szereg

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

gdzie

$$(27) \quad c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

Równość (27) można zapisać w postaci skróconej

$$(27') \quad c_n = \sum_{k+m=n+1} a_k b_m = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}.$$

Szereg określony wzorami (26), (27) nazywamy *iloczynem Cauchy'ego* szeregów (α) , (β) . Z twierdzenia 7 otrzymujemy jako wniosek

Twierdzenie 8. *Jeżeli szeregi (α) , (β) są bezwzględnie zbieżne i sumy ich wynoszą A , B odpowiednio, to ich iloczyn Cauchy'ego jest również bezwzględnie zbieżny i jego suma jest równa AB .*

Uwaga. Czasami rozważamy szeregi zaczynające się od wyrazu ze wskaźnikiem zero

$$(\alpha_0) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (\beta_0) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Wówczas ich iloczyn Cauchy'ego ma postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$a_0 b_0$	$a_1 b_0$	$a_2 b_0$	$a_3 b_0$
$a_0 b_1$	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$
$a_0 b_2$	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$
$a_0 b_3$	$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$

[rys. 55]

gdzie

$$(28) \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

czyli

$$(28') \quad c_n = \sum_{k+m=n} a_k b_m = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

(por. rys. 55). Oczywiście twierdzenie pozostaje prawdziwe przy takim ponumerowaniu wyrazów.

Przykład 6. Znajdźmy iloczyn Cauchy'ego szeregów (α) , (β) przyjmując

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Oba szeregi (α) , (β) mają więc tą samą postać

$$(29) \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Zgodnie ze wzorem (27')

$$c_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}.$$

Wyrażenie $|c_n|$ można łatwo oszacować z dołu opierając się na nierówności

$$(30) \quad 2ab \leq a^2 + b^2,$$

która jest równoważna oczywistej nierówności

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Korzystając z (30) dostajemy

$$(31) \quad |c_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} \geq \frac{2n}{n+1} \geq 1.$$

Z oszacowania (31) widać, że utworzony iloczyn Cauchy'ego nie jest zbieżny, gdyż jego ogólny wyraz c_n nie dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$ (por. twierdzenie 8 §1). Zauważmy, że zbieżność szeregu (29) wynika z twierdzenia Leibniza, gdyż jest to szereg naprzemienny a ciąg $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ dąży monotonicznie do zera. Natomiast szereg ten nie jest bezwzględnie zbieżny, szereg (α^*) ma bowiem postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest więc rozbieżny (por. Przykład 1 §2). W rozważanym przykładzie nie są zatem spełnione założenia twierdzenia 8.

Przykład 7. Znajdźmy iloczyn Cauchy'ego szeregów (α_0) , (β_0) przyjmując dla ustalonych $x, y \in \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad b_n = \frac{y^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Ze wzoru (28') mamy

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k},$$

zatem (por. punkt 8 rozdz. I §1)

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

czyli

$$c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Iloczyn Cauchy'ego jest zatem szeregiem postaci

$$(32) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Zauważmy, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!}$$

jest zbieżny dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, bowiem oznaczając jego ogólny wyraz przez d_n i stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|t|}{n+1} = 0.$$

Zatem oba szeregi (α_0) , (β_0) są w naszym przykładzie bezwzględnie zbieżne i możemy zastosować twierdzenie 8. Oznaczając

$$(33) \quad E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad (t \in \mathbb{R})$$

mamy wobec tego

$$(34) \quad E(x)E(y) = E(x+y)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Czytelnik zauważy na pewno, że tożsamość (34) prawdziwa jest dla funkcji wykładniczej. W dalszym ciągu zobaczymy, że rzeczywiście funkcja $E(t)$ określona jako suma szeregu wzorem (33) jest funkcją wykładniczą tzn. że zachodzi równość

$$E(t) = e^t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a.) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \text{b.) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$$

w zależności od parametru $x \in \mathbb{R}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$$

w zależności od parametru $x \in \mathbb{R}$. Czy szereg ten jest bezwzględnie zbieżny?

3. Dla jakich $\alpha > 0$ szereg o wyrazie ogólnym

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} & \text{(ii)} \quad a_n &= \frac{(-1)^n}{n(\log n)^\alpha} \\ \text{(iii)} \quad a_n &= \frac{(-1)^n}{n(\log n)(\log \log n)^\alpha} \end{aligned}$$

jest

- a.) warunkowo zbieżny,
- b.) bezwzględnie zbieżny?

Dla jakich n określone jest wyrażenie a_n w punktach (ii) i (iii)?

4. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest warunkowo zbieżny.

Wskazówka. Najpierw udowodnić, że szereg jest zbieżny po połączeniu nawiasami wyrazów tego samego znaku, następnie oprzeć się na twierdzeniu 3.

5. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

(przypominamy, że $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a).

Wskazówka. Najpierw okazać, że łącząc nawiasami wyrazy tego samego znaku można badany szereg przedstawić w postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k,$$

gdzie

$$\frac{2}{k+1} < b_k < \frac{2}{k}.$$

Następnie skasować nawiasy opierając się na twierdzeniu 3.

6. Udowodnić rozbieżność szeregu naprzemiennego

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

Dlaczego twierdzenie Leibniza nie stosuje się w tym przypadku?

Wskazówka. Znaleźć sumę częściową o wskaźniku parzystym.

7. Udowodnić, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest bezwzględnie zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

jest również bezwzględnie zbieżny.

8. Udowodnić, że jeżeli oba szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są zbieżne i jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 7.

9. Niech s oznacza sumę szeregu anharmonicznego (Przykład 2). Udowodnić, że

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2}s.$$

Wskazówka. Oznaczając przez S_k sumę częściową badanego szeregu okazać najpierw, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{3k} = \frac{3}{2}s$$

oraz że taką samą granicę mają ciągi $\{S_{3k-1}\}$ i $\{S_{3k-2}\}$.

10. Udowodnić indukcyjnie nierówność

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} > \frac{k}{4} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

11. W szeregu anharmonicznym (Przykład 2) przestawiamy wyrazy w następujący sposób:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^8} - 1 + \frac{1}{2^8 + 2} + \dots + \frac{1}{2^{16}} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{8(k-1)} + 2} + \dots + \frac{1}{2^{8k}} - \frac{1}{2k-1} + \dots$$

Udowodnić, że otrzymany szereg jest rozbieżny.

Wskazówka. Oznaczając

$$q_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^8} - 1, \quad q_k = \frac{1}{2^{8(k-1)} + 2} + \dots + \frac{1}{2^{8k}} - \frac{1}{2k-1} \quad (k \geq 2)$$

i opierając się na zadaniu 10 udowodnić, że

$$q_1 + q_2 + \dots + q_k > k.$$

12. Opierając się na zadaniu 55 rozdz. III §4 udowodnić, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k} &= \frac{1}{2} \log k + \frac{1}{2}C + \alpha_k, \\ 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} &= \log 2 + \frac{1}{2} \log k + \frac{1}{2}C + \beta_k, \end{aligned}$$

gdzie C jest stałą Eulera a ciągi $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ są zbieżne do zera.

13. Udowodnić, że szereg anharmoniczny (Przykład 2) ma sumę $\log 2$.

Wskazówka. Oznaczając przez S_n sumę częściową szeregu anharmonicznego udowodnić najpierw, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \log 2$$

opierając się na zadaniu 12.

14. W szeregu anharmonicznym (Przykład 2) zmieniamy kolejność wyrazów następująco: najpierw dodajemy p wyrazów dodatnich, potem q wyrazów ujemnych, potem ponownie p wyrazów dodatnich i q wyrazów ujemnych itd. Udowodnić, że otrzymany szereg ma sumę $\log(2\sqrt{p/q})$. Porównać z Przykładem 5 oraz z zadaniami 9, 13.

Wskazówka. Najpierw rozważyć szereg, w którym wyrazy jednakowego znaku połączono nawiasami i znaleźć jego sumy częściowe S_{2n} , S_{2n-1} opierając się na zadaniu 12. Następnie wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \log(2\sqrt{p/q})$$

i skasować nawiasy opierając się na twierdzeniu 3.

15. Sprawdzić, że zachodzi równość

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

(przyjmujemy $0! = 1$).

16. Niech

$$c_0 = 1, \quad c_n = y^n + xy^{n-1} + x^2y^{n-2} + \dots + x^{n-1}y + x^n \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

jest zbieżny dla $x, y \in (0, 1)$ oraz znaleźć jego sumę.

Wskazówka. Przedstawić badany szereg jako iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów.

17. Zakładając, że $|x| < 1$ znaleźć kwadrat (tj. iloczyn przez siebie) w sensie Cauchy'ego szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

i podać jego sumę.

18. Załóżmy, że $|x| < 1$ oraz że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

jest bezwzględnie zbieżny. Oznaczając sumę tego szeregu przez $D(x)$ udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} (d_0 + d_1 + \cdots + d_n)x^n$$

jest bezwzględnie zbieżny oraz że jego suma jest równa

$$\frac{D(x)}{1-x}.$$

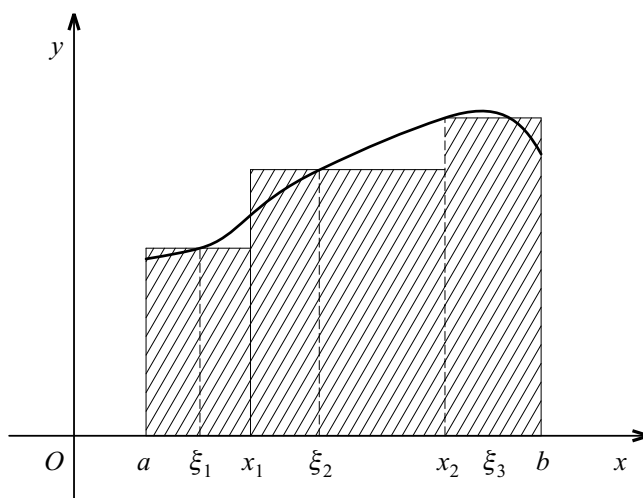
Wskazówka - jak w zadaniu 16.

Rachunek całkowy.

♡ ♡ ♡

§1. Całka funkcji ciągłej.

1. Obliczanie pola pod wykresem funkcji nieujemnej. Postawmy następujące zadanie: Dana jest funkcja $f(x)$ ciągła i nieujemna w przedziale $[a, b]$. Obliczyć pole obszaru płaskiego Ω ograniczonego wykresem funkcji f , osią x -ów i prostymi $x = a$, $x = b$ równoległymi do osi y -ów (rys. 56). Zaczniemy od opisu prostej konstrukcji, która pozwala znaleźć przybliżoną wartość szukanego pola.



[rys. 56]

¹⁰ Dzielimy przedział $[a, b]$ na k mniejszych przedziałów przy pomocy punktów

$$x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Podział ten (oznaczymy go jako Π) możemy zapisać przy pomocy nierówności

$$(1) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = b.$$

2⁰ W każdym z mniejszych przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$ wybieramy *punkt pośredni*

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

3⁰ Znajdujemy wartość funkcji $f(\xi_j)$ i obliczamy pole P_j prostokąta, którego jeden bok stanowi odcinek $[x_{j-1}, x_j]$ leżący na osi x -ów a drugi bok ma długość $f(\xi_j)$. Oznaczając

$$(2) \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

mamy więc

$$P_j = f(\xi_j) \Delta x_j.$$

4⁰ Suma pól wszystkich prostokątów P_j

$$S = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta x_j$$

daje przybliżoną wartość pola obszaru Ω . Oczywiście przybliżenie jest tym lepsze im drobniejszy jest podział Π tzn. im mniejsza jest liczba

$$d = \max_j \Delta x_j.$$

Liczbę tą nazwiemy *średnicą podziału* Π .

Rozważmy teraz ciąg podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i niech $d(\Pi_n)$ oznacza średnicę podziału Π_n . Założymy, że

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(\Pi_n) = 0.$$

Ciąg podziałów spełniający warunek (3) nazywamy *ciągami normalnymi podziałów*. Dla każdego podziału Π_n możemy teraz wykonać opisaną konstrukcję i utworzyć sumę S_n wprowadzoną w punkcie 4⁰. Z warunku (3) wynika, że im większe jest n tym drobniejszy jest podział Π_n a zatem tym lepiej suma S_n przybliży pole obszaru Ω . Jeżeli istnieje granica

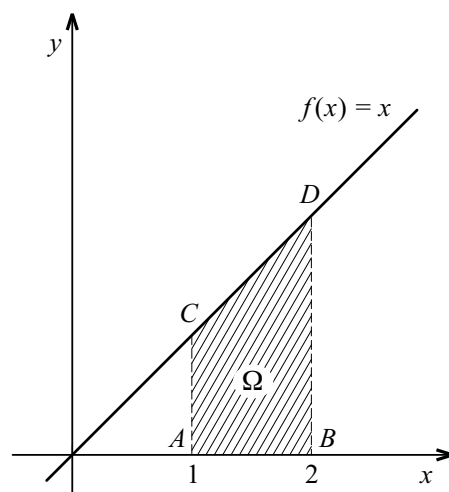
$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = G,$$

to możemy uważać, że liczba G określa pole obszaru Ω .

Postępując bardziej formalnie możemy przyjąć równość (4) jako *definicję pola obszaru* Ω . Czytelnik spotkał się już z pojęciem pola figury płaskiej w kursie szkolnym, obliczając pola różnego typu wielokątów. Jak widać z rys. 56, przyjęta przez nas definicja pola pozwala rozważać znacznie ogólniejszą klasę figur płaskich. W dalszym ciągu zobaczymy, że w przypadku wielokątów nowa definicja pola pokrywa się z definicją szkolną (por. Przykłady 1, 2, 4 oraz zadanie 27).

Przykład 1. Rozważmy funkcję

$$f(x) = x$$



[rys. 57]

w przedziale $[1, 2]$ i niech Π_n oznacza podział odcinka $[1, 2]$ na n równych części. Punkty podziału (1) są zatem określone wzorem

$$x_j = 1 + \frac{j}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

przy czym zgodnie z (2)

$$\Delta x_j = \frac{1}{n}.$$

Wobec tego

$$d(\Pi_n) = \frac{1}{n}$$

i rozważany ciąg podziałów spełnia warunek (3), jest więc ciągiem normalnym podziałów odcinka $[1, 2]$. Przy ustalonym n punkt pośredni ξ_j obierzemy w lewym końcu przedziału $[x_{j-1}, x_j]$ tzn. przyjmiemy

$$\xi_j = 1 + \frac{j-1}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Suma S_n (nazwiemy ją *sumą przybliżoną*) ma postać

$$S_n = \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{j-1}{n}\right) \frac{1}{n},$$

czyli po sprowadzeniu wyrażenia w nawiasie do wspólnego mianownika

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (n + j - 1)$$

co można inaczej zapisać

$$(5) \quad S_n = \frac{1}{n^2}(n^2 + p_n)$$

gdzie

$$(6) \quad p_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1).$$

Ponieważ (por. rozdz.I §1 zadanie 10(a))

$$(7) \quad p_n = \frac{(n - 1)n}{2},$$

więc z równości (5) dostajemy

$$S_n = 1 + \frac{n - 1}{2n}$$

i po przejściu do granicy

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}.$$

Obliczona liczba G stanowi pole obszaru Ω (rys. 57), który w naszym przykładzie jest trapezem o podstawach AC , BD i wysokości AB . Oczywiście możemy znaleźć pole tego trapezu stosując regułę znaną z kursu szkolnego. Otrzymujemy ten sam wynik $\frac{3}{2}$.

Przykład 2. Rozważając tą samą funkcję f i ten sam ciąg podziałów przedziału $[1, 2]$ co w Przykładzie 1, obierzmy inaczej punkty pośrednie przyjmując

a.) $\xi'_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$ (środek przedziału $[x_{j-1}, x_j]$)

lub

b.) $\xi''_j = x_j$ (prawy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$).

W przypadku a.) mamy

$$\xi'_j = 1 + \frac{2j - 1}{2n} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

suma przybliżona ma więc postać

$$S'_n = \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{2j - 1}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

czyli po prostych przekształceniach

$$S'_n = 1 + \frac{q_n}{2n^2},$$

gdzie

$$q_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Wyrażenie q_n można przedstawić w postaci

$$q_n = (1 + 2 + 3 + \dots + 2n - 1) - 2(1 + 2 + \dots + (n - 1)),$$

co daje (por. wzory (6), (7))

$$q_n = \frac{2n(2n - 1)}{2} - 2 \frac{n(n - 1)}{2},$$

czyli po skróceniu i redukcji

$$q_n = n^2.$$

Zatem

$$S'_n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

niezależnie od n .

W przypadku b.) dostajemy

$$\xi_j'' = 1 + \frac{j}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

suma przybliżona ma więc postać

$$S''_n = \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{j}{n}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

czyli po przekształceniu

$$S''_n = 1 + \frac{p_{n+1}}{n^2},$$

gdzie wyrażenie p_{n+1} jest określone wzorem (6). Wobec tego

$$S''_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

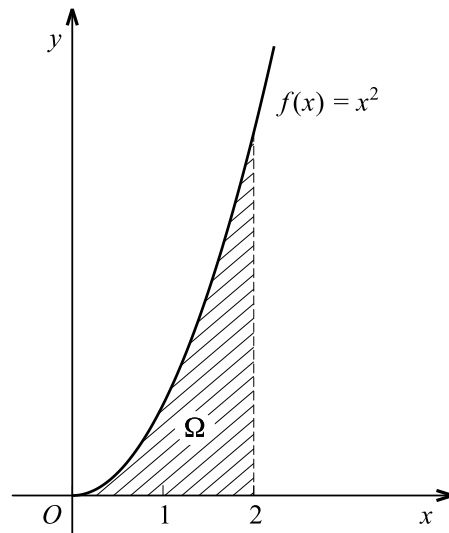
i podobnie jak poprzednio otrzymujemy po przejściu do granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = \frac{3}{2}.$$

Zauważmy, że w Przykładach 1, 2 otrzymujemy tą samą granicę ciągu sum przybliżonych niezależnie od sposobu, w jaki wybieramy punkty pośrednie.

Przykład 3. Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^2$$



[rys. 58]

w przedziale $[0, 2]$ i niech Π_n oznacza podział odcinka $[0, 2]$ na n równych części. Punkty podziału są określone wzorem

$$x_j = \frac{2j}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

stąd

$$\Delta x_j = \frac{2}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

a więc

$$d(\Pi_n) = \frac{2}{n},$$

skąd widać, że warunek (3) jest spełniony. Ciąg $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów odcinka $[0, 2]$. Przy ustalonym n obierzemy punkt pośredni ξ_j w lewym końcu przedziału $[x_{j-1}, x_j]$, zatem

$$\xi_j = \frac{2(j-1)}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

i suma przybliżona ma postać

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{4(j-1)^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n},$$

czyli

$$S_n = \frac{8}{n^3} r_n,$$

gdzie

$$r_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2.$$

Ponieważ (por. rozdz. I §1 zadanie 10(b))

$$r_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

otrzymujemy po skróceniu

$$S_n = \frac{4}{3} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2},$$

a więc po przejściu do granicy

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{8}{3}.$$

Zatem pole obszaru Ω zakreskowanego na rys. 58 wynosi $\frac{8}{3}$.

Przykład 4. Wróćmy do funkcji

$$f(x) = x$$

rozważanej w przykładach 1, 2. Ciąg podziałów $\{\Pi_n\}$ określimy następująco: Podział Π_1 polega na podzieleniu przedziału $[1, 2]$ na połowy; dokonując podziału Π_2 każdy z otrzymanych poprzednio odcinków dzielimy ponownie na połowy - zatem cały przedział $[1, 2]$ zostaje podzielony na 4 równe części; ogólnie, każdy podział Π_n otrzymujemy dzieląc na połowy każdy z odcinków otrzymanych przy podziale Π_{n-1} - zatem cały przedział $[1, 2]$ zostaje podzielony na 2^n równych części. Utworzony w taki sposób ciąg podziałów nazywamy *ciągami dwójkowym*. Punkty x_j otrzymane przy podziale Π_n przy ustalonym n mają postać

$$x_j = 1 + \frac{j}{2^n} \quad (j = 0, 1, \dots, 2^n),$$

a stąd

$$\Delta x_j = \frac{1}{2^n} \quad (j = 1, 2, \dots, 2^n),$$

a więc

$$d(\Pi_n) = \frac{1}{2^n},$$

skąd widać, że warunek (3) jest spełniony. Ciąg dwójkowy podziałów jest ciągiem normalnym. Przy ustalonym n jako punkt pośredni ξ_j obierzemy lewy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$, zatem

$$\xi_j = 1 + \frac{j-1}{2^n} \quad (j = 1, 2, \dots, 2^n)$$

i wobec tego suma przybliżona ma postać

$$S_n = \sum_{j=1}^{2^n} \left(1 + \frac{j-1}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2^n},$$

co po przekształceniu daje

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{2n}} \cdot p_{2^n}$$

przy czym zgodnie z (6), (7)

$$p_{2^n} = \frac{2^n(2^n - 1)}{2}.$$

Wobec tego

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

Po przejściu do granicy dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$$

a więc ten sam wynik co w przykładach 1, 2.

2. Całka funkcji ciągłej w przedziale domkniętym. Załóżmy teraz, że f jest dowolną funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ mogącą przyjmować wartości różnych znaków. Powtarzając konstrukcję opisaną w punkcie 1 rozważmy podział Π przedziału $[a, b]$ opisany nierównościami

$$(8) \quad \Pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

oraz układ punktów pośrednich $\xi(\Pi) = \{\xi_j\}$ spełniających warunek

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

i utwórzmy sumę przybliżoną

$$(9) \quad S(f, \Pi, \xi(\Pi)) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta x_j,$$

gdzie, podobnie jak poprzednio,

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Podział Π opisany nierównościami (8) możemy utożsamić ze zbiorem punktów

$$\{x_0, x_1, \dots, x_k\}.$$

Będziemy mówili, że podział $\bar{\Pi} = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ jest *zagęszczeniem* podziału Π , jeżeli zawiera on wszystkie punkty tego podziału tzn. jeżeli spełniony jest warunek

$$\Pi \subset \bar{\Pi}.$$

Udowodnimy

Twierdzenie 1. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wówczas istnieje liczba rzeczywista G taka, że dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i dowolnego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$

$$(10) \quad G = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)).$$

DOWÓD. Dla uproszczenia zapisu przyjmiemy oznaczenie

$$(11) \quad S_n = S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)).$$

Zacznijmy od udowodnienia, że ciąg $\{S_n\}$ ma granicę (być może zależną od sposobu, w jaki zostały obrane ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$). Dowód oprzemy na następującym lemacie:

Lemat. Do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla dowolnych podziałów $\Pi, \bar{\Pi}$ spełniających warunki

$$d(\Pi) < \delta, \quad \Pi \subset \bar{\Pi}$$

i dowolnego wyboru punktów pośrednich $\xi(\Pi), \xi(\bar{\Pi})$ zachodziła nierówność

$$(12) \quad |S - \bar{S}| < \varepsilon,$$

gdzie

$$S = S(f, \Pi, \xi(\Pi)), \quad \bar{S} = S(f, \bar{\Pi}, \xi(\bar{\Pi})).$$

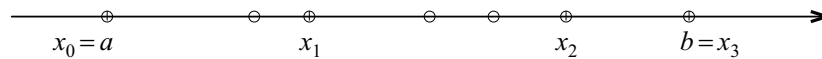
DOWÓD LEMATU. Niech

$$\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}, \quad \bar{\Pi} = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\bar{k}}\},$$

wówczas odpowiednie sumy przybliżone można zapisać w postaci

$$(13) \quad S = \sum_{s=1}^k f(\xi_s) \Delta x_s, \quad \bar{S} = \sum_{s=1}^k \sum_{j \in A_s} f(\bar{\xi}_j) \Delta \bar{x}_j,$$

gdzie A_s przy ustalonym s oznacza zbiór tych wskaźników j , dla których $\bar{x}_j \in (x_{s-1}, x_s]$. Zapis ten zilustrowany jest na rys. 59, gdzie oznaczono kresczką punkty podziału Π zaś kółeczkiem punkty jego zagęszczenia $\bar{\Pi}$.



[rys. 59]

Mamy

$$\bar{\Pi} : a = x_0 = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 = x_1 < \bar{x}_3 < \bar{x}_4 < \bar{x}_5 = x_2 < \bar{x}_6 = x_3 = b,$$

przy czym

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{3, 4, 5\}, \quad A_3 = \{6\}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta \bar{x}_1 + \Delta \bar{x}_2, \\ \Delta x_2 &= \Delta \bar{x}_3 + \Delta \bar{x}_4 + \Delta \bar{x}_5, \\ \Delta x_3 &= \Delta \bar{x}_6. \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku

$$\Delta x_s = \sum_{j \in A_s} \Delta \bar{x}_j,$$

a stąd wobec (13)

$$(14) \quad |S - \bar{S}| \leq \sum_{s=1}^k \sum_{j \in A_s} |f(\xi_s) - f(\bar{\xi}_j)| \Delta \bar{x}_j.$$

Dla ustalonego s wszystkie punkty pośrednie ξ_s oraz $\bar{\xi}_j$, $j \in A_s$ leżą w przedziale $[x_{s-1}, x_s]$. Funkcja f jako funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest w tym przedziale jednostajnie ciągła, możemy więc dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by z warunku $d(\Pi) < \delta$ wynikała nierówność

$$|f(\xi_s) - f(\bar{\xi}_j)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (s = 1, \dots, k; j \in A_s).$$

Wówczas z (14) dostajemy

$$|S - \bar{S}| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot D,$$

gdzie

$$D = \sum_{s=1}^k \sum_{j \in A_s} \Delta \bar{x}_j = \sum_{s=1}^k \Delta x_s = b - a,$$

a stąd wynika nierówność (12), co kończy dowód lematu. \square

Wracając do dowodu twierdzenia 1 rozważmy dwie sumy przybliżone postaci (11) odpowiadające podziałom Π_k , Π_m i układom punktów pośrednich $\xi(\Pi_k)$, $\xi(\Pi_m)$ odpowiednio. Wspólnym zagęszczeniem podziałów Π_k , Π_m jest podział

$$\bar{\Pi} = \Pi_k \cup \Pi_m.$$

Oznaczając przez \bar{S} sumę przybliżoną odpowiadającą podziałowi $\bar{\Pi}$ mamy

$$|S_k - S_m| \leq |S_k - \bar{S}| + |\bar{S} - S_m|,$$

a stąd po zastosowaniu lematu (z zastąpieniem ε przez $\frac{\varepsilon}{2}$) dostajemy

$$(15) \quad |S_k - S_m| < \varepsilon$$

o ile spełnione są nierówności

$$(16) \quad d(\Pi_k) < \delta, \quad d(\Pi_m) < \delta.$$

Ponieważ założyliśmy, że $d(\Pi_n) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, do liczby δ można dobrać N tak, by dla $k, m > N$ spełniony był warunek (16). Ostatecznie widzimy, że liczba N została dobrana do ε tak, że dla $k, m > N$ spełniona jest nierówność (15) - a to oznacza, że ciąg $\{S_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny.

Rozważmy teraz dwa ciągi normalne podziałów $\{\Pi_n\}$, $\{\bar{\Pi}_n\}$, wybierzmy układy punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$ oraz $\xi(\bar{\Pi}_n)$ i niech

$$S_n = S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)), \quad \bar{S}_n = S(f, \bar{\Pi}_n, \xi(\bar{\Pi}_n)).$$

Udowodniliśmy, że oba ciągi $\{S_n\}$, $\{\bar{S}_n\}$ mają granicę. Niech zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = g, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = \bar{g}$$

i przypuśćmy, że $g \neq \bar{g}$. Tworząc przeplatankę

$$S_1, \bar{S}_1, S_2, \bar{S}_2, \dots, S_n, \bar{S}_n, \dots$$

otrzymujemy ciąg sum przybliżonych, który nie jest zbieżny, gdyż zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Ciąg ten odpowiada ciągowi normalnemu podziałów przedziału $[a, b]$

$$\Pi_1, \bar{\Pi}_1, \Pi_2, \bar{\Pi}_2, \dots, \Pi_n, \bar{\Pi}_n, \dots$$

a więc w myśl udowodnionej już części twierdzenia powinien być zbieżny. Przypuszczenie, że granice g , \bar{g} są różne prowadzi zatem do sprzeczności. Wobec tego granica ciągu $\{S_n\}$ nie może zależeć ani od wyboru ciągu normalnego podziałów ani od sposobu obrania punktów pośrednich. Granica ta jest liczbą G , o której mowa w tezie twierdzenia. \square

Granice G określoną równością (10) nazywamy *całką oznaczoną* (lub krócej: *całką*) *funkcji f w przedziale $[a, b]$* i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x) dx$$

(czytamy: całka od a do b $f(x) dx$). Zgodnie z twierdzeniem 1

$$(17) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i dowolnego wyboru punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$ przy założeniu, że funkcja f jest ciągła w $[a, b]$. Wyrażenie

$$S(f, \Pi, \xi(\Pi)) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta x_j$$

nazywamy *sumą przybliżoną całki* (17) odpowiadającą podziałowi Π .

3. Własności całki oznaczonej. Całka oznaczona funkcji ciągłej jest, jak wiemy, granicą pewnego ciągu sum. Z twierdzenia, które udowodnimy, widać, że całka ma własności analogiczne do własności sumy skończonej. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 2. Załóżmy, że f, g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$. Wówczas

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \text{(ii)} \quad & \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad \text{dla dowolnej stałej } c \in \mathbb{R}, \\ \text{(iii)} \quad & \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

DOWÓD. Dla dowodu obierzmy ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$. Wówczas zgodnie ze wzorem (9)

$$(18) \quad S(f + g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) + S(g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)),$$

$$(19) \quad S(cf, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = cS(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)),$$

$$(20) \quad |S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n))| \leq S(|f|, \Pi_n, \xi(\Pi_n)).$$

Przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ we wzorach (18), (19), (20) i opierając się na równości (17) dostajemy punkty (i), (ii), (iii) tezy twierdzenia. \square

Uwaga. Punkty (i), (ii) wyrażają ważną własność całki zwaną *liniowością*.

W podobny sposób można udowodnić

Twierdzenie 3 (o podziale przedziału całkowania). Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i niech $a < c < b$. Wówczas

$$(21) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

DOWÓD. Niech Π będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$ zawierającym punkt c tzn określonym nierównościami

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = c < x_{p+1} < \cdots < x_k = b.$$

Podział ten wyznacza dwa podziały

1^o przedziału $[a, c]$

$$\Pi^* : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = c$$

oraz

2^o przedziału $[c, b]$

$$\Pi^{**} : c = x_p < x_{p+1} < \cdots < x_k = b.$$

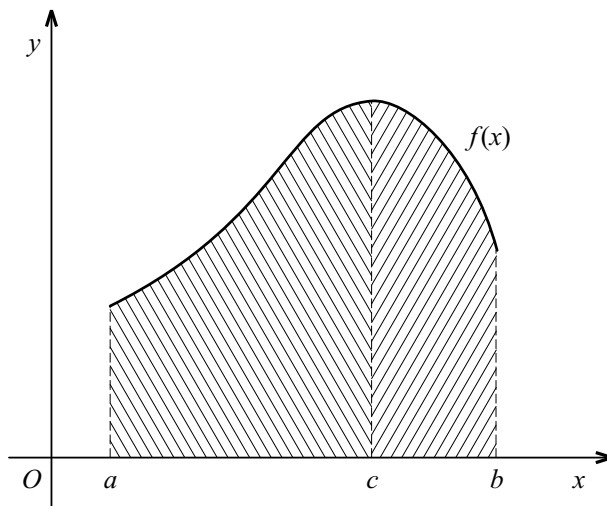
Obierając w dowolny sposób punkty pośrednie $\xi(\Pi)$ oznaczmy przez S^* , S^{**} sumy przybliżone odpowiadające podziałom Π^* , Π^{**} odpowiednio. Wówczas oczywiście

$$(22) \quad S(f, \Pi, \xi(\Pi)) = S^* + S^{**}.$$

Obierzmy teraz ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ w taki sposób, by dla każdego n punkt c był jednym z punktów podziału Π_n (możemy to zrobić np. dzieląc każdy z przedziałów $[a, c]$ i $[c, b]$ na n równych części). Obierając dowolnie punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$ możemy przy ustalonym n powtórzyć rozumowanie przeprowadzone na początku dowodu. Przyjmując oznaczenie (11) mamy zgodnie z (22)

$$S_n = S_n^* + S_n^{**},$$

a stąd po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ dostajemy w oparciu o (17) tezę twierdzenia. \square



[rys. 60]

Jeżeli funkcja f jest nieujemna, twierdzenie o podziale przedziału całkowania ma prosty sens geometryczny zilustrowany na rys. 60: obszar ograniczony wykresem funkcji f w przedziale $[a, b]$, osią x -ów i prostymi $x = a$, $x = b$ został podzielony na dwa obszary odpowiadające przedziałom $[a, c]$ i $[c, b]$ (na rysunku zakreskowane pionowo i poziomo), zaś z rozważań punktu 1 wynika, że całki występujące w równości (21) są równe polu odpowiednich obszarów.

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 4 (monotoniczność całki). Jeżeli funkcje f , g są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i spełniają nierówność

$$(23) \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

to

$$(24) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

DOWÓD. Obierając ciąg normalny $\{\Pi_n\}$ podziałów przedziału $[a, b]$ i punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$ mamy wobec (23)

$$S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) \leq S(g, \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

a stąd po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ wynika (24). \square

Przykład 5. Obliczmy całkę

$$\int_0^b x^3 dx \quad (b > 0).$$

Zgodnie z równością (17) należy obrać ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[0, b]$ i punkty pośrednie $\xi(\Pi_n)$, utworzyć sumy przybliżone i przejść do granicy przy $n \rightarrow \infty$. Określmy Π_n jako podział przedziału $[0, b]$ na n równych części, wówczas

$$x_j = j \frac{b}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

oraz

$$\Delta x_j = \frac{b}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Przy ustalonym n umieścimy punkt pośredni ξ_j w prawym końcu przedziału $[x_{j-1}, x_j]$, zatem

$$\xi_j = x_j = j \frac{b}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

i wobec tego suma przybliżona ma postać

$$S_n = \frac{b}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{jb}{n} \right)^3.$$

W celu obliczenia granicy zapiszemy sumę S_n jako

$$S_n = b \frac{x_n}{y_n},$$

gdzie

$$x_n = \sum_{j=1}^n (jb)^3, \quad y_n = n^4$$

i zastosujemy twierdzenie Stolza (twierdzenie 11 rozdz.II §2) (zauważmy, że ciąg $y_n = n^4$ spełnia założenia twierdzenia). Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = b \lim_{n \rightarrow \infty} w_n,$$

gdzie

$$w_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^3 b^3}{n^4 - (n-1)^4}.$$

Ponieważ

$$n^4 - (n-1)^4 = (n^2 - (n-1)^2)(n^2 + (n-1)^2) = (2n-1)(2n^2 - 2n + 1)$$

więc

$$w_n = b^3 \frac{n^3}{(2n-1)(2n^2-2n+1)}$$

i dzieląc w ostatnim wyrażeniu licznik i mianownik przez n^3 dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{b^3}{4}.$$

Wobec tego

$$\int_0^b x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b^4}{4}.$$

Przykład 6. Rozważmy funkcję *Dirichleta*

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych.} \end{cases}$$

(por. rozdział II §1 zadanie 11). Niech Π będzie dowolnym podziałem ustalonego przedziału $[a, b]$. Jak wiemy (por. rozdz. I §2 Twierdzenie 5 i zadanie 6), w każdym przedziale (x_{j-1}, x_j) leżą zarówno liczby wymierne jak i niewymierne. Wobec tego obierając dowolnie ciąg normalny $\{\Pi_n\}$ podziałów przedziału $[a, b]$ możemy

(i) przyjąć, że wszystkie punkty pośrednie są wymierne, wówczas dla dowolnego n suma przybliżona ma postać

$$S_n = \sum_{j=1}^{k_n} \Delta x_j = b - a$$

lub

(ii) przyjąć, że wszystkie punkty pośrednie są niewymierne, wówczas dla dowolnego n

$$S_n = 0.$$

Mamy zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} b - a & \text{w przypadku (i),} \\ 0 & \text{w przypadku (ii)} \end{cases}$$

a więc granica ciągu $\{S_n\}$ zależy od sposobu obrania punktów $\xi(\Pi_n)$. Funkcja Dirichleta jest funkcją nieciągłą (nie jest ciągła w żadnym punkcie - proponujemy Czytelnikowi udowodnienie tego), dlatego nie stosuje się do niej twierdzenie 1.

4. Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego. Jak Czytelnik na pewno zauważył, metoda liczenia całki oznaczonej na podstawie definicji zastosowana w Przykładzie 5 jest dość uciążliwa - wymaga utworzenia ciągu sum przybliżonych i obliczenia jego granicy, co w przypadku bardziej skomplikowanej funkcji f może okazać się niewykonalne. Twierdzenie, które teraz udowodnimy, podaje metodę obliczania całki oznaczonej bez odwoływania się do definicji. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale IP .

Mówimy, że funkcja F jest *funkcją pierwotną* (lub krócej: *pierwotną*) funkcji f w tym przedziale, jeżeli jest ona różniczkowalna i zachodzi równość

$$F'(x) = f(x)$$

dla $x \in \mathbb{I}$ (w punktach końcowych przedziału przez pochodną rozumiemy pochodną jednostronną).

Twierdzenie 5 (zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego). *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i niech F będzie jej pierwotną w przedziale $[a, b]$. Wówczas*

$$(25) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

DOWÓD. Dla dowolnego podziału Π przedziału $[a, b]$ mamy po zastosowaniu twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

$$(26) \quad F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^k [F(x_j) - F(x_{j-1})] = \sum_{j=1}^k f(\bar{x}_j) \Delta x_j.$$

Jeżeli teraz $\{\Pi_n\}$ jest ustalonym ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, to możemy przy dowolnie ustalonym n obrać jako punkty pośrednie punkty \bar{x}_j występujące w równości (26) (są one narzucone przez twierdzenie Lagrange'a). Wówczas dla każdego n

$$S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = F(b) - F(a),$$

co w granicy przy $n \rightarrow \infty$ daje (25). □

Uwaga 1. Przyjęte są oznaczenia

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = [F(x)]_a^b.$$

Uwaga 2. Jeżeli F jest pierwotną funkcji f , to $F_1 = F + C$, gdzie C jest dowolną stałą, również jest pierwotną tej funkcji (por. rozdz. III §4 wzory (7), (24)). Łatwo również wykazać, że dowolne dwie pierwotne F, G funkcji f różnią się o stałą. Mamy bowiem

$$F'(x) - G'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{I}),$$

a stąd na mocy twierdzenia 13 rozdz. III §4 wynika istnienie stałej C takiej, że

$$F(x) - G(x) = C.$$

Jak widać z postaci wzoru (25), w celu obliczenia całki po lewej stronie możemy wybrać dowolną pierwotną funkcji f , gdyż stała C dodana do F redukuje się po prawej stronie wzoru.

Przykład 7. Obliczmy pole P zawarte między wykresem funkcji $f(x) = \sin x$ a osią x -ów w przedziale $[0, \pi]$. Jak wiemy z punktu 1

$$(27) \quad P = \int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

Aby zastosować twierdzenie 5 zauważmy, że jedną z funkcji pierwotnych jest

$$F(x) = -\cos x$$

gdyż

$$(-\cos x)' = \sin x.$$

Wobec tego

$$P = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

Przykład 8. Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^2 x^4 \, dx.$$

Podobnie jak w Przykładzie 7 możemy łatwo odgadnąć jedną z funkcji pierwotnych, a mianowicie

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5,$$

gdyż

$$\left(\frac{1}{5}x^5\right)' = \frac{1}{5}(5x^4) = x^4.$$

Zgodnie z twierdzeniem 5

$$\int_{-1}^2 x^4 \, dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^2 = \frac{1}{5}(32 + 1) = \frac{33}{5}.$$

Przykład 9. Obliczyć całkę

$$\int_a^b \alpha \, dx,$$

gdzie α jest stałą. Jako funkcję pierwotną można przyjąć

$$F(x) = \alpha x$$

gdyż

$$(\alpha x)' = \alpha,$$

zatem

$$(28) \quad \int_a^b \alpha \, dx = \alpha(b - a).$$

Korzystając z (28) i opierając się na twierdzeniu 2 punkt (iii) oraz na twierdzeniu 4 otrzymujemy łatwo

Wniosek 1. *Jeżeli*

$$|f(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in [a, b],$$

to

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$$

Dotychczas rozważaliśmy całkę oznaczoną w przedziale $[a, b]$ zakładając oczywiście, że $a < b$. Ze względów rachunkowych wygodnie jest uogólnić przyjętą definicję na przypadek gdy $a \geq b$. Przyjmujemy

$$(29) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{gdy } a > b,$$

$$(30) \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Przy tak rozszerzonej definicji całki wzór (25) pozostaje słuszny, również słuszne pozostają reguły rachunkowe podane w twierdzeniu 2 (i), (ii).

Twierdzenie 3 o podziale przedziału całkowania możemy teraz sformułować ogólniej:

Twierdzenie 3'. *Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale \mathbb{I} . Wówczas dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{I}$ zachodzi (21).*

DOWÓD. Zakładając $a < b$ rozważmy przypadki

$$(i) \quad c < a, \quad (ii) \quad a < c < b, \quad (iii) \quad b < c.$$

Przypadek (ii) był już rozważany. Opierając się na twierdzeniu 3 mamy

$$\int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

w przypadku (i) oraz

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

w przypadku (iii). Obie równości dają (21) po uwzględnieniu (29). Dowód gdy $a > b$ pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Odgadywanie funkcji pierwotnej zastosowane w przykładach 7 i 8 nie zawsze się udaje. W dalszym ciągu poznamy reguły rachunkowe pozwalające znajdować funkcję pierwotną dla wielu klas funkcji f . Na razie udowodnimy

Twierdzenie 6. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale \mathbb{I} i niech $a \in \mathbb{I}$. Wówczas funkcja

$$(31) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

jest różniczkowalna w przedziale \mathbb{I} i przy tym

$$(32) \quad F'(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{I}.$$

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że x_0 jest punktem wewnętrznym przedziału \mathbb{I} i że h jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Mamy

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt, \quad F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt,$$

zatem korzystając z twierdzenia o podziale przedziału całkowania możemy iloraz różnicowy $\Phi(h)$ zapisać w postaci

$$(33) \quad \Phi(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Ponadto zauważmy, że zgodnie z (28)

$$(34) \quad \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = f(x_0).$$

Z (33), (34) dostajemy

$$(35) \quad \Phi(h) - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt.$$

Z założenia ciągłości funkcji f wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $|t - x_0| < \delta$ zachodziła nierówność

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Opierając się na twierdzeniu 2 (iii) i twierdzeniu 4 możemy oszacować lewą stronę (35). Otrzymujemy dla $0 < h < \delta$

$$|\Phi(h) - f(x_0)| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon,$$

a to oznacza, że

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \Phi(h) = f(x_0).$$

Okazaliśmy więc, że funkcja F ma w punkcie x_0 pochodną prawostronną x_0 i że zachodzi równość

$$F'_+(x_0) = f(x_0).$$

W podobny sposób dowodzimy, że funkcja F ma w punkcie x_0 pochodną lewostronną i że zachodzi równość

$$F'_-(x_0) = f(x_0).$$

Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 1 rozdz. III §4 funkcja F ma pochodną w punkcie x_0 i przy tym

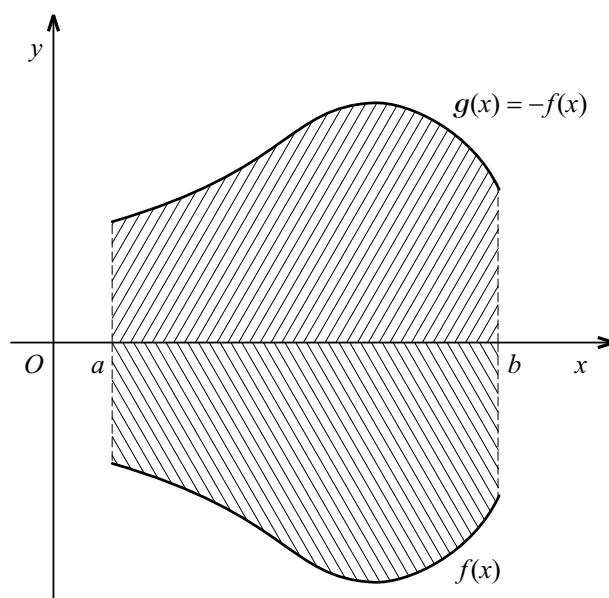
$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Jeżeli x_0 jest jednym z punktów końcowych przedziału \mathbb{IP} , to przez pochodną we wzorze (32) należy rozumieć pochodną jednostronną. Dowód przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. \square

Z twierdzenia 6 wynika, że każda funkcja ciągła f ma pierwotną określoną wzorem (31). Wzór ten nie daje jednak metody rachunkowej pozwalającej na znalezienie pierwotnej - aby wyznaczyć funkcję F należałoby obliczyć całkę oznaczoną po prawej stronie, a to możemy zrobić dopiero po uprzednim znalezieniu pierwotnej funkcji f .

Z rozważań punktu 1 wynika, że w przypadku funkcji $f(x)$ nieujemnej całka

$$\int_a^b f(x) dx$$



[rys. 61]

może być uważana za miarę pola obszaru zawartego w przedziale $[a, b]$ między wykresem funkcji a osią x -ów. Jeżeli $f(x) \leq 0$ w przedziale $[a, b]$, to oczywiście funkcja $g(x) = -f(x)$ jest w tym przedziale nieujemna zaś jej wykres powstaje z wykresu funkcji f przez odbicie w osi x -ów. Wynika stąd, że obszar ograniczony wykresem funkcji f i

osią x -ów (na rys. 61 zakreskowany poziomo) ma takie samo pole jak obszar ograniczony wykresem funkcji g i osią x -ów (na rys. 61 zakreskowany pionowo). Z drugiej strony mamy zgodnie z twierdzeniem 2

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b g(x) dx$$

a stąd wynika, że pole P obszaru zawartego w przedziale $[a, b]$ między wykresem funkcji f a osią x -ów można obliczyć ze wzoru

$$P = - \int_a^b f(x) dx.$$

Przykład 10. Znajdziemy pole P zawarte między wykresem funkcji $f(x) = \cos x$ w przedziale $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ a osią x -ów. Ponieważ $\cos x \leq 0$ w rozważanym przedziale, mamy

$$P = - \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx.$$

Jako funkcję pierwotną można przyjąć

$$F(x) = \sin x,$$

gdyż

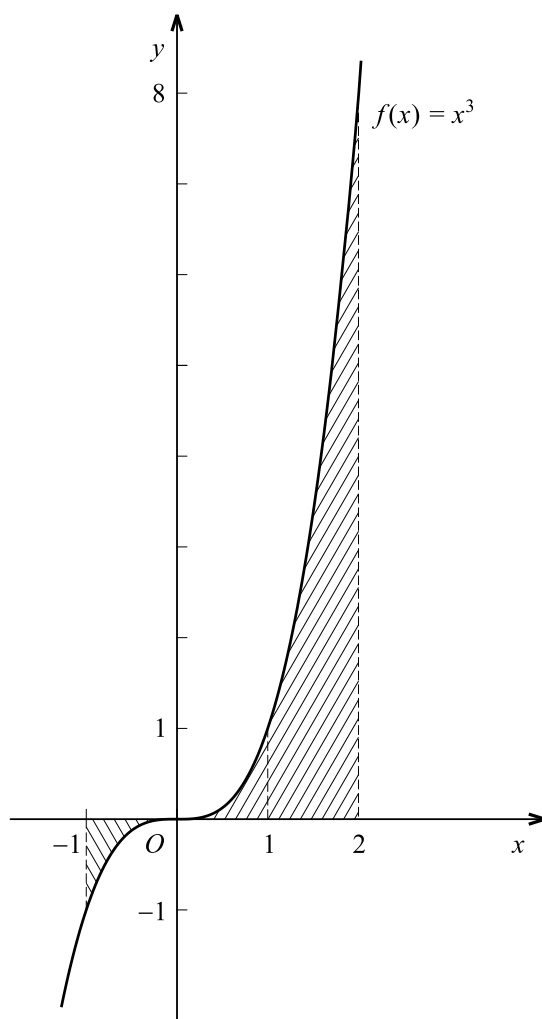
$$(\sin x)' = \cos x.$$

Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 5

$$P = - \left[\sin x \right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = -(-1 - 1) = 2.$$

Przykład 11. Znajdziemy pole P ograniczone wykresem funkcji $f(x) = x^3$ w przedziale $[-1, 2]$, osią x -ów i prostymi $x = -1$, $x = 2$ (rys. 62). Rozważany obszar składa się z dwóch części: leżącej pod osią x -ów (zakreskowanej poziomo) i leżącej nad osią x -ów (zakreskowanej pionowo). Oznaczając ich pola przez P_1, P_2 mamy

$$P_1 = - \int_{-1}^0 x^3 dx, \quad P_2 = \int_0^2 x^3 dx.$$



[rys. 62]

Funkcją pierwotną jest

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

gdyż

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3.$$

Zgodnie z twierdzeniem 5

$$P_1 = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4,$$

zatem

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}.$$

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Naszkicować wykres funkcji $f(x)$ i obliczyć pole zawarte między wykresem a osią x -ów w podanym przedziale, jeżeli

$$\text{a.) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{przedział } \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right];$$

$$\text{b.) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{przedział } \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right];$$

$$\text{c.) } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{przedział } \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right];$$

$$\text{d.) } f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{przedział } [e, e^3];$$

$$\text{e.) } f(x) = e^{3x}, \quad \text{przedział } [0, 1].$$

Wskazówka. Szukane pole zapisać przy pomocy całki oznaczonej, następnie zastosować twierdzenie 5.

2. Niech P będzie prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, którego jeden z wierzchołków leży w początku układu zaś wierzchołek przeciwny na paraboli $y = x^2$. Okazać, że parabola ta dzieli pole prostokąta P w stosunku 1 : 2.

Wskazówka. Pole zawarte między parabola a osią x -ów wyrazić przy pomocy całki oznaczonej, następnie zastosować twierdzenie 5.

3. Obliczyć pole zawarte między wykresem funkcji $f(x)$ a osią x -ów, jeżeli

$$\text{a.) } f(x) = \sin x, \quad -\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi; \quad \text{b.) } f(x) = x^p \quad (p \in \mathbb{N}), \quad -a \leq x \leq a.$$

Wskazówka. Szukane pole zapisać przy pomocy całki lub sumy całek i zastosować twierdzenie 5. Zwrócić uwagę na znak funkcji f w rozważanym przedziale!

4. Obliczyć całkę

$$\int_0^b x^p dx \quad (p \in \mathbb{N}, \quad \text{ustalone})$$

stosując wzór (17) i przyjmując, że Π_n jest podziałem odcinka $[0, b]$ na n równych części, zaś przy ustalonym n jako punkt pośredni ξ_j obieramy

a.) prawy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$,

b.) lewy koniec tego przedziału.

Sprawdzić otrzymany wynik obliczając całkę w oparciu o twierdzenie 5.

Wskazówka. Przy obliczaniu granicy ciągu sum przybliżonych oprzeć się na twierdzeniu Stolza (rozd. II §2 twierdzenie 11).

5. Obliczyć całki

$$\text{a.) } \int_0^b x^2 dx \quad (b > 0), \text{ b.) } \int_0^b x^3 dx \quad (b > 0)$$

stosując wzór (17) i przyjmując, że Π_n jest podziałem odcinka $[0, b]$ na 2^n równych części, zaś przy ustalonym n jako punkt pośredni ξ_j ($j = 1, 2, \dots, 2^n$) obieramy prawy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$. Otrzymany wynik porównać z zadaniem 3.

Wskazówka. Przy obliczaniu granicy ciągu sum przybliżonych zastosować zadania 10, 11 rozdz. I §1.

6. Z twierdzenia 4 wynika, że nierówności zachodzące między funkcjami ciągłymi można całkować. Pokazać na przykładzie, że nierówności nie można różniczkować tzn. że z nierówności

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

(gdzie f, g są funkcjami różniczkowalnymi) nie wynika na ogół nierówność

$$f'(x) \leq g'(x) \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

7. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że z nierówności

$$A \leq f(x) \leq B \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

wynika oszacowanie całki

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq B(b-a).$$

Podać sens geometryczny tego oszacowania w przypadku funkcji f o wartościach dodatnich. Wskazówka. Zastosować twierdzenie 4 i Przykład 9.

8. Niech f, g będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że

a.) z nierówności

$$f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

wynika

$$\int_a^b f(x) dx > 0;$$

b.) z nierówności

$$f(x) > g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

wynika

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$$

Wskazówka. Najpierw udowodnić, że

$$m = \inf_{[a,b]} f > 0$$

opierając się na twierdzeniu Weierstrassa (twierdzenie 12 rozdz. III §3), następnie zastosować twierdzenie 4 do nierówności

$$f(x) \geq m \quad (x \in [a, b]).$$

Punkt b.) sprowadzić do punktu a.).

9. Załóżmy, że f, g są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ i że spełnione są nierówności

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

oraz

$$f(x) > g(x) \quad \text{dla } x \in (c, d),$$

gdzie $a \leq c < d \leq b$. Udowodnić, że

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

Wskazówka. Podzielić przedział całkowania, następnie oprzeć się na zadaniu 8 i na twierdzeniu 4.

10. Podać przykłady funkcji f, g spełniających warunki sformułowane w zadaniach 8, 9 i sprawdzić, że zachodzą podane w tych zadaniach nierówności dla całek.

11. Niech f będzie funkcją ciągłą nieujemną w przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że z warunku

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

wynika

$$f(x) = 0 \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Wskazówka. Zaprzeczając tezę okazać najpierw, że istnieje przedział $[c, d]$ ($a \leq c < d \leq b$) w którym f jest stale dodatnia. Następnie oprzeć się na zadaniu 9.

12. Udowodnić nierówność

$$2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Wskazówka. Najpierw oszacować z góry i z dołu całkę

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

wykorzystując zadanie 7.

13. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

Wskazówka. Skorzystać z zadania 13.

14. Niech

$$g(x) = \frac{1}{x^s} \quad (0 < s < 1).$$

Opierając się na nierówności

$$g(k+1) \leq \int_k^{k+1} g(x) dx \leq g(k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

(por. zadanie 7) wykazać, że ciąg

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} g(k) - \int_1^n g(x) dx$$

jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 1. Jaki stąd wynika wniosek?

15. Wykazać ponownie, że ciąg $\{u_n\}$ określony w zadaniu 15 jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 1, opierając się na interpretacji geometrycznej wyrażenia u_n jako sumy pól pewnych obszarów.

16. Udowodnić zbieżność ciągu

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \quad (0 < s < 1).$$

Wskazówka. Skorzystać z zadania 15. W celu obliczenia całki odgadnąć funkcję pierwotną i oprzeć się na twierdzeniu 5.

17. Obliczyć granice ciągów

$$u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad w_n = n^{-(p+1)} (1^p + 2^p + \dots + n^p) \quad (p > 0).$$

Wskazówka. Przedstawić n -ty wyraz ciągu jako sumę przybliżoną pewnej całki, następnie obliczyć tę całkę odgadując funkcję pierwotną. Wykorzystać twierdzenie 5 i wzór (17).

18. Zróżniczkować funkcje

$$(i) \quad f(x) = \int_0^x \sin(1+t^2) dt,$$

$$(ii) \quad f(x) = \int_0^{x^2} e^{2t^3} dt,$$

$$(iii) \quad f(x) = \int_{-x}^0 \sqrt{1+t^2} dt,$$

$$(iv) \quad f(x) = \int_{-x}^{2x} \cos(1+t^3) dt.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 6. W punkcie (iv) podzielić najpierw przedział całkowania.

19. Niech w będzie wielomianem stopnia $\leq n$ spełniającym warunek

$$\int_0^1 x^k w(x) dx = 0 \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n.$$

Udowodnić, że wszystkie współczynniki wielomianu w są równe zeru.

Wskazówka. Zauważyć, że

$$\int_0^1 (w(x))^2 dx = 0$$

i wykorzystać zadanie 11.

20. Udowodnić, że ciąg

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$$

jest zbieżny oraz że stała

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

(zwana *stałą Eulera* por. zadanie 55 rozdz.III §4) leży w przedziale $[0, 1]$.

Wskazówka. Opierając się na zadaniu 7 udowodnić nierówność

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

następnie skorzystać z równości (uzasadnić ją!)

$$(36) \quad \log n = \int_1^n \frac{dx}{x}.$$

21. Wykazać, że ciąg

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log n$$

jest rosnący i ograniczony z góry, opierając się na interpretacji geometrycznej wyrażenia v_n jako sumy pól pewnych obszarów. Wywnioskować stąd, że

- (i) ciąg $\{u_n\}$ rozważany w zadaniu 21 jest zbieżny,
- (ii) zachodzi równość

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n,$$

przy czym stała Eulera C leży w przedziale $[0, 1]$.

Opierając się na punkcie (ii) podać interpretację geometryczną stałej Eulera.

Wskazówka. Skorzystać z (36).

22. Opierając się na zadaniu 21 udowodnić, że dla naturalnych p, q ($q > p$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=np}^{nq} \frac{1}{k} = \log \frac{q}{p}.$$

23. Niech

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^{\alpha} \quad (\alpha > -1).$$

Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Wskazówka. Opierając się na zadaniu 7 oszacować najpierw całkę

$$\int_k^{k+1} x^{\alpha} dx.$$

Następnie oszacować z góry i z dołu wyrażenie u_n i zastosować twierdzenie o trzech ciągach. W którym miejscu dowodu wykorzystuje się ciągłość funkcji potęgowej?

24. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale \mathbb{P} . Udowodnić, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{P}$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

Wskazówka. Rozważyć przypadki $a < b$, $a > b$, $a = b$ i oprzeć się na twierdzeniu 2.

25. Zakładając, że g jest ciągła w przedziale $(-\infty, \infty)$ udowodnić ciągłość funkcji

$$f(x) = \int_0^x g(x+t) dt$$

w dowolnym punkcie x_0 .

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 2 i zadaniu 25 udowodnić najpierw nierówność

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \left| \int_0^{x_0} |g(x_0 + h + t) - g(x_0 + t)| dt \right| + \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |g(x_0 + h + t)| dt \right|.$$

Następnie wykorzystać jednostajną ciągłość (twierdzenie 9 rozdz. III §3) i ograniczoność (twierdzenie 12 rozdz. III §3) funkcji g .

26. Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych dane są punkty $A = (a, 0)$, $B = (c, d)$, przy czym $a > 0$, $d > 0$. Opierając się na interpretacji geometrycznej całki obliczyć pole trójkąta OAB . Porównać ze wzorem znanym z geometrii elementarnej.

27. Niech f będzie funkcją liniową w każdym z przedziałów $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ i spełniającą warunki

$$\text{a.) } f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = -1, \quad f(3) = 0,$$

$$\text{b.) } f(0) = 0, \quad f(1) = 5, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = -1.$$

Podać wzór określający funkcję f w każdym z podanych przedziałów i obliczyć całkę

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

dwoma sposobami:

1^o korzystając z wzorów określających funkcję f oraz z twierdzeń 3 i 5,

2^o opierając się na interpretacji geometrycznej całki jako pola.

Sprawdzić, że funkcja F jest różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P} = [0, 3]$ i że zachodzi równość

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{P}).$$

Wskazówka. Narysować wykres funkcji f .

28. Załóżmy, że pręt niejednorodny o długości l wypełnia przedział $[0, l]$ osi x -ów, przy czym gęstość pręta określa funkcja ciągła $f(x)$ ($0 \leq x \leq l$). Uzasadnić, że masę m pręta można obliczyć stosując wzór

$$m = \int_0^l f(x) dx.$$

Wskazówka. Rozumować podobnie, jak w punkcie 1.

§2. Całkowanie efektywne.



1. Całka nieoznaczona. Niech F, G będą pierwotnymi funkcji f w przedziale \mathbb{P} , wówczas

$$G'(x) - F'(x) = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{P},$$

a stąd na mocy twierdzenia 13 rozdz. III §4 wynika istnienie stałej C takiej, że

$$(1) \quad G(x) = F(x) + C \quad \text{dla } x \in \mathbb{P}.$$

Na odwrót, jeżeli F jest pierwotną funkcji f , to każda funkcja G postaci (1) również jest pierwotną tej funkcji. Można więc powiedzieć, że wzór (1) określa ogólną postać funkcji pierwotnej. Każdą z funkcji G określonych wzorem (1) nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f w przedziale \mathbb{P} i oznaczamy symbolem

$$\int f(x) dx.$$

Mamy zatem równość

$$(2) \quad \int f(x) dx = F(x) + C \quad (x \in \mathbb{P}),$$

gdzie F jest dowolnie obraną pierwotną w przedziale \mathbb{P} , zaś C dowolną stałą (zwaną *stałą całkowania*).

Zauważmy, że zgodnie z wprowadzoną terminologią słowo "całka" użyte bez przymiotnika oznacza dwa różne pojęcia:

całka oznaczona $\int_a^b f(x) dx$ jest liczbą przyporządkowaną ciągłej funkcji f w przedziale $[a, b]$, w przypadku funkcji nieujemnej jest to miara pola zawartego między wykresem a osią x -ów,

całka nieoznaczona $\int f(x) dx$ jest funkcją określoną w pewnym przedziale \mathbb{P} , która po zróżniczkowaniu daje w tym przedziale funkcję podcałkową f .

Z twierdzenia 5 §1 wynika, że między tymi dwoma pojęciami zachodzi prosty związek rachunkowy. Obliczanie całki oznaczonej sprowadza się zatem do znajdowania całki nieoznaczonej (czynność tą nazywamy *całkowaniem*).

2. Wzory rachunkowe dla całek nieoznaczonych. Ze wzorów dotyczących różniczkowania funkcji udowodnionych w rozdz. III §4 i §5 wynikają podane dalej wzory dla całek nieoznaczonych (przypominamy, że symbolem \log oznaczamy *logarytm naturalny* tzn.

logarytm o podstawie e - por. rozdz. III §1 punkt 8):

$$(3) \quad \int \alpha dx = \alpha x + C, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

w przedziale $(-\infty, \infty)$;

$$(4) \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \alpha \neq -1$$

w przedziale $(0, \infty)$;

$$(5) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$;

$$(6) \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0)$$

$$(7) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

w przedziale $(-\infty, \infty)$;

$$(8) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

w każdym przedziale, w którym mianownik funkcji podcałkowej nie znika;

$$(9) \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

w przedziale $(-\infty, \infty)$;

$$(10) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C \quad \text{oraz} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\operatorname{arccos} x + C$$

w przedziale $(-1, 1)$;

$$(11) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{ar} \sinh x + C = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

w przedziale $(-\infty, \infty)$

$$(12) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{ar} \cosh x + C = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C$$

w przedziale $(1, \infty)$

Sprawdzenie każdego z tych wzorów polega na zróżniczkowaniu prawej strony, co powinno dać w wyniku funkcję podcałkową po lewej stronie. Przykładowo sprawdzimy wzór (5). Dla $x > 0$ mamy

$$(\log|x| + C)' = (\log x + C)' = \frac{1}{x}$$

zaś dla $x < 0$ stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej dostajemy

$$(\log |x| + C)' = (\log(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Sprawdzenie pozostałych wzorów (3) - (12) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Równie łatwo, w oparciu o udowodnione w rozdz. III §4 własności pochodnych, otrzymujemy reguły:

$$(13) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

oraz

$$(14) \quad \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

Dla sprawdzenia (13) wystarczy zauważyć, że różniczkując sumę po prawej stronie otrzymujemy $f(x) + g(x)$ a więc funkcję podcałkową po lewej stronie. Podobnie sprawdzamy (14).

Podamy jeszcze dwie reguły rachunkowe odgrywające ważną rolę w rachunku całkowym.

Twierdzenie 1 (o całkowaniu przez części). *Jeżeli funkcje f, g mają ciągłą pochodną w przedziale \mathbb{P} , to*

$$(15) \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

DOWÓD. Różniczkując prawą stronę otrzymujemy

$$(f(x)g(x))' - f'(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x),$$

co po redukcji daje funkcję podcałkową po lewej stronie wzoru (15). □

Twierdzenie 2 (o całkowaniu przez podstawienie). *Przy założeniu ciągłości funkcji f, y, y' zachodzi równość*

$$(16) \quad \int f(y(x))y'(x) dx = \int f(y) dy \quad (y = y(x)).$$

DOWÓD. Oznaczmy przez $F(y)$ prawą stronę, wówczas zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej dostajemy

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{d}{dy}F(y) \frac{dy}{dx} = f(y(x))y'(x),$$

a więc funkcję podcałkową po lewej stronie (16). □

Uwaga. Wzór (16) można inaczej zapisać w postaci

$$(16') \quad \int f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(y) dy,$$

z której widać, że symbol pochodnej zachowuje się jak zwykły ułamek - można "skracać" przez różniczkę dx . Dlatego przy stosowaniu wzoru na całkowanie przez podstawienie wygodnie jest używać zapisu różniczkowego

$$dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

co pozwala uniknąć błędów w bardziej skomplikowanych rachunkach.

3. Przykłady obliczania całek nieoznaczonych. Stosowanie reguł (15), (16) wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 1. Scałkować funkcję

$$u(x) = x \sin x \quad (x \in (-\infty, \infty)).$$

Ponieważ funkcja ma postać iloczynu, narzuca się reguła całkowania przez części (15). Powstaje pytanie, który czynnik traktować jako pochodną $g'(x)$. Spróbujmy przyjąć

$$f(x) = \sin x, \quad g'(x) = x$$

a więc

$$g(x) = \frac{x^2}{2},$$

zgodnie z (15) otrzymujemy

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx.$$

Po prawej stronie otrzymaliśmy całkę, której nie potrafimy odgadnąć i która wydaje się trudniejsza do obliczenia, niż całka wyjściowa (wykładnik potęgi podwyższył się!) Wykorzystajmy zatem drugą możliwość, przyjmując

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \sin x,$$

wówczas

$$g(x) = -\cos x$$

i reguła (15) daje

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx.$$

Całkę po prawej stronie można teraz łatwo odgadnąć, mianowicie

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

a stąd

$$(17) \quad \int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C.$$

Całkowanie przez części udało się, wyraziliśmy naszą całkę nieoznaczoną przy pomocy funkcji elementarnych.

Z podanego przykładu widać, że całkowanie przez części wymaga trafnej decyzji, który z czynników pod całką uważać za pochodną $g'(x)$ a który za funkcję $f(x)$. Na marginesie warto zaznaczyć, że przedstawienie jednego z czynników (w naszym rachunku wyrażenia $\sin x$) jako pochodnej wymaga odgadnięcia funkcji $g(x)$ czyli scałkowania "części" wyrażenia podcałkowego - stąd nazwa "całkowanie przez części".

Na zakończenie sprawdzimy, czy otrzymany wynik (17) jest poprawny - wszak nawet najlepszym rachmistrzom zdarzają się omyłki! W tym celu należy pokazać, że pochodna wyrażenia po prawej stronie jest równa funkcji podcałkowej po lewej. Różniczkując dostajemy

$$(\sin x - x \cos x + C)' = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$$

- zatem wynik (17) jest poprawny.

Przykład 2. Obliczyć całkę

$$P(x) = \int x^2 \cos x dx \quad (x \in (-\infty, \infty)).$$

Funkcja podcałkowa ma postać iloczynu, spróbujmy więc metody całkowania przez części. Nauczeni doświadczeniem z Przykładu 1 przyjmujemy

$$f(x) = x^2, \quad g'(x) = \cos x,$$

a więc

$$g(x) = \sin x.$$

Wzór (15) daje

$$P(x) = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

- udało się obniżyć wykładnik potęgi! Całka po prawej stronie była liczona w Przykładzie 1, ostatecznie dostajemy

$$P(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.$$

Proponujemy, by Czytelnik sprawdził przez różniczkowanie poprawność otrzymanego wyniku.

Przykład 3. Obliczyć całkę

$$Q(x) = \int x^3 e^x dx \quad (x \in (-\infty, \infty)).$$

Ponieważ funkcja podcałkowa ma postać iloczynu, spróbujemy metody całkowania przez części. Ze wzoru (15) widać, że należy przyjąć

$$g'(x) = e^x$$

a więc

$$g(x) = e^x,$$

gdyż wówczas po prawej stronie obniżymy wykładnik potęgi. Dostajemy

$$Q(x) = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx,$$

a stąd, dalej tą samą metodą

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right),$$

a więc ostatecznie

$$Q(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.$$

Proponujemy sprawdzić otrzymany wynik przy pomocy różniczkowania.

Przykład 4. Obliczyć całkę

$$\int \log x dx \quad (x \in (0, \infty)).$$

Aby zastosować metodę całkowania przez części przedstawimy funkcję podcałkową w postaci iloczynu dopisując czynnik 1. Przyjmiemy

$$f(x) = \log x, \quad g'(x) = 1,$$

zatem

$$g(x) = x$$

i wzór (15) daje

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\log x - 1) + C.$$

Przykład 5. Obliczyć całkę

$$A(x) = \int \frac{1}{x} \log x dx \quad (x \in (0, \infty)).$$

Tutaj również zastosujemy całkowanie przez części. Przyjmijmy

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \log x,$$

zatem (por Przykład 4)

$$g(x) = x(\log x - 1),$$

a stąd na podstawie (15)

$$A(x) = \log x - 1 + \int \frac{\log x}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx,$$

czyli po obliczeniu ostatniej całki (daje się odgadnąć, por. (5)) i redukcji

$$(18) \quad A(x) = A(x) - 1 + C.$$

Z równości (18) nie można wyznaczyć szukanej całki $A(x)$, wynika z niej jedynie, że jest prawdziwa gdy przyjmiemy $C = 1$. Być może niepowodzenie zostało spowodowane niewłaściwym wyborem funkcji $f(x)$ i $g'(x)$. Spróbujmy więc na odwrót, niech

$$f(x) = \log x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

zatem

$$g(x) = \log x$$

i z (15) otrzymujemy

$$A(x) = (\log x)^2 - A(x).$$

Ostatnią równość można traktować jako równanie z niewiadomą $A(x)$. Rozwiązując je otrzymujemy

$$A(x) = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$$

Zastanówmy się na zakończenie, co byliby, gdyśmy nie uwzględnili w równości (18) stałej całkowania C . Po redukcji dałoby to absurdalny wynik $0 = -1$. O stałej całkowania nie wolno zapominać!

Na zakończenie zauważmy, że całkę $A(x)$ można również obliczyć metodą całkowania przez podstawienie. Przyjmując

$$y = \log x$$

mamy

$$A(x) = \int y(x)y'(x) dx,$$

czyli zgodnie z (16)

$$A(x) = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + C,$$

zatem wracając do zmiennej x dostajemy wynik (otrzymany poprzednio inną metodą)

$$A(x) = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C.$$

A teraz kilka dalszych przykładów, w których zastosujemy regułę całkowania przez podstawienie (16).

Przykład 6. Obliczyć całkę

$$B(x) = \int 2xe^{x^2} dx \quad (x \in (-\infty, \infty)).$$

Funkcję podcałkową można zapisać w postaci

$$2xe^{x^2} = y'e^y$$

jeżeli przyjmiemy

$$(19) \quad y = x^2.$$

Stosując regułę (16) dostajemy

$$(20) \quad B(x) = \int e^y dy = e^y + C,$$

czyli po wykorzystaniu (19)

$$B(x) = e^{x^2} + C.$$

Używając zapisu różniczkowego możemy przeprowadzony rachunek przedstawić następująco: z (19) wynika, że

$$dy = \frac{dy}{dx} dx = 2x dx,$$

a więc

$$2xe^{x^2} dx = e^y dy$$

co daje (20).

Jak widzimy, regułę całkowania przez podstawienie można stosować z powodzeniem, jeżeli

1^o funkcja podcałkowa daje się przedstawić w postaci

$$f(y(x))y'(x)$$

oraz

2⁰ umiemy obliczyć całkę

$$\int f(y) dy.$$

A oto następne przykłady.

Przykład 7. Obliczyć całkę

$$J(x) = \int \frac{e^x + 2}{e^x + 2x + 3} dx \quad (x \in (-1, \infty)).$$

Przyjmując

$$(21) \quad y = e^x + 2x + 3$$

możemy funkcję podcałkową $f(x)$ zapisać w postaci

$$f(x) = \frac{1}{y(x)} y'(x).$$

W zapisie różniczkowym mamy

$$\frac{e^x + 2}{e^x + 2x + 3} dx = \frac{1}{y} dy,$$

zatem zgodnie z (16), (5)

$$J(x) = \int \frac{1}{y} dy = \log y + C$$

czyli po wykorzystaniu (21)

$$J(x) = \log(e^x + 2x + 3) + C$$

(zauważmy, że w rozważanym przedziale $y(x) > 0$).

Przykład 8. Obliczyć całkę

$$K(x) = \int \operatorname{tg} x dx \quad \left(x \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right), \quad k \text{ całkowite} \right).$$

Mamy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(-\sin x)}{\cos x} = -\frac{1}{y} y',$$

jeżeli oznaczymy

$$(22) \quad y = \cos x.$$

Wobec tego stosując reguły (14), (16) oraz wzór (5) otrzymujemy

$$K(x) = - \int \frac{1}{y} dy = - \log |y| + C,$$

czyli po wykorzystaniu (22)

$$(23) \quad K(x) = - \log |\cos x| + C.$$

W zapisie różniczkowym mamy uwzględniając (22)

$$- \sin x dx = dy,$$

a stąd

$$K(x) = - \int \frac{1}{\cos x} (-\sin x) dx = - \int \frac{1}{y} dy,$$

co również daje (23).

Przykład 9. Obliczyć całkę

$$P(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (x \in [-1, 1]).$$

Przyjmijmy

$$(24) \quad x = \sin t \quad (t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

wówczas w zapisie różniczkowym

$$dx = \cos t dt$$

zatem

$$(25) \quad P(x) = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt.$$

Proste przekształcenia trygonometryczne pozwalają funkcję podcałkową $g(t)$ w równości (25) zapisać w postaci

$$g(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t),$$

wobec tego zgodnie z (13), (14)

$$P(x) = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt.$$

Obie całki po prawej stronie dają się łatwo odgadnąć, co daje

$$P(x) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Aby otrzymać ostateczny wynik należy powrócić do zmiennej x . Z (24) wynika, że

$$t = \arcsin x,$$

oprócz tego

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2},$$

zatem

$$P(x) = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

W przeprowadzonym rachunku zastosowaliśmy przekształcenie opisane wzorem (16) w przeciwną stronę, niż w Przykładach 6, 7, 8 (jednocześnie zastępując oznaczenia x, y przez t, x) - zgodnie z podstawieniem (24) zastąpiliśmy funkcję

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

występującą pod całką po prawej stronie (16) przez iloczyn

$$f(x(t))x'(t) = \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t.$$

Czytelnik napewno zauważył, że zapis różniczkowy ułatwia zastosowanie reguły całkowania przez podstawienie.

Przykład 10. Obliczyć całkę

$$Q(x) = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0, x \in (-\infty, \infty)).$$

Podobnie, jak w przykładzie 9, zastosujemy regułę całkowania przez podstawienie odczytując wzór (16) "od prawej do lewej". Przyjmując

$$(26) \quad x = at$$

mamy w zapisie różniczkowym

$$dx = a dt,$$

a stąd

$$Q(x) = \int \frac{a}{a^2(1+t^2)} dt$$

czyli po zastosowaniu wzorów (14) i (9)

$$Q(x) = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \arctg t + C,$$

a stąd wobec (26)

$$Q(x) = \frac{1}{a} \arctg \left(\frac{x}{a} \right) + C.$$

Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie rachunku przez różniczkowanie.

Przykład 11. Na zakończenie obliczmy całkę

$$Q(x) = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right) dx \quad (x > 0),$$

którą można inaczej zapisać w postaci

$$Q(x) = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) dx.$$

Stosując wzory (13), (3), (4) dostajemy

$$Q(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 2x + C,$$

czyli

$$Q(x) = \left(\frac{2}{3}x + 2 \right) \sqrt{x} + 2x + C.$$

♡ ♡ ♡

4. Wzory rekurencyjne. Niech

$$J_n(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \quad \left(x \in (-\infty, \infty), n \in \mathbb{N} \right).$$

Ze wzoru (9) wynika, że

$$(27) \quad J_1(x) = \operatorname{arctg}x + C.$$

Dla $n > 1$ mamy

$$J_n(x) = \int \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^n} dx,$$

czyli po wykorzystaniu (13)

$$(28) \quad J_n(x) = J_{n-1}(x) - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx.$$

Całka po prawej stronie (28) może być obliczona metodą całkowania przez części, bowiem

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = -2(n-1) \frac{x}{(1+x^2)^n},$$

a stąd

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = -\frac{1}{2(n-1)} \int x \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \right) dx,$$

co zgodnie z regułą (15) daje

$$(29) \quad \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1}(x).$$

Ostatecznie z równości (28) i (29) dostajemy

$$(30) \quad J_n(x) = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}(x)$$

dla $n > 1$. Otrzymana zależność (30), pozwalająca wyrazić całkę J_n przez całkę J_{n-1} , nosi nazwę *wzoru rekurencyjnego*.

Przykład 12. Obliczyć całkę

$$J_3(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx \quad (x \in (-\infty, \infty)).$$

Zastosujemy wzór rekurencyjny (30). Wynika z niego, że

$$J_3(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{3}{4} J_2(x)$$

oraz

$$J_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} J_1(x),$$

co daje

$$J_3(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^3} - \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{8} J_1(x)$$

i ostatecznie, po wykorzystaniu (27),

$$(31) \quad J_3(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^3} - \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{8} \arctg x + C.$$

□

Wzory rekurencyjne pozwalają również obliczyć całki

$$(32) \quad P_n(x) = \int \sin^n x dx, \quad Q_n(x) = \int \cos^n x dx \quad (x \in (-\infty, \infty), n \in \mathbb{N}).$$

Dla $n = 1$ mamy zgodnie z (7)

$$(33) \quad P_1(x) = -\cos x + C, \quad Q_1(x) = \sin x + C.$$

Przyjmijmy dodatkowo

$$(34) \quad P_0(x) = Q_0(x) = \int dx = x + C.$$

Dla $n > 2$ możemy całkę $P_n(x)$ zapisać w postaci

$$P_n(x) = - \int (\sin^{n-1} x)(\cos x)' dx,$$

co po zastosowaniu reguły całkowania przez części (15) daje

$$P_n(x) = - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx,$$

czyli po uwzględnieniu tożsamości $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$P_n(x) = - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1)P_{n-2}(x) - (n-1)P_n(x).$$

Taki sam rachunek wykazuje, że ostatnia równość jest prawdziwa również dla $n = 2$. Traktując ją jako równanie z niewiadomą $P_n(x)$ otrzymujemy po rozwiązaniu

$$(35) \quad P_n(x) = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad (n \geq 2).$$

Podobne postępowanie możemy zastosować do całki $Q_n(x)$. Można jednak postąpić prościej korzystając z wyprowadzonego już wzoru (35). Zastosujmy w całce $Q_n(x)$ dla $n \geq 1$ podstawienie

$$(36) \quad x = \frac{\pi}{2} - t,$$

wówczas

$$dx = -dt$$

i zgodnie z regułą (16)

$$Q_n(x) = - \int \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) dt.$$

Ponieważ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

dostajemy

$$(37) \quad Q_n(x) = -P_n(t),$$

a stąd po uwzględnieniu (35), (36)

$$Q_n(x) = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(t)$$

dla $n > 2$. Dla $n = 2$ tożsamość trygonometryczna

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

daje

$$Q_2(x) = x - P_2(x).$$

Korzystając z (37), (38) oraz (35) dla $n = 2$ dostajemy ostatecznie

$$(39) \quad Q_n(x) = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} Q_{n-2}(x) \quad (n \geq 2).$$

Równości (35), (39) dają szukane wzory rekurencyjne dla całek (32).

Przykład 13. Całki

$$P_2(x) = \int \sin^2 x \, dx, \quad Q_2(x) = \int \cos^2 x \, dx$$

można obliczyć bezpośrednio korzystając z tożsamości trygonometrycznej

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

z której wynika, że

$$(40) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Obustronne scałkowanie równości (40) daje

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C, \quad Q_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

czyli

$$P_2(x) = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C, \quad Q_2(x) = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C.$$

Ten sam wynik otrzymujemy ze wzorów rekurencyjnych (35), (39) po uwzględnieniu (34).

Przykład 14. Ze wzorów (35), (39), po uwzględnieniu (33), dostajemy natychmiast

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C, \quad \int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C.$$

5. Całkowanie ułamków prostych. *Uławkami prostymi* nazywamy funkcje wymierne postaci

$$(41) \quad u_k(x) = \frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{oraz} \quad v_m(x) = \frac{Bx+D}{(x^2+bx+c)^m} \quad (k, m \in \mathbb{N}),$$

gdzie A, B, D, a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, zaś trójmian kwadratowy

$$t(x) = x^2 + bx + c$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych. Funkcje te możemy scałkować korzystając z podanych poprzednio reguł. Całkując $u_k(x)$ zastosujemy podstawienie

$$x - a = t,$$

wówczas w zapisie różniczkowym

$$dx = dt,$$

zatem

$$\int u_k(x) dx = A \int t^{-k} dt,$$

a stąd na mocy (4), (5)

$$(42) \quad \int u_k(x) dx = \begin{cases} A \log |x - a| + C & \text{dla } k = 1, \\ \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C & \text{dla } k \neq 1. \end{cases}$$

Aby scałkować funkcję $v_m(x)$ wygodnie jest najpierw sprowadzić trójmian $t(x)$ do postaci kanonicznej. Mamy mianowicie

$$t(x) = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot x + \frac{b^2}{4} \right) + c - \frac{b^2}{4}$$

czyli

$$(43) \quad t(x) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

gdzie

$$\alpha = -\frac{1}{2}b, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}, \quad \Delta = b^2 - 4c$$

(z założenia wyróżnik trójmianu Δ jest liczbą ujemną, zatem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Postać (43) trójmianu można również otrzymać w inny sposób. Pierwiastkami wielomianu $t(x)$ są liczby zespolone sprzężone

$$x_1 = \alpha + i\beta, \quad x_2 = \alpha - i\beta \quad (i^2 = -1),$$

zatem (por. twierdzenie C w następnym punkcie) wielomian $t(x)$ ma rozkład na czynniki liniowe

$$t(x) = (x - x_1)(x - x_2) = \left((x - \alpha) - i\beta \right) \left((x - \alpha) + i\beta \right),$$

co po wykonaniu mnożenia daje (43).

Uwzględniając (43) możemy funkcję $v_m(x)$ zapisać w postaci

$$(44) \quad v_m(x) = \frac{Bx + D}{\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right]^m} \quad (B, D, \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Całkowanie funkcji $v_m(x)$ zilustrujemy przykładem.

Przykład 15. Obliczyć całkę

$$v_3(x) = \int \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 3)^3} dx.$$

Trójmian kwadratowy w mianowniku ma wyróżnik

$$\Delta = -8 < 0$$

nie ma więc pierwiastków rzeczywistych, zatem wyrażenie podcałkowe jest ułamkiem prostym. Doprowadzimy je do postaci (44). Pierwiastkami trójmianu są liczby

$$x_1 = 1 + i\sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - i\sqrt{2},$$

zatem

$$\alpha = 1, \quad \beta = \sqrt{2}$$

i ostatecznie całkę można zapisać w postaci

$$v_3(x) = \int \frac{2x + 1}{\left[(x - 1)^2 + 2\right]^3} dx.$$

Wyrażenie podcałkowe możemy dalej przekształcić tak, by drugi składnik w mianowniku był równy 1, co daje

$$v_3(x) = \frac{2x + 1}{8 \left[\frac{(x-1)^2}{2} + 1\right]^3}.$$

Sugeruje to zastosowanie pod całką podstawienia

$$(45) \quad \frac{x - 1}{\sqrt{2}} = t.$$

W zapisie różniczkowym otrzymujemy

$$dx = \sqrt{2} dt,$$

zatem po prostym rachunku

$$v_3(x) = \int \frac{4t + 3\sqrt{2}}{8(t^2 + 1)^3} dt,$$

co po rozbiciu na sumę całek daje

$$(46) \quad v_3(x) = \frac{1}{2} \int \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt + \frac{3\sqrt{2}}{8} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^3} dt.$$

Druga całka po prawej stronie jest całką $J_3(t)$ rozważaną w punkcie 4, pierwszą zaś możemy łatwo obliczyć, jeżeli zauważymy, że

$$(t^2 + 1)' = 2t,$$

co sugeruje zastosowanie podstawienia

$$(47) \quad y = t^2 + 1.$$

Podstawienie (47) daje w zapisie różniczkowym

$$dy = 2t dt,$$

a stąd otrzymujemy zgodnie z (4)

$$(48) \quad \int \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{4y^2} + C.$$

Ostatecznie uwzględniając (45) - (48) otrzymujemy

$$v_3(x) = -\frac{1}{2[(x-1)^2 + 2]^2} + \frac{3\sqrt{2}}{8} J_3\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

gdzie funkcja J_3 określona jest wzorem (31). □

Proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie analogicznego rachunku w ogólnym przypadku tj. dla funkcji $v_m(x)$ określonej wzorem (44).

6. Całkowanie funkcji wymiernych. Rozważmy funkcję wymierną

$$w(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

gdzie

$$p(x) = a_k x^k + \dots + a_0, \quad q(x) = b_s x^s + \dots + b_0 \quad (a_k \neq 0, b_s \neq 0, k \geq s).$$

Dzielnik wyrazy z najwyższą potęgą x możemy funkcję w przedstawić w postaci

$$w(x) = \frac{a_k}{b_s} x^{k-s} + \frac{r(x)}{q(x)},$$

gdzie $r(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $k - 1$. Powtarzając to postępowanie (conajwyżej $k - s + 1$ razy) dochodzimy do przedstawienia

$$(49) \quad w(x) = t(x) + w_1(x)$$

gdzie $t(x)$ jest wielomianem stopnia $k - s$, zaś w funkcji wymiernej $w_1(x)$ stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika. Funkcję taką będziemy nazywali *funkcją wymierną właściwą*. Opisany tu w skrócie algorytm, prowadzący do przedstawienia funkcji $w(x)$ w postaci (49) nazywamy *dzieleniem wielomianów*. Ponieważ wielomian $t(x)$ można łatwo scałkować opierając się na wzorach (4), (13), (14), całkowanie funkcji wymiernej $w(x)$ sprowadza się do całkowania funkcji wymiernej właściwej $w_1(x)$. Metoda całkowania oparta jest na twierdzeniu z algebry o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste. Zanim przejdziemy do jego sformułowania i dowodu przypomnimy kilka prostych twierdzeń dotyczących wielomianów o współczynnikach zespolonych.¹

Twierdzenie A (Bézout).² *Niech a będzie rzeczywistym lub zespolonym pierwiastkiem wielomianu $q(z)$. Wówczas $q(z)$ jest podzielny przez $z - a$ tzn. istnieje wielomian $v(z)$ taki, że*

$$w(z) = (z - a) v(z).$$

DOWÓD. Prosty rachunek wykazuje, że

$$z^k - a^k = (z - a) \sum_{j=0}^{k-1} a^j z^{k-j-1},$$

zatem dla każdego $k \in \mathbb{N}$ wielomian $z^k - a^k$ jest podzielny przez $z - a$. Niech

$$q(z) = d_n z^n + d_{n-1} z^{n-1} + \dots + d_1 z + c_0.$$

Jeżeli

$$q(a) = 0,$$

to

$$q(z) = q(z) - q(a) = d_n(z^n - a^n) + d_{n-1}(z^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + d_1(z - a).$$

Z ostatniej równości widać, że wielomian $q(z)$ jest podzielny przez $z - a$ jako suma wielomianów mających tą własność. \square

Twierdzenie B (zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy wielomian ma w ciele liczb zespolonych co najmniej jeden pierwiastek.*

Jako wniosek z twierdzeń A, B otrzymujemy

¹Podstawowe wiadomości dotyczące liczb zespolonych i dowód twierdzenia B można znaleźć w podręcznikach: B. Gleichgewicht, Algebra, Warszawa 1983 oraz A. Mostowski, M. Stark, Elementy algebry wyższej, Warszawa 1975.

²Étienne Bézout (1730 - 1783), matematyk francuski, od 1758 członek Paryskiej Akademii Nauk. Autor prac z algebry, poświęconych wielomianom i ich pierwiastkom oraz układom równań algebraicznych.

Twierdzenie C. *Każdy wielomian stopnia n daje się w ciele liczb zespolonych rozłożyć na czynniki liniowe*

$$(50) \quad q(z) = d_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

gdzie liczby z_j ($j = 1, 2, \dots, n$) są pierwiastkami wielomianu $q(z)$ zaś d_n oznacza współczynnik przy najwyższej potęgę z .

W dalszym ciągu będziemy rozważali *wyłącznie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych*.

Twierdzenie D. *Jeżeli a jest pierwiastkiem zespolonym wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba sprzężona \bar{a} jest również pierwiastkiem tego wielomianu.*

DOWÓD. Mamy

$$\overline{q(a)} = \bar{d}_n \bar{a}^n + \bar{d}_{n-1} \bar{a}^{n-1} + \cdots + \bar{d}_1 \bar{a} + \bar{d}_0.$$

Ponieważ współczynniki d_j ($j = 0, \dots, n-1$) są rzeczywiste, wynika stąd równość

$$\overline{q(a)} = d_n \bar{a}^n + d_{n-1} \bar{a}^{n-1} + \cdots + d_1 \bar{a} + d_0$$

czyli

$$q(\bar{a}) = \overline{q(a)} = 0.$$

□

Pierwiastki z_j ($j = 1, \dots, n$) wielomianu q nie muszą być różne, jednak jeżeli w rozkładzie (50) czynnik $(z - a)$ występuje m razy, to tyle samo razy występuje czynnik $(z - \bar{a})$ (mówimy, że oba pierwiastki a , \bar{a} mają tę samą *krotność* m). Aby to stwierdzić, wystarczy dla $m = 2$ zastosować twierdzenie D do wielomianu

$$\frac{q(z)}{(z - a)(z - \bar{a})} = \frac{q(z)}{z^2 - (a + \bar{a})z + |a|^2},$$

który ma współczynniki rzeczywiste jako iloraz wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, zaś dla $m > 2$ powtórzyć to samo rozumowanie. Po odpowiednim przegrupowaniu czynników możemy więc rozkład (50) dla $x \in \mathbb{R}$ zapisać w postaci

$$q(x) = d_n(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_s)^{k_r} \cdot (x - \alpha_1 - i\beta_1)^{m_1} (x - \alpha_1 + i\beta_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_s - i\beta_s)^{m_s} (x - \alpha_s + i\beta_s)^{m_s},$$

gdzie liczby rzeczywiste a_j ($j = 1, \dots, r$) oraz zespolone $\alpha_l + i\beta_l$ ($\beta_l \neq 0$, $l = 1, \dots, s$) są różnymi pierwiastkami wielomianu $q(x)$. Ponieważ

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

rozkład (50) dla wielomianu o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje postać

$$(51) \quad q(x) = d_n(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_s)^{k_r} \cdot ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{m_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{m_s}.$$

Przyjmując

$$(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2 = x^2 + b_l x + c_l$$

i zakładając, że $d_n = 1$ otrzymujemy inną postać rozkładu

$$(52) \quad q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{m_s},$$

przy czym wielomiany $x^2 + b_l x + c_l$ ($l = 1, \dots, s$) nie mają pierwiastków rzeczywistych. Możemy teraz sformułować twierdzenie, na którym oparta jest metoda całkowania funkcji wymiernych.

Twierdzenie 3 (o rozkładzie na ułamki proste). *Każda funkcja wymierna właściwa*

$$w(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

jest skończoną sumą ułamków prostych, przy czym

(i) *każdemu z czynników $(x - a_j)^{k_j}$ w rozkładzie (52) odpowiada suma*

$$\frac{A_1}{x - a_j} + \frac{A_2}{(x - a_j)^2} + \cdots + \frac{A_{k_j}}{(x - a_j)^{k_j}},$$

(ii) *każdemu z czynników $(x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}$ w rozkładzie (52) odpowiada suma*

$$\frac{B_1 x + D_1}{x^2 + b_k x + c_k} + \frac{B_2 x + D_2}{(x^2 + b_k x + c_k)^2} + \cdots + \frac{B_{m_k} x + D_{m_k}}{(x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}}.$$

DOWÓD. Licznik i mianownik funkcji w_1 można podzielić przez współczynnik przy najwyższej potędze x w wielomianie $q(x)$. Zatem nie zmniejszając ogólności można założyć, że współczynnik ten jest równy 1 i że wobec tego rozkład na czynniki wielomianu $q(x)$ jest dany wzorem (52). Funkcja $w(x)$ może być zapisana w postaci

$$w(x) = \frac{p(x)}{(x - a_1)^{k_1} q_1(x)},$$

gdzie wielomian $q_1(x)$ nie dzieli się przez $x - a_1$. Okażemy, że można dobrać stałą A oraz wielomian $p_1(x)$ tak, by

$$w(x) = \frac{A}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{p_1(x)}{(x - a_1)^{k_1-1} q_1(x)}.$$

Ostatnia równość po pomnożeniu obu stron przez wspólny mianownik daje

$$p(x) - Aq_1(x) = (x - a_1) p_1(x).$$

Zgodnie z twierdzeniem A lewa strona jest podzielna przez $x - a_1$, jeżeli

$$p(a_1) - Aq_1(a_1) = 0$$

czyli

$$(53) \quad A = \frac{p(a_1)}{q_1(a_1)}$$

(z założenia wynika, że $q_1(a_1) \neq 0$). Możemy teraz przyjąć

$$(54) \quad p_1(x) = \frac{p(x) - Aq_1(x)}{x - a_1}$$

- jest to wielomian, gdyż licznik po prawej stronie jest podzielny przez $x - a_1$. Ostatecznie widzimy, że określając stałą A oraz wielomian $p_1(x)$ wzorami (53), (54) otrzymujemy rozkład

$$w(x) = \frac{A}{(x - a_1)^{k_1}} + w_1(x),$$

gdzie

$$w_1(x) = \frac{p_1(x)}{(x - a_1)^{k_1 - 1} q_1(x)}.$$

Jak widać, w mianowniku funkcji wymiernej $w_1(x)$ czynnik $x - a_1$ występuje w potęgze niższej niż w mianowniku funkcji $w(x)$. Powtarzając k_1 razy opisane postępowanie dochodzimy do przedstawienia

$$w(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + w_{k_1}(x),$$

gdzie

$$w_{k_1}(x) = \frac{p_{k_1}(x)}{q_1(x)}$$

przy czym zgodnie z (52)

$$\begin{aligned} q_1(x) &= (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_r)^{k_r} t_1(x) \dots t_s(x), \\ t_l(x) &= (x^2 + b_l x + c_l)^{m_l} \quad (l = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

Opisane postępowanie możemy zastosować kolejno do czynników $(x - a_2)^{k_2}, \dots, (x - a_r)^{k_r}$. Daje to rozkład funkcji $w(x)$ na sumę wyrażen wymienionych w punkcie (i) i funkcji wymiernej postaci

$$W(x) = \frac{P(x)}{[t_1(x)]^{m_1} Q(x)},$$

gdzie wielomian $Q(x)$ nie jest podzielny przez $t_1(x)$. Okażemy, że można dobrać stałe B , D i wielomian $P_1(x)$ w taki sposób, by

$$(55) \quad W(x) = \frac{Bx + D}{[t_1(x)]^{m_1}} + \frac{P_1(x)}{[t_1(x)]^{m_1 - 1} Q(x)}.$$

Po pomnożeniu obu stron przez wspólny mianownik dostajemy równość

$$(56) \quad P(x) - (Bx + D)(Q(x) = t_1(x)P_1(x)$$

równoważną (55). Stałe B, D winny być tak dobrane, by lewa strona (56) była podzielna przez $t_1(x)$. Dzieląc wielomiany P, Q przez $t_1(x)$ dostajemy

$$P(x) = t_1(x)\mu(x) + \alpha x + \beta, \quad Q(x) = t_1(x)\nu(x) + \gamma x + \delta,$$

gdzie μ, ν są wielomianami oraz przynajmniej jedna z liczb γ, δ jest różna od zera. Zatem lewa strona (56) jest podzielna przez $t_1(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy wyrażenie

$$\sigma(x) = \alpha x + \beta - (Bx + D)(\gamma x + \delta)$$

jest podzielne przez $t_1(x)$. Reszta z dzielenia $\sigma(x) : t_1(x)$ ma postać

$$(\alpha - B\delta - D\gamma + B\gamma b_1)x + \beta - D\delta + B\gamma c_1.$$

Reszta ta jest zerem wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest układ równań

$$(57) \quad \begin{aligned} (\gamma b_1 - \delta)B - \gamma D &= -\alpha, \\ \gamma c_1 B - \delta D &= -\beta. \end{aligned}$$

Układ (57) jest układem liniowym z niewiadomymi B, D o wyznaczniku

$$d = \delta^2 + c_1\gamma^2 - b_1\gamma\delta.$$

Jeżeli $\gamma = 0$, to

$$d = \delta^2 \neq 0,$$

jeżeli zaś $\gamma \neq 0$, to

$$d = \gamma^2 \left(\frac{\delta^2}{\gamma^2} - b_1 \frac{\delta}{\gamma} + c_1 \right) = \gamma^2 t_1 \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right)$$

a więc i w tym przypadku $d \neq 0$, gdyż wielomian $t_1(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Zatem układ (57) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Mając wyznaczone stałe B, D określamy wielomian $P_1(x)$ z równości (56) dzieląc obie strony przez $t_1(x)$. Okazaliśmy w ten sposób, że funkcja $W(x)$ ma przedstawienie (55). Drugi wyraz po prawej stronie zawiera w mianowniku czynnik $t_1(x)$ w potęgę obniżonej o 1. Postępując w podobny sposób m_1 razy dochodzimy do przedstawienia

$$W(x) = \frac{B_1x + D_1}{t_1(x)} + \frac{B_2x + D_2}{[t_1(x)]^2} + \dots + \frac{B_{m_1}x + D_{m_1}}{[t_1(x)]^{m_1}} + V(x),$$

gdzie

$$V(x) = \frac{P_{m_1}(x)}{t_2(x) \cdots t_s(x)}.$$

Opisane postępowanie możemy powtórzyć zastępując kolejno trójmian kwadratowy $t_1(x)$ przez $t_2(x), \dots, t_s(x)$. Dochodzimy ostatecznie do rozkładu funkcji $W(x)$ na sumę wyrażeń wymienionych w punkcie (ii), co daje pełny rozkład funkcji $w(x)$ na ułamki proste. \square

Całkowanie funkcji wymiernych wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 16. Scałkować funkcję wymierną

$$w(x) = \frac{3x + 5}{(x - 1)^2(x + 2)}.$$

Jest to funkcja wymierna właściwa, przy czym mianownik ma już podany rozkład postaci (52) (mamy $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, pierwiastków zespolonych brak). Zgodnie z twierdzeniem 3 mamy rozkład na ułamki proste postaci

$$(58) \quad \frac{3x + 5}{(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Aby wyznaczyć stałe A , B , C pomnożymy obie strony przez wspólny mianownik. Otrzymujemy

$$3x + 5 = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2$$

co po wykonaniu mnożenia i redukcji daje

$$(59) \quad 3x + 5 = (A + C)x^2 + (A + B - 2C)x - 2A + 2B + C.$$

Równość (59) (a więc i równoważna jej równość (58)) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy współczynniki przy jednakowych potęgach x po obu stronach są równe. Otrzymujemy w ten sposób układ równań

$$(60) \quad \begin{aligned} A + C &= 0, \\ A + B - 2C &= 3, \\ -2A + 2B + C &= 5, \end{aligned}$$

z którego wyznaczamy niewiadome A, B, C . Rozwiązaniem układu (60) jest

$$A = \frac{1}{9}, \quad B = \frac{8}{3}, \quad C = -\frac{1}{9},$$

zatem szukany rozkład (58) ma postać

$$w(x) = \frac{1}{9(x - 1)} + \frac{8}{3(x - 1)^2} - \frac{1}{9(x + 2)}$$

i po scałkowaniu (por. punkt 5) dostajemy

$$\int w(x) dx = \frac{1}{9} \log \left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| - \frac{8}{3(x - 1)} + C.$$

Przykład 17. Scałkować funkcję wymierną

$$w(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 5}.$$

Stopień licznika jest większy od stopnia mianownika, wobec tego zaczniemy od dzielenia wielomianów. Po wykonaniu dzielenia otrzymujemy

$$w(x) = x - 3 - w_1(x),$$

gdzie

$$w_1(x) = \frac{10x - 16}{x^2 - 2x + 5}.$$

Funkcja w_1 jest funkcją wymierną właściwą. Całkując obustronnie dostajemy

$$(61) \quad \int w(x) dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \int w_1(x) dx.$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie (61) zbadamy mianownik wyrażenia $w_1(x)$. Jest to trójmian kwadratowy o wyróżniku $\Delta = -16$, a więc nie mający pierwiastków rzeczywistych, zatem funkcja $w_1(x)$ jest ułamkiem prostym. Pierwiastkami mianownika są liczby zespolone sprzężone

$$x_1 = 1 + 2i, \quad x_2 = 1 - 2i,$$

zatem we wzorze (43) mamy $\alpha = 1$, $\beta = 2$ i stąd

$$w_1(x) = \frac{10x - 16}{(x - 1)^2 + 4}.$$

Aby scałkować funkcję $w_1(x)$ zastosujemy metodę podaną w Przykładzie 15. Przekształcenie mianownika daje

$$w_2(x) = \frac{10x - 16}{4 \left[\left(\frac{x-1}{2} \right)^2 + 1 \right]},$$

wobec tego zastosujemy podstawienie

$$t = \frac{x - 1}{2},$$

skąd w zapisie różniczkowym

$$2 dt = dx,$$

zatem, po przejściu do zmiennej t i rozbiciu na różnicę całek,

$$(63) \quad \int w_1(x) dx = \int \frac{10t}{t^2 + 1} dt - 3 \int \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Podstawienie

$$y = t^2 + 1$$

daje

$$dy = 2t dt,$$

a stąd

$$\int \frac{10t}{t^2 + 1} dt = 5 \int \frac{1}{y} dy = 5 \log(t^2 + 1) + C_1.$$

Po powrocie do zmiennej x dostajemy

$$(64) \quad \int \frac{10t}{t^2 + 1} dt = 5 \log(x^2 - 2x + 5) + C$$

gdzie $C = 5 \log \frac{1}{4} + C_1$. Z równości (61), (63), (64) otrzymujemy końcowy wynik rachunku

$$\int w(x) dx = \frac{x^2}{2} - 3x - 5 \log(x^2 - 2x + 5) + 3 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

Proponujemy, by Czytelnik sprawdził go przez różniczkowanie.

7. Całkowanie pewnych wyrażeń trygonometrycznych. Niech $w(t, s)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych (tzn. ilorazem wielomianów dwóch zmiennych, przy czym mianownik nie redukuje się do stałej). Wówczas całkowanie wyrażeń postaci $w(\sin x, \cos x)$ można sprowadzić do całkowania funkcji wymiernej stosując podstawienie

$$(65) \quad y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \left(x \in (-\pi, \pi) \right).$$

Równość (65) jest bowiem równoważna równości

$$x = 2 \operatorname{arctg} y,$$

skąd w zapisie różniczkowym

$$(66) \quad dx = \frac{2}{1 + y^2} dy.$$

Oprócz tego z tożsamości

$$(67) \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

wynika

$$(68) \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2},$$

ponadto na mocy (67)

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+y^2}, \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{y^2}{1+y^2},$$

przy czym w rozważanym przedziale wyrażenie $\cos \frac{x}{2}$ jest nieujemne, zaś $\sin \frac{x}{2}$ ma taki sam znak jak y . Wobec tego

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \sin \frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

i stąd

$$(69) \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Z (66), (68), (69) otrzymujemy ostatecznie

$$(70) \quad \int w(\sin x, \cos x) dx = \int r(y) dy,$$

gdzie

$$r(y) = \frac{2w\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}{1+y^2}$$

jest funkcją wymierną zmiennej y .

Przykład 18. Obliczyć całkę

$$I(x) = \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Mamy

$$w(t, s) = \frac{1}{s}.$$

Po podstawieniu (65) dostajemy zgodnie z (70)

$$I(x) = \frac{2}{1-y^2} dy.$$

Mianownik funkcji podcałkowej rozkłada się na czynniki liniowe

$$1-y^2 = (1+y)(1-y),$$

wobec tego (por. twierdzenie 3)

$$(71) \quad \frac{2}{1-y^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y},$$

gdzie stałe A, B należy wyznaczyć tak, by zachodziła tożsamość (71). Po sprowadzeniu prawej strony do wspólnego mianownika dostajemy

$$\frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y} = \frac{(A-B)y + A+B}{(1+y)(1-y)},$$

wobec tego (71) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$A - B = 0, \quad A + B = 2.$$

Z ostatnich dwóch równości wynika

$$A = B = 1,$$

co daje wobec (71)

$$\int \frac{2}{1-y^2} dy = \int \frac{dy}{1+y} + \int \frac{dy}{1-y},$$

a stąd

$$I(x) = \log|1+y| - \log|1-y| + C = \log \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$$

Otrzymany wynik można zapisać inaczej korzystając z przekształcenia trygonometrycznego

$$\operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha},$$

i przyjmując $\alpha = \frac{x}{2}$, co daje ostatecznie

$$(72) \quad I(x) = \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

□

Przykład 19. Obliczyć całkę

$$K(x) = \int \frac{dx}{\sin x} \quad (x \in (0, \pi)).$$

Podstawienie (65) daje

$$K(x) = \int \frac{1+y^2}{2y} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy = \int \frac{dy}{y}$$

zatem

$$(73) \quad K(x) = \log|y| + C = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Uwaga. Między całkami $I(x)$, $K(x)$ zachodzi prosty związek. Ponieważ

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right),$$

więc

$$K(x) = \int \frac{dx}{\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Stosując podstawienie liniowe

$$x - \frac{\pi}{2} = t$$

mamy

$$dx = dt,$$

a więc

$$K(x) = \int \frac{dt}{\cos t} = I(t),$$

czyli po powrocie do zmiennej x

$$K(x) = I \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

Zależność tą można odczytać również ze wzorów (72), (73).

8. Całkowanie wyrażeń niewymiernych. Zaczniemy od przykładów.

Przykład 20. Obliczyć całkę

$$Q(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (a > 0).$$

Dzieląc licznik i mianownik funkcji podcałkowej przez a możemy całkę $Q(x)$ zapisać w postaci

$$Q(x) = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Porównanie ze wzorem (11) sugeruje podstawienie liniowe

$$\frac{x}{a} = t$$

skąd

$$dx = a dt.$$

Wobec tego

$$Q(x) = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \log \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right) + C.$$

Wracając do zmiennej x otrzymujemy po wykonaniu prostych przekształceń

$$Q(x) = \log \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C_1$$

gdzie $C_1 = C - \log a$ jest nową stałą całkowania. □

Przykład 21. Obliczyć całkę (por. Przykład 9)

$$P(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (x \in (-1, 1)).$$

Przekształćmy wyrażenie podcałkowe mnożąc je i dzieląc przez $\sqrt{1-x^2}$. Po rozbiściu na różnicę całek otrzymujemy

$$(74) \quad P(x) = P_1(x) - P_2(x),$$

gdzie

$$P_1(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad P_2(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Zauważmy, że

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

całkę P_2 możemy więc przedstawić w postaci

$$P_2(x) = -\int x \left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx$$

skąd po zastosowaniu wzoru (15) na całkowanie przez części dostajemy

$$(75) \quad -P_2(x) = x\sqrt{1-x^2} - P(x).$$

Ponieważ (por. wzór (10))

$$P_1(x) = \arcsin x + C,$$

uwzględniając (74), (75) otrzymujemy

$$P(x) = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - P(x) + C.$$

Ostatnią równość możemy traktować jako równanie z niewiadomą $P(x)$. Po rozwiązaniu go mamy

$$P(x) = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C_1$$

gdzie $C_1 = \frac{1}{2}C$ jest nową stałą całkowania. □

Rozważmy teraz całkę postaci

$$(76) \quad \int w(x, \sqrt{p(x)}) dx$$

gdzie $w(t, s)$ jest funkcją wymierną dwóch zmiennych zaś

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

(całki tego typu występowały w Przykładach 20, 21). Istnieją różne podstawienia pozwalające całkę (76) sprowadzić do całki z funkcji wymiernej. Pokażemy dwa z nich.

(i) $a > 0$. Wprowadzamy nową zmienną t przyjmując

$$(77) \quad \sqrt{p(x)} = t - \sqrt{ax}.$$

Podnosząc (77) obustronnie do kwadratu dostajemy po redukcji równanie liniowe względem x , które po rozwiązaniu daje

$$(78) \quad x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}.$$

Ze wzorów (77), (78) widać, że wyrażenia $\sqrt{p(x)}$ i $\frac{dx}{dt}$ można przedstawić jako funkcje wymierne zmiennej t .

(ii) $a < 0$. Ponieważ

$$p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

wyrażenie $\sqrt{p(x)}$ może przyjmować w pewnym przedziale wartości rzeczywiste tylko wtedy gdy $\Delta > 0$. Trójmian kwadratowy $p(x)$ ma wówczas dwa różne pierwiastki rzeczywiste α, β i daje się rozłożyć na czynniki liniowe

$$p(x) = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Stosujemy podstawienie

$$(79) \quad \sqrt{p(x)} = t(x - \alpha)$$

skąd po podniesieniu do kwadratu i podzieleniu obu stron przez $x - \alpha$ wynika

$$a(x - \beta) = t^2(x - \alpha).$$

Z ostatniej równości można x oraz $\frac{dx}{dt}$ wyrazić jako funkcje wymierne zmiennej t . Podstawienia (77), (79) noszą nazwę *podstawień Eulera*.

Przykład 22. Obliczyć całkę

$$I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Ponieważ $a = 1 > 0$, można zastosować podstawienie (77), czyli

$$(80) \quad \sqrt{x^2 - 2x} = t - x,$$

co po obustronnym podniesieniu do kwadratu i redukcji daje

$$-2x = t^2 - 2tx.$$

Z ostatniej równości dostajemy

$$(81) \quad x = \frac{t^2}{2(t-1)}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - 2t}{2(t-1)^2}.$$

Z (80), (81) otrzymujemy

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \frac{t^2 - 2t}{2(t-1)},$$

wobec tego po zastosowaniu podstawienia (80) całka przybiera postać

$$I(x) = \int \frac{2}{t^2} dt = -\frac{2}{t} + C,$$

czyli po przejściu do zmiennej x

$$I(x) = -\frac{2}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} + C$$

lub w innej postaci

$$I(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} + C_1,$$

gdzie $C_1 = C - 1$ jest nową stałą całkowania.

Przykład 23. Obliczyć całkę

$$K(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

Ponieważ $a = -1 < 0$, zastosujemy podstawienie (79). Trójmian kwadratowy ma pierwiastki $\alpha = 0$, $\beta = 4$, zatem podstawienie (79) przybiera postać

$$(82) \quad \sqrt{x(4-x)} = tx,$$

co po podniesieniu do kwadratu i podzieleniu obu stron przez x daje

$$4 - x = t^2 x.$$

Wobec tego

$$x = \frac{4}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-8t}{(1+t^2)^2}, \quad \sqrt{4x-x^2} = \frac{4t}{1+t^2}$$

i całka $K(x)$ po zastosowaniu podstawienia (82) przybiera postać

$$J(t) = -2 \int \frac{5+t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Wyrażenie podcałkowe jest funkcją wymierną właściwą, zatem zgodnie z twierdzeniem 3 ma rozkład na ułamki proste

$$(83) \quad \frac{5+t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Mt+N}{(1+t^2)^2}.$$

Stałe A, B, M, N możemy obliczyć mnożąc obie strony (83) przez wspólny mianownik i przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach t (por. Przykład 16). Można jednak postąpić prościej. Zauważmy, że

$$\frac{5+t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2}$$

a stąd po skróceniu otrzymujemy rozkład (83) w postaci

$$(84) \quad \frac{5+t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2}$$

(jak widać $A = M = 0$, $B = 1$, $N = 4$). Wobec tego

$$J(t) = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} - 8 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

i korzystając ze wzorów (27), (30) otrzymujemy

$$J(t) = -6 \operatorname{arctg} t - \frac{4t}{1+t^2} + C.$$

Wracając do zmiennej x mamy wobec (82)

$$t = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x}$$

i stąd

$$\frac{4t}{1+t^2} = \sqrt{4x-x^2},$$

wobec czego

$$K(x) = -6 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x} - \sqrt{4x-x^2} + C.$$

Proponujemy, by Czytelnik sprawdził otrzymany wynik przez różniczkowanie. \square

♡ ♡ ♡

9. Jeszcze kilka całek. Zgodnie z wzorami (38) rozdz.III §1

$$\begin{aligned}\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x], \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x], \\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x].\end{aligned}$$

Widać stąd, że wyrażenia po lewej stronie dadzą się łatwo scałkować przy pomocy wzorów (7) i odpowiedniego podstawienia liniowego. Otrzymujemy

$$(85) \quad \int \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] + C & \text{dla } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right) + C & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

$$(86) \quad \int \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] + C & \text{dla } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2mx}{2m} \right) + C & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

$$(87) \quad \int \sin mx \cos nx \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right] + C & \text{dla } m \neq n, \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2mx}{2m} + C & \text{dla } m = n. \end{cases}$$

Obliczymy jeszcze dwie całki

$$P = \int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad Q = \int e^{ax} \sin bx \, dx \quad (a \neq 0).$$

Ponieważ

$$\left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' = e^{ax}$$

możemy do obu całek zastosować wzór (15) na całkowanie przez części. Otrzymujemy układ dwu równań liniowych z niewiadomymi P , Q

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} Q, \\ Q &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} P,\end{aligned}$$

który po rozwiązaniu daje

$$(88) \quad P = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C, \quad Q = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

Całki P, Q noszą nazwę *całek stowarzyszonych*.

♡ ♡ ♡

10. Całki niewyrażalne przez funkcje elementarne. Omówiliśmy klasy funkcji, których pierwodna daje się wyrazić przez funkcje elementarne. Istnieją jednak całki nieoznaczone nie mające tej własności, przykładem jest *całka eliptyczna*

$$E(x) = \int \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 x} \, dx \quad (0 < \lambda < 1)$$

(nazwa pochodzi stąd, że przy pomocy całki $E(x)$ można wyrazić obwód elipsy).³ Inny przykład stanowi całka

$$\int e^{-x^2} \, dx$$

występująca w rachunku prawdopodobieństwa. Również całki typu

$$\int w(x, \sqrt{p(x)}) \, dx$$

gdzie w jest funkcją wymierną dwóch zmiennych a $p(x)$ wielomianem stopnia > 2 nie dają się naogół wyrazić przez funkcje elementarne.

Zadania.

1. Znaleźć całki nieoznaczone funkcji

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (2x^2 + 1)^3, & \text{(ii)} \quad & (1 + \sqrt{x})^4 \quad (x > 0), \\ \text{(iii)} \quad & \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} \quad (x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)), & \text{(iv)} \quad & \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Wskazówka. Zastosować wzory (3) - (5), (13), (14).

2. Niech $w(x)$ będzie wielomianem stopnia k . Udowodnić, że całka nieoznaczona

$$\int w(x) \, dx$$

jest również wielomianem (jakiego stopnia?).

3. Przyjmijmy

$$(87) \quad v(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^{\alpha_j} \quad (x > 0; a_j, \alpha_j \in \mathbb{R}; a_k \neq 0).$$

³Więcej szczegółów dotyczących całek eliptycznych można znaleźć w podręczniku G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t.II rozdz.VIII §5, PWN 1994.

Czy całka nieoznaczona

$$\int v(x) dx$$

jest również funkcją postaci (87)? Porównać z zadaniem 2.

4. Znaleźć całki nieoznaczone funkcji

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & e^{x+2}, & \text{(ii)} \quad \sin(x+5), \\ \text{(iii)} & \cos(2-x), & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\cos^2 3x}, \quad \text{(v)} \quad \frac{5}{1+x^2}. \end{array}$$

W jakich przedziałach całkujemy funkcję podaną w punkcie (iv)?

Wskazówka. Zastosować wzory (6) - (9), (14).

5. Znaleźć całki nieoznaczone funkcji

$$\begin{array}{lll} \text{a.)} & x^3 \cos x, & \text{b.)} \quad x^2 \sin x, \quad \text{c.)} \quad x^3 \log x, \\ \text{d.)} & \frac{\log x}{x^2}, & \text{e.)} \quad x^\alpha \log x \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad \text{f.)} \quad \frac{\log \cos x}{\sin^2 x}. \end{array}$$

W jakich przedziałach całkujemy funkcje podane w punktach c.), d.), e.), f.) ?

Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części.

6. Podać wzór rekurencyjny dla całki nieoznaczonej

$$\text{a.)} \quad A_n = \int \log^n x dx \quad (x > 0), \quad \text{b.)} \quad B_n = \int t^n e^t dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Stosując otrzymany wzór znaleźć całki A_3 , B_3 .

Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części.

7. Znaleźć całki nieoznaczone

$$A = \int \sin(\log x) dx, \quad B = \int \cos(\log x) dx \quad (x > 0).$$

Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części traktując całki A , B jako całki stowarzyszone.

8. Znaleźć wzór rekurencyjny dla całek nieoznaczonych

$$P_n = \int x^n \sin x dx, \quad Q_n = \int x^n \cos x dx.$$

Stosując ten wzór znaleźć całki P_3 , Q_3 .

9. Znaleźć całkę nieoznaczoną

$$\int (\sqrt{x})^p e^{\sqrt{x}} dx \quad (x > 0, p \in \mathbb{N}).$$

Wskazówka. Przez odpowiednie podstawienie sprowadzić do całki rozważanej w zadaniu 6 b.)

10. Znaleźć całki nieoznaczone

$$\int e^x \sin^2 x dx, \quad \int e^x \cos^2 x dx.$$

Wskazówka. Przez odpowiednie przekształcenie trygonometryczne dojść do całki rozważanej w punkcie 9.

11. Stosując odpowiednie podstawienie wyrazić przez funkcje elementarne całki nieoznaczone funkcji

$$\begin{array}{lll} \text{a.) } e^{\sin x} \cos x, & \text{b.) } \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}, & \text{c.) } \frac{1-\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \\ \text{d.) } xe^{x^2}, & \text{e.) } \int \operatorname{tg} x dx, & \text{f.) } \int \operatorname{ctg} x dx \end{array}$$

W jakich przedziałach całkujemy podane funkcje?

12. Stosując całkowanie przez części i odpowiednie podstawienie znaleźć całki nieoznaczone funkcji

$$\text{a.) } \operatorname{arctg} x, \quad \text{b.) } e^{-\sqrt{x}}, \quad \text{c.) } \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \quad \text{d.) } \frac{x}{\sin^2 x}, \quad \text{e.) } \frac{x}{\cos^2 x}.$$

13. Wyrazić przez funkcje elementarne całkę nieoznaczoną

$$\int \sin x \cos x dx$$

- a.) całkując przez części,
- b.) całkując przez podstawienie (jakie?),
- c.) przekształcając najpierw funkcję podcałkową przy pomocy tożsamości

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Wyjaśnić, dlaczego metoda c.) daje pozornie inny wynik niż metody a.), b.).

14. Znaleźć całki nieoznaczone

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx, \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

Wskazówka. Najpierw przekształcić trygonometrycznie wyrażenie podcałkowe, następnie zastosować odpowiedni wzór rekurencyjny.

15. Sprawdzić, że podane funkcje są ułamkami prostymi i znaleźć ich całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } \frac{1}{x^2 - 2x + 5}, & \text{b.) } \frac{2x}{(x^2 - 4x + 5)^2}, \\ \text{c.) } \frac{3x + 1}{(4x^2 - 4x + 2)^3}, & \text{d.) } \frac{2}{x^2 - 6x + 9}. \end{array}$$

16. Znaleźć całki nieoznaczone następujących funkcji wymiernych:

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2}, & (2) \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 3}, \\ (3) \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}, & (4) \frac{2x^2 + 4}{x^4 + 4x + 3}, \\ (5) \frac{3x - 4}{x^2 - 4}, & (6) \frac{x^2}{x^2 + 1}, \\ (7) \frac{x^4}{x^2 - 3}, & (8) \frac{5x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}, \\ (9) \frac{x - a}{x^3 + a^2x}, & (10) \frac{1}{x^3 + x^2 + 2x + 2}. \end{array}$$

17. Wyrazić przez funkcje elementarne całkę nieoznaczoną

$$\text{a.) } \int \frac{\log(x+1)}{x^2} dx, \quad \text{b.) } \int \frac{\log(x^2+1)}{x^3} dx.$$

Wskazówka. Całkując przez części sprowadzić do całki z funkcji wymiernej. W jakich przedziałach wykonujemy całkowanie?

18. Wyrazić przez funkcje elementarne całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} \quad (a^2 + b^2 > 0).$$

Wskazówka. Przekształcić mianownik opierając się na zadaniu 27 rozdz. II §3, następnie skorzystać z Przykładów 19, 20.

19. Scałkować funkcję

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

stosując podstawienie

$$x = \operatorname{tg} t$$

i wzór rekurencyjny (38). Wynik porównać ze wzorem (30).

20. Okazać, że całka

$$\int w(e^x) dx$$

(gdzie w jest funkcją wymierną) daje się przez odpowiednie podstawienie sprowadzić do całki z funkcji wymiernej.

21. Opierając się na zadaniu 20 scałkować funkcje

$$\text{a.) } \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad \text{b.) } \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 2}.$$

W jakich przedziałach można wykonać całkowanie?

22. Znaleźć całki nieoznaczone funkcji

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 x}, & \text{b.) } \frac{1}{\sin^3 x}, \\ \text{c.) } \frac{1}{\cos^3 x}, & \text{d.) } \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}. \end{array}$$

Wskazówka. W punktach a.), b.), c.) przekształcić trygonometrycznie funkcję podcałkową i zastosować odpowiednie podstawienie. W punkcie d.) skorzystać z podstawienia uniwersalnego

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

(por. punkt 7). W jakich przedziałach wykonujemy całkowanie?

23. Znaleźć całkę nieoznaczoną funkcji

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad \frac{1}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}, & \text{(ii)} \quad \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}, & \text{(iii)} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}, \\ \text{(iv)} \quad \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^3}, & \text{(v)} \quad \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}. & \end{array}$$

Wskazówka. Zastosować podstawienie Eulera (punkt 8).

§3. Dalsze własności całki oznaczonej funkcji ciągłej.



1. Wzory rachunkowe dla całek oznaczonych. W §1 określiliśmy całkę oznaczoną funkcji ciągłej jako granicę ciągu sum przybliżonych. W przypadku gdy f jest funkcją ciągłą nieujemną w przedziale $[a, b]$, całka oznaczona jest miarą pola zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów. Zgodnie z twierdzeniem 5 §1 obliczanie całki oznaczonej sprowadza się do znalezienia funkcji pierwotnej czyli całki nieoznaczonej. Techniki rachunkowe pozwalające wyznaczyć funkcję pierwotną zostały omówione w §2. Obecnie wrócimy do całki oznaczonej w celu omówienia jej dalszych własności oraz zastosowań geometrycznych i fizycznych.

Z podanych w §2 wzorów (15), (16) dla całki nieoznaczonej wynikają w oparciu o twierdzenie 5 §1

Twierdzenie 1 (o całkowaniu przez części dla całek oznaczonych). *Jeżeli funkcje f, g mają ciągłą pochodną, to*

$$(1) \quad \int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

oraz

Twierdzenie 2 (o całkowaniu przez podstawienie dla całek oznaczonych). *Przy założeniu ciągłości funkcji f, y, y' zachodzi równość*

$$(2) \quad \int_a^b f(y(x))y'(x) dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy.$$

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Uwaga. Wzór (2) można inaczej zapisać w postaci

$$(2') \quad \int_a^b f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy,$$

z której widać, że symbol $\frac{dy}{dx}$ zachowuje się jak zwykły ułamek - można "skracać" przez różniczkę dx (por. Uwaga po twierdzeniu 2 §2). Wzór (2') sugeruje stosowanie zapisu różniczkowego

$$dy = \frac{dy}{dx} dx.$$

Zapis ten jest wygodny przy całkowaniu przez podstawienie, podobnie jak dla całek nieoznaczonych - trzeba tylko pamiętać o zmianie granic całkowania.

Stosowanie wzorów (1), (2) wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 1. Obliczmy całkę

$$A = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa ma postać iloczynu, narzuca się metoda całkowania przez części. Zastosujemy wzór (1) przyjmując

$$f(x) = x^2, \quad g'(x) = \sin x,$$

wówczas

$$A = \int_0^{\pi} x^2 (-\cos x)' \, dx = -\left[x^2 \cos x\right]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

czyli

$$A = \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} x \cos x \, dx.$$

Do całki po prawej stronie zastosujemy ponownie całkowanie przez części przyjmując we wzorze (1)

$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin x.$$

Otrzymujemy

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = \left[x \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[\cos x\right]_0^{\pi},$$

zatem

$$A = \pi^2 - 4.$$

Przykład 2. Obliczmy całkę oznaczoną

$$A = \int_{-1}^2 x e^{x^2+1} \, dx.$$

Całkę tą możemy zapisać w postaci

$$A = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y'(x) e^{y(x)} \, dx,$$

gdzie

$$y(x) = x^2 + 1.$$

Ponieważ

$$y(-1) = 2, \quad y(2) = 5$$

zgodnie ze wzorem (2) dostajemy

$$A = \frac{1}{2} \int_2^5 e^y \, dy = \frac{1}{2}(e^5 - e^2).$$

Przykład 3. Obliczmy całkę oznaczoną

$$B = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy.$$

Przyjmując

$$y = \cos x$$

zastosujemy wzór (2) przeczytany "od prawej do lewej". Aby określić granice całkowania w całce po lewej stronie wystarczy obrać liczby a , b tak, by

$$\cos a = 0, \quad \cos b = 1.$$

Możemy przyjąć

$$a = \frac{\pi}{2}, \quad b = 0,$$

wówczas

$$B = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 x} \sin x dx$$

czyli zgodnie ze wzorem (29) §1

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} \sin x dx.$$

Ponieważ $\sin x \geq 0$ w przedziale całkowania $[0, \frac{\pi}{2}]$, więc

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x$$

w tym przedziale (przypominamy, że przez pierwiastek rozumiemy dodatnią wartość pierwiastka czyli pierwiastek arytmetyczny - por. rozdz. I §1 punkt 9). Zatem

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx,$$

co po zastosowaniu tożsamości trygonometrycznej

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

daje

$$B = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Przykład 4. Zastosujemy wzór (2) do całki

$$C = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx.$$

Przyjmując

$$x(t) = \sqrt{1-t}$$

mamy

$$x^2 = 1-t, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{t},$$

wobec tego w zapisie różniczkowym

$$2x dx = -dt.$$

Ponadto

$$x(1) = 0, \quad x(0) = 1,$$

zatem

$$C = -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

a więc

$$C = \frac{1}{3}.$$

Przykład 5. Aby obliczyć całkę

$$D = \int_0^a \sqrt{1+x^2} dx$$

zastosujemy metodę podobną do tej, jaka była stosowana w Przykładzie 21 §2 do całki nieoznaczonej. Ponieważ

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}},$$

po rozbiciu na sumę całek dostajemy

$$(3) \quad D = D_1 + D_2,$$

gdzie

$$D_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad D_2 = \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Ze wzoru (11) §2 wynika, że

$$(4) \quad D_1 = \left[\log(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^a = \log(a + \sqrt{1+a^2}).$$

Całkę D_2 przekształcimy metodą całkowania przez części. Ponieważ

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

więc

$$D_2 = \int_0^a x \left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx = \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^a - \int_0^a \sqrt{1+x^2} dx,$$

czyli

$$(5) \quad D_2 = a\sqrt{1+a^2} - D.$$

Ostatecznie z (3), (4), (5) dostajemy

$$D = \log(a + \sqrt{1+a^2}) + a\sqrt{1+a^2} - D$$

skąd

$$D = \frac{1}{2} \log(a + \sqrt{1+a^2}) + \frac{1}{2} a\sqrt{1+a^2}.$$

♡ ♡ ♡

2. Wzory rekurencyjne. W §2 udowodniliśmy wzory rekurencyjne dla całek nieoznaczonych postaci

$$\int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx.$$

Łatwo z nich otrzymać wzory rekurencyjne dla całek oznaczonych. Niech

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad \text{dla } n \geq 1,$$

$$A_0 = B_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Przyjmując

$$P_n(x) = \int \sin^n x dx \quad \text{dla } n \geq 1, \quad P_0(x) = x + C$$

mamy (por. wzór (35) §2)

$$P_n(x) = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

i stąd

$$(6) \quad A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Podobnie, oznaczając

$$Q_n(x) = \int \cos^n x \, dx \quad \text{dla } n \geq 1, \quad Q_0(x) = x + C$$

mamy zgodnie ze wzorem (39) §2

$$Q_n(x) = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} Q_{n-2}(x) \quad (n \geq 2),$$

a zatem

$$(7) \quad B_n = \frac{n-1}{n} B_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Ze wzorów rekurencyjnych (6), (7) wynika, że

$$(8) \quad \begin{aligned} A_{2n} = B_{2n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} \\ A_{2n+1} = B_{2n+1} &= \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

(proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie dowodu indukcyjnego).

Opierając się na wzorach (8) łatwo skonstruować ciąg nieskończony dający w granicy liczbę π . Wynika z nich bowiem, że

$$(9) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Z nierówności

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

dostajemy po scałkowaniu

$$A_{2n+1} \leq A_{2n} \leq A_{2n-1},$$

a zatem

$$1 \leq \frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} \leq \frac{A_{2n-1}}{A_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Z ostatniej nierówności widać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} = 1.$$

Wobec tego mnożąc i dzieląc prawą stronę (9) przez n i przechodząc do granicy otrzymujemy wzór Wallisa¹

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2.$$

¹John Wallis (1616 - 1703), od 1649 r. profesor uniwersytetu w Oksfordzie, jeden z organizatorów Londyńskiego Towarzystwa Królewskiego, zajmował się algebrą i jej zastosowaniami w geometrii.



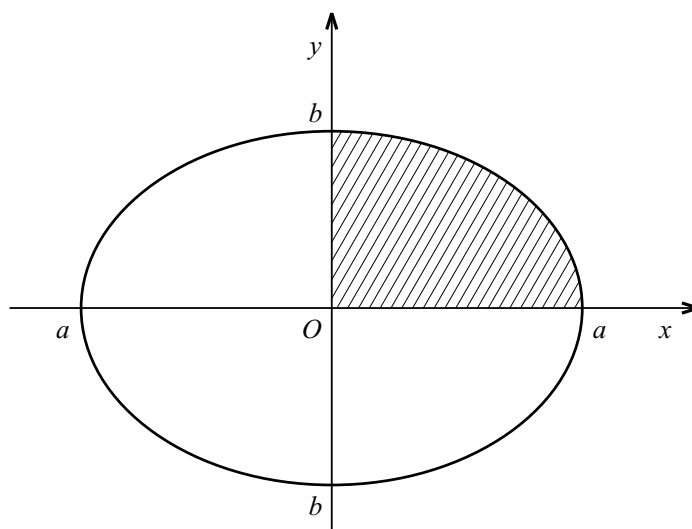
3. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - pole obszaru płaskiego. Jak wspomnieliśmy w §1 całka oznaczona funkcji nieujemnej jest miarą pola obszaru zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów. Wykorzystamy ten fakt do obliczenia pola elipsy.

Przykład 6. Równanie elipsy o półosiach a , b i o środku symetrii w początku układu ma postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

co po rozwiązaniu względem y daje

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



[rys. 63]

przy czym znak $+$ odpowiada górnej połowie elipsy (rys. 63). Ze względu na symetrię pole obszaru leżącego pod wykresem funkcji

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

w przedziale $0 \leq x \leq a$ stanowi czwartą część pola całej elipsy (obszar ten został zakreskowany na rys. 63). Oznaczając szukane pole elipsy przez P mamy

$$P = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Po podstawieniu

$$x = at$$

mamy

$$dx = a dt$$

i stąd zgodnie ze wzorem (2)

$$P = 4ab \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Całka po prawej stronie była obliczona w przykładzie 3. Zgodnie z otrzymanym wynikiem

$$P = \pi ab.$$

W przypadku gdy elipsa jest kołem o promieniu r dostajemy stąd znany wzór na pole koła

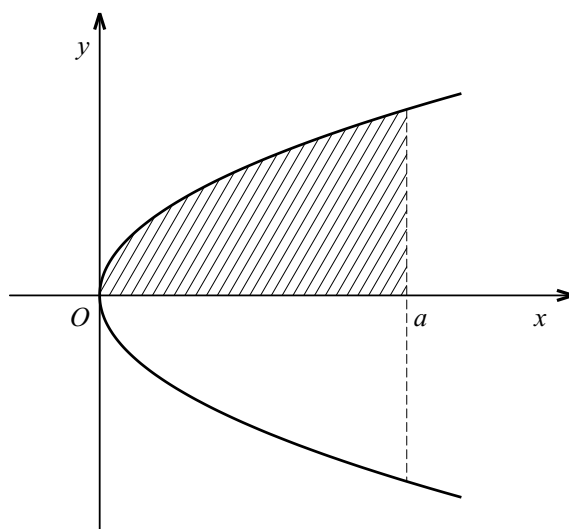
$$P = \pi r^2.$$

Przykład 7. Obliczmy pole P obszaru zawartego we wnętrzu paraboli o równaniu

$$(10) \quad x = y^2$$

dla x należących do przedziału $[0, a]$. Rozważany obszar jest symetryczny względem osi x -ów, wystarczy więc znaleźć pole jego górnej połowy (zakreskowanej na rys. 64). Rozwiązując równanie (10) względem y mamy

$$y = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq a)$$



[rys. 64]

zatem

$$P = 2 \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{4}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a,$$

czyli

$$P = \frac{4}{3} a \sqrt{a}.$$

4. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - długość krzywej płaskiej.
 Będziemy zakładali, że rozważana krzywa K jest wykresem funkcji mającej ciągłą pochodną tzn. jest określona równaniem

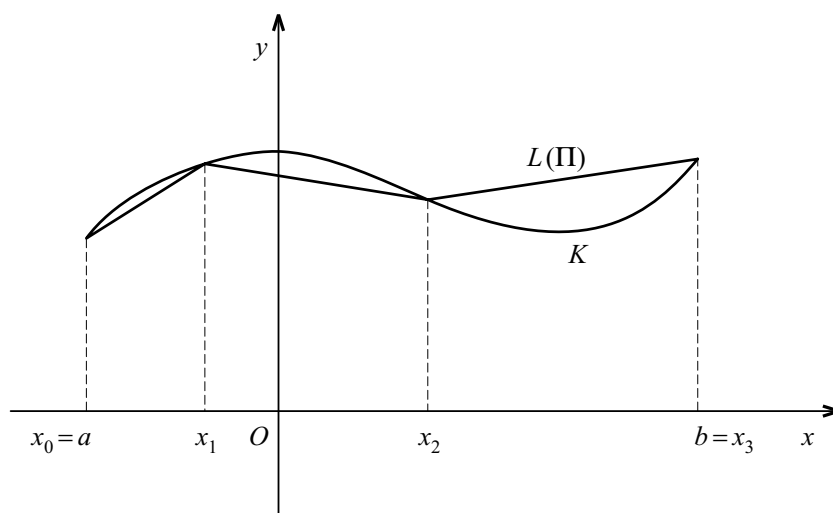
$$y = f(x) \quad (x \in \mathbb{P} = [a, b])$$

przy czym $f \in C^1(\mathbb{P})$. Podziałowi Π odcinka $[a, b]$ opisanemu nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

możemy przyporządkować łamaną $L(\Pi)$ utworzoną z odcinków o końcach

$$(x_{j-1}, f(x_{j-1})), \quad (x_j, f(x_j)) \quad (j = 1, \dots, k).$$



[rys. 65]

Długość tej łamanej wynosi

$$(11) \quad |L(\Pi)| = \sum_{j=1}^k \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2},$$

gdzie

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}, \quad \Delta y_j = f(x_j) - f(x_{j-1}).$$

Z rys. 65 widać, że im drobniejszy jest podział Π tym lepiej łamana $L(\Pi)$ przybliża krzywą K . Wobec tego będzie rzeczą naturalną wprowadzenie następującej definicji długości krzywej K : Niech $\{\Pi_n\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Wówczas przez *długość krzywej K* rozumiemy granicę

$$(12) \quad |K| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L(\Pi_n)|.$$

Wyrażenie po prawej stronie (11) możemy przekształcić korzystając z twierdzenia o wartości średniej. Mianowicie

$$\Delta y_j = f'(\xi_j) \Delta x_j,$$

gdzie $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, a zatem

$$(13) \quad |L(\Pi)| = \sum_{j=1}^k \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2} \Delta x_j.$$

Wyrażenie po prawej stronie (13) jest sumą przybliżoną całki

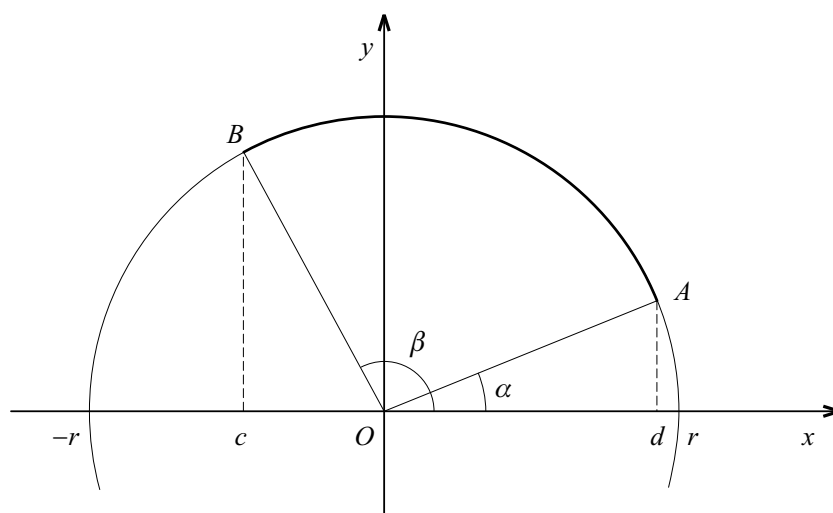
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

odpowiadającą podziałowi Π . Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 1 §1 granica w równości (12) nie zależy od sposobu, w jaki obierzemy ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i równość ta może być zapisana w postaci

$$(14) \quad |K| = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (y = f(x)).$$

Przykład 8. Obliczyć długość łuku K_{AB} okręgu o promieniu r (rys. 66). Zakładamy, że środek okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych i że promienie OA , OB tworzą z dodatnią półosią x -ów kąty α , β odpowiednio ($0 < \alpha < \beta < \pi$). Równanie górnej połowy okręgu ma postać

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r < x < r),$$



[rys. 66]

zatem

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

i stąd

$$1 + (y')^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Wobec tego zgodnie z (14)

$$|K_{AB}| = \int_c^d \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx,$$

gdzie

$$c = r \cos \beta, \quad d = r \cos \alpha.$$

Podstawiając

$$x = r \cos t \quad (0 < t < \pi)$$

dostajemy

$$dx = -r \sin t dt$$

oraz

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r \sqrt{\sin^2 t},$$

czyli

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r \sin t,$$

gdyż $\sin t > 0$ w rozważanym przedziale. Wobec tego

$$|K_{AB}| = -r \int_{\beta}^{\alpha} dt = r(\beta - \alpha)$$

zgodnie ze wzorem znanym z kursu szkolnego. □

Niech teraz K będzie dowolną krzywą o równaniu

$$y = f(t) \quad (t \in \mathbb{I} = [a, b])$$

gdzie $f \in C^1(\mathbb{I})$ i niech x będzie dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $[a, b]$. Część krzywej K odpowiadająca wartościom parametru $t \in [a, x]$ ma długość zależną od x określoną wzorem

$$(15) \quad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Zgodnie z twierdzeniem 6 §1

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

co można zapisać w postaci różniczkowej

$$(16) \quad ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (y = f(x)).$$

Wyrażenie po prawej stronie (16) nazywamy *różniczką długości łuku*. Ponieważ $\frac{ds}{dx} > 0$, funkcja $s(x)$ jest ściśle rosnąca w przedziale $[a, b]$. Zgodnie z oznaczeniem (15) możemy wzór (14) zapisać w postaci

$$|K| = \int_a^b \frac{ds}{dx} dx,$$

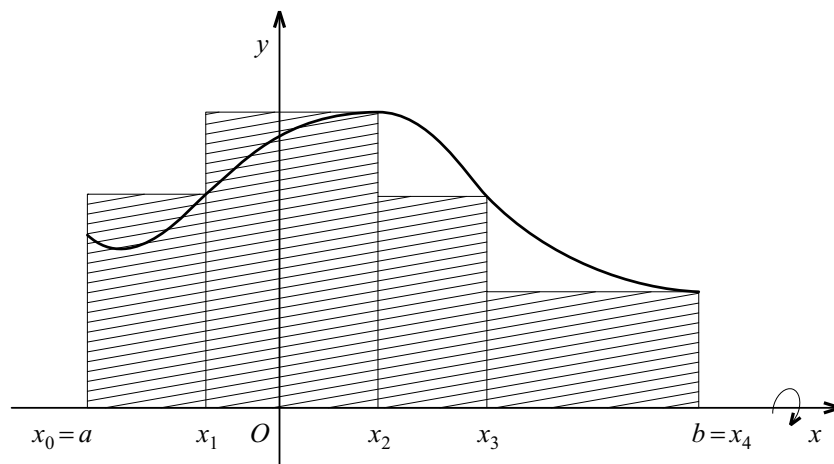
czyli w oparciu o (2')

$$|K| = \int_{s(a)}^{s(b)} ds = \int_0^{|K|} ds.$$

5. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej - objętość i powierzchnia boczna bryły obrotowej. Niech f będzie funkcją ciągłą nieujemną w przedziale $[a, b]$, niech D oznacza obszar zawarty w tym przedziale między wykresem a osią x -ów zaś V - bryłę obrotową zakreśloną przez obszar D przy obrocie dokoła osi x -ów. Naszym celem jest obliczenie objętości bryły V .

Dokonajmy podziału Π przedziału $[a, b]$ określonego nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$



[rys. 67]

i niech P_j ($j = 1, \dots, k$) będzie prostokątem o podstawie $[x_{j-1}, x_j]$ i wysokości $f(x_j)$ (rys. 67, $k = 4$, prostokąty P_j zakreskowane), który przy obrocie zakreśla walec kołowy W_j o wysokości $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ i promieniu podstawy $f(x_j)$. Bryła obrotowa $W(\Pi) = \bigcup_{j=1}^k W_j$ ma objętość

$$(17) \quad |W(\Pi)| = \pi \sum_{j=1}^k [f(x_j)]^2 \Delta x_j.$$

Oczywiście im drobniejszy jest podział Π tym lepiej bryła $W(\Pi)$ przybliża bryłę obrotową V . Wobec tego, oznaczając przez $|V|$ objętość bryły V , można przyjąć, że

$$(18) \quad |V| = \lim_{n \rightarrow \infty} |W(\Pi_n)|$$

gdzie $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Ze wzoru (17) widać, że wyrażenie $|W(\Pi)|$ jest sumą przybliżoną całki

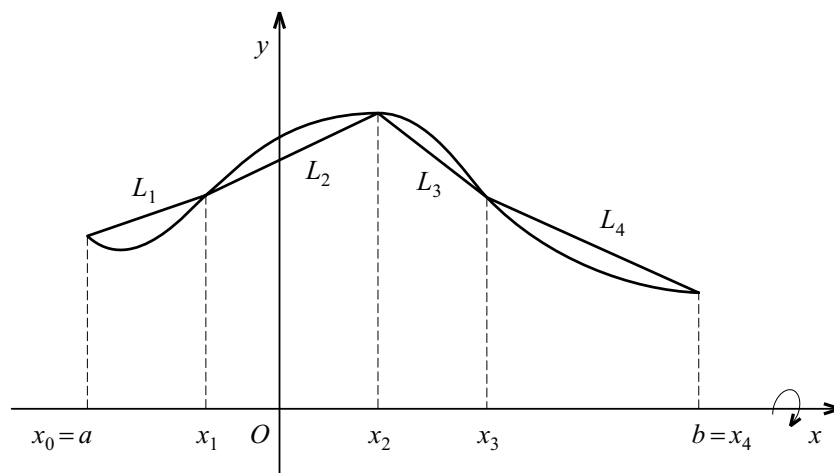
$$(19) \quad \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1 §1 granica we wzorze (18) nie zależy od sposobu, w jaki został obrany ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i jest równa całce (19). Zatem wzór na *objętość bryły obrotowej* V można zapisać w postaci

$$(20) \quad |V| = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (y = f(x)).$$

Przechodząc do obliczenia powierzchni bocznej bryły V założymy, że funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$. Z kursu szkolnego wiadomo, że powierzchnia boczna B stożka ściętego o promieniach podstaw r, R i tworzącej l wyraża się wzorem

$$(21) \quad B = \pi(r + R)l.$$



[rys. 68]

Rozważmy (przy danym podziale Π przedziału $[a, b]$) odcinek L_j łączący punkty wykresu $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$ i $(x_j, f(x_j))$ (rys. 68). Przy obrocie odcinek L_j zakresła powierzchnię boczną B_j stożka ściętego o promieniach podstaw $f(x_{j-1}), f(x_j)$ i tworzącej

$$(22) \quad l_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2},$$

zatem zgodnie ze wzorem (21)

$$|B_j| = \pi [f(x_{j-1}) + f(x_j)] l_j.$$

Lamana $L(\Pi)$ utworzona ze wszystkich odcinków L_j zakreśla przy obrocie powierzchnię $\Sigma(\Pi) = \bigcup_{j=1}^k B_j$, której pole $T(\Pi)$ wyraża się wzorem

$$(23) \quad T(\Pi) = \pi \sum_{j=1}^k [f(x_{j-1}) + f(x_j)] l_j.$$

Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

gdzie $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Wobec tego (22) możemy zapisać w postaci

$$l_j = \sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2} \Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_j - x_{j-1}),$$

skąd wobec (23) wynika, że

$$T(\Pi) = \pi \sum_{j=1}^k [f(x_{j-1}) + f(x_j)] \sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2} \Delta x_j.$$

Utwórzmy teraz sumę

$$S(\Pi) = 2\pi \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2} \Delta x_j.$$

Udowodnimy

Lemat. *Do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla każdego podziału Π o średnicy $d(\Pi)$ spełniającej warunek*

$$(24) \quad d(\Pi) < \delta$$

zachodziła nierówność

$$(25) \quad |T(\Pi) - S(\Pi)| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Z ciągłości pochodnej $f'(x)$ wynika, że funkcja

$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

jest również ciągła a więc ograniczona w przedziale $[a, b]$. Istnieje zatem stała $M > 0$ taka, że

$$(26) \quad \sqrt{1 + [f'(x)]^2} < M$$

dla $x \in [a, b]$. Natomiast funkcja f jako ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest w tym przedziale jednostajnie ciągła, zatem do dowolnej liczby $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by z (24) wynikały nierówności

$$(27) \quad |f(x_j) - f(\xi_j)| < \eta, \quad |f(x_{j-1}) - f(\xi_j)| < \eta \quad (j = 1, \dots, k).$$

Zakładając, że spełniony jest warunek (24) dostajemy zatem z nierówności (26), (27)

$$|T(\Pi) - S(\Pi)| < 2\pi M \eta \sum_{j=1}^k \Delta x_j = 2\pi M \eta (b - a).$$

Wobec tego nierówność (25) będzie spełniona, jeżeli przyjmiemy

$$\eta = \varepsilon [2\pi M (b - a)]^{-1}$$

i do tak określonej liczby η dobierzemy δ . □

Łatwo zauważyć, że im drobniejszy jest podział Π , tym lepiej powierzchnia $\Sigma(\Pi)$ przybliża powierzchnię boczną B_V bryły obrotowej V . Wobec tego możemy przyjąć, że pole tej powierzchni wyraża się wzorem

$$(28) \quad |B_V| = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\Pi_n)$$

gdzie $\{\Pi_n\}$ jest dowolnym ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Z drugiej strony suma $S(\Pi)$ jest sumą przybliżoną całki

$$(29) \quad 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

odpowiadającą podziałowi Π , zatem zgodnie z twierdzeniem 1 §1 granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Pi_n)$$

nie zależy od sposobu w jaki został obrany ciąg $\{\Pi_n\}$ i jest równa całce (29). Z udowodnionego lematu wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Pi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\Pi_n),$$

zatem ostatecznie z (28) dostajemy wzór określający *pole powierzchni bocznej bryły obrotowej* w postaci

$$(30) \quad |B_V| = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (y = f(x)).$$

Wróćmy teraz do funkcji $s(x)$ określonej wzorem (15) (jak wiemy, określa ona długość wykresu funkcji f w przedziale $[a, x]$, gdzie $x \in [a, b]$). Ponieważ funkcja ta jest ściśle rosnąca, istnieje funkcja odwrotna do niej $x = x(s)$ i wobec tego we wzorze (30) można przyjąć

$$(31) \quad y(s) = f(x(s)) \quad (0 \leq s \leq S)$$

jeżeli przez S oznaczymy długość wykresu funkcji f w całym przedziale $[a, b]$. Stosując do całki w (30) podstawienie

$$x = x(s)$$

dostajemy zgodnie z (2), (16) inną postać wzoru na *pole powierzchni bocznej bryły obrotowej*

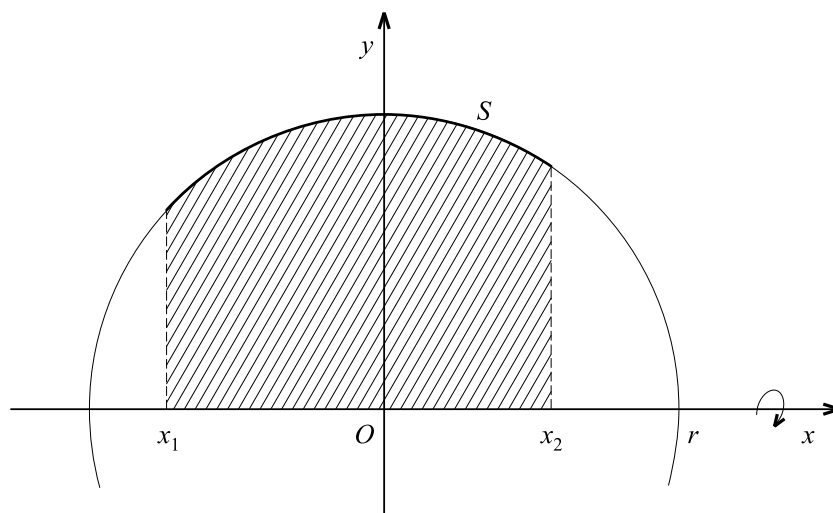
$$(32) \quad |B_V| = 2\pi \int_0^S y \, ds,$$

gdzie funkcja $y(s)$ jest określona wzorem (31).

Przykład 9. Kulę K o promieniu r przecinamy dwoma równoległymi płaszczyznami. Znaleźć objętość i powierzchnię otrzymanego plastra P .

Obierzmy układ współrzędnych w taki sposób, by środek kuli znajdował się w początku układu a płaszczyzny przecinające miały równania $x = x_1$, $x = x_2$ ($x_1 < x_2$). Plaster P powstaje przez obrót dokoła osi x -ów części koła o środku w początku układu i promieniu r ograniczonej przez łuk okręgu S oraz oś x -ów i odcinki prostych $x = x_1$, $x = x_2$ (rys. 69). Równanie okręgu ma postać

$$x^2 + y^2 = r^2$$



[rys. 69]

stąd zgodnie ze wzorem (20) objętość plastra wynosi

$$|P| = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2) \, dx$$

czyli po obliczeniu całki

$$(34) \quad |P| = \pi r^2(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}\pi(x_2^3 - x_1^3).$$

W przypadku, gdy $x_1 = -r$, $x_2 = r$, plaster P jest całą kulą i z (34) dostajemy znany wzór na objętość kuli o promieniu r

$$|P| = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Przechodząc do obliczenia powierzchni bocznej plastra P założymy, że $-r < x_1 < x_2 < r$. Po rozwiązaniu (33) względem y dostajemy równanie

$$(35) \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (x_1 < x < x_2)$$

opisujące łuk S . Po zróżniczkowaniu (35) otrzymujemy

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Otrzymana pochodna jest ciągła w przedziale $[x_1, x_2]$, można więc zastosować wzór (30). Funkcja podcałkowa ma postać

$$y\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r$$

zatem pole powierzchni bocznej B_P wyraża się wzorem

$$(36) \quad |B_P| = 2\pi(x_2 - x_1)r.$$

Ze wzoru (36) widać, że pole powierzchni bocznej plastra P zależy tylko od jego grubości tj. różnicy $x_2 - x_1$, nie zależy zaś od położenia odcinka $[x_1, x_2]$ w przedziale $(-r, r)$. Przy danej grubości plastra pole to będzie takie samo w pobliżu bieguna jak w pobliżu równika kuli K .

Przekroje kuli K płaszczyznami $x = x_1$, $x = x_2$ są kołami o promieniach $y(x_1)$, $y(x_2)$ odpowiednio, zatem ich łączne pole wynosi

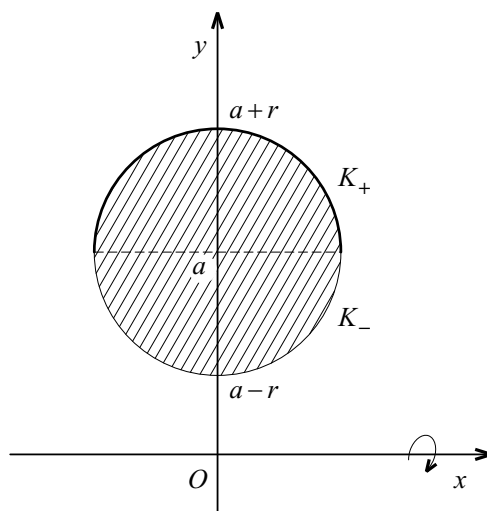
$$(37) \quad \pi(2r^2 - x_1^2 - x_2^2).$$

Pole całkowitej powierzchni plastra P otrzymujemy dodając (36), (37). Zauważmy, że we wzorze (36) możemy przejść do granicy przy $x_2 \rightarrow r$, $x_1 \rightarrow -r$. Otrzymujemy wówczas znany wzór na pole powierzchni Σ_r kuli o promieniu r

$$|\Sigma_r| = 4\pi r^2.$$

Przykład 10. Koło o środku $(0, a)$ i promieniu r ($a > r$) obraca się dokoła osi x -ów tworząc bryłę T zwaną *torusem*. Zastosujemy wzór (20) do obliczenia objętości tej bryły. Okrąg K ograniczający koło opisany jest równaniem

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2 \quad (-r \leq x \leq r)$$



[rys. 70]

skąd po rozwiązaniu względem y dostajemy

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

a zatem

$$y^2 = a^2 + r^2 - x^2 \pm 2a\sqrt{r^2 - x^2},$$

gdzie znak $+$ odpowiada górnej części K_+ okręgu K a znak $-$ dolnej części K_- tego okręgu (rys. 70). Oznaczmy przez T_+ (T_-) bryłę przestrzenną otrzymaną przez obrót dokoła osi x -ów obszaru zawartego między półokręgiem K_+ (K_-) a osią x -ów. Wówczas

$$(38) \quad |T| = |T_+| - |T_-|.$$

Zgodnie ze wzorem (20)

$$|T_+| = \pi \int_{-r}^r \left(a^2 + r^2 - x^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} \right) dx$$

oraz

$$|T_-| = \pi \int_{-r}^r \left(a^2 + r^2 - x^2 - 2a\sqrt{r^2 - x^2} \right) dx$$

zatem wobec (38)

$$(39) \quad |T| = 4\pi a \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Całkę J we wzorze (39) przekształcimy następująco: podstawienie $x = rt$ daje

$$J = r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt,$$

skąd po rozbiciu przedziału całkowania

$$J = r^2 \left(\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt + \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \right).$$

Podstawiając dalej $t = -s$ w pierwszej całce otrzymujemy

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt = - \int_1^0 \sqrt{1-s^2} ds = \int_0^1 \sqrt{1-s^2} ds$$

zatem

$$J = 2r^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

Ostatnia całka była liczona w Przykładzie 3. Ostatecznie wzór (39) daje objętość torusa

$$|T| = 2\pi^2 r^2 a.$$

♡ ♡ ♡

6. Zastosowania fizyczne całki oznaczonej - momenty statyczne i środek masy. *Momentem statycznym punktu materialnego względem prostej l* nazywamy iloczyn $m \cdot d$ gdzie m oznacza masę punktu zaś d odległość punktu od tej prostej. W przypadku układu punktów materialnych o masie m_j i odległości d_j od prostej l ($j = 1, \dots, k$) przez *moment statyczny tego układu względem prostej l* rozumiemy sumę momentów poszczególnych punktów tzn. wyrażenie

$$M = \sum_{j=1}^k m_j d_j.$$

Pojęcie momentu statycznego łatwo przenieść na przypadek masy rozłożonej w sposób ciągły na krzywej lub w obszarze płaskim. Dla uproszczenia rachunków będziemy zakładali, że rozważana krzywa względnie obszar leży w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy i że masa rozłożona jest w sposób ciągły z gęstością 1. Wobec tego masa każdego fragmentu krzywej jest równa jego długości a masa każdej części obszaru równa jej polu. Zaczniemy od przypadku krzywej K określonej równaniem

$$(40) \quad y = f(t) \quad (t \in \mathbb{P} = [a, b])$$

gdzie $f \in C^1(\mathbb{I})$. Krzywa K jest więc wykresem funkcji f , przy czym $0 \leq a < b$, $f(t) \geq 0$. Przy danym podziale Π przedziału $[a, b]$ określonym nierównościami

$$(41) \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

część K_j krzywej K określona równaniem (40) dla $t \in [x_{j-1}, x_j]$ możemy przy dostatecznie małej średnicy podziału Π uważać za punkt materialny $(\xi_j, f(\xi_j))$ o masie $\Delta s_j = s(x_j) - s(x_{j-1})$, gdzie $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ zaś funkcja $s(x)$ określona jest wzorem (15) (przypomnijmy, że $s(x)$ oznacza długość części krzywej K opisanej równaniem (40) dla $t \in [a, x]$, zatem Δs_j jest długością części K_j krzywej). Zastępując krzywą K przez tak określony układ punktów materialnych znajdujemy jego momenty statyczne:

względem osi x -ów

$$M_x(\Pi) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta s_j,$$

względem osi y -ów

$$M_y(\Pi) = \sum_{j=1}^k \xi_j \Delta s_j.$$

Oczywiście układ punktów materialnych $\{K_j\}$ tym lepiej przybliża krzywą K z masą rozłożoną na niej w sposób ciągły im drobniejszy jest podział Π tzn. im mniejsza jest średnica $d(\Pi)$. Można więc w naturalny sposób przyjąć następującą definicję *momentów statycznych krzywej K względem osi układu*:

względem osi x -ów jako

$$M_x(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_x(\Pi_n),$$

względem osi y -ów jako

$$M_y(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_y(\Pi_n)$$

gdzie $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Zauważmy, że wyrażenia $M_x(\Pi)$, $M_y(\Pi)$ stanowią sumy przybliżone całek

$$\int_0^S y \, ds, \quad \int_0^S x \, ds,$$

gdzie S oznacza długość krzywej K , $x = x(s)$ jest funkcją odwrotną do funkcji $s(x)$ zaś $y = f(x(s))$. Wobec tego zgodnie z twierdzeniem 1 §1 z przyjętej definicji wynikają wzory

$$(42) \quad M_x(K) = \int_0^S y(s) \, ds, \quad M_y(K) = \int_0^S x(s) \, ds,$$

co po uwzględnieniu równania (40) krzywej K i wzoru (16) można zapisać w postaci

$$(43) \quad M_x(K) = \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx, \quad M_y(K) = \int_a^b x \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad (y = f(x)).$$

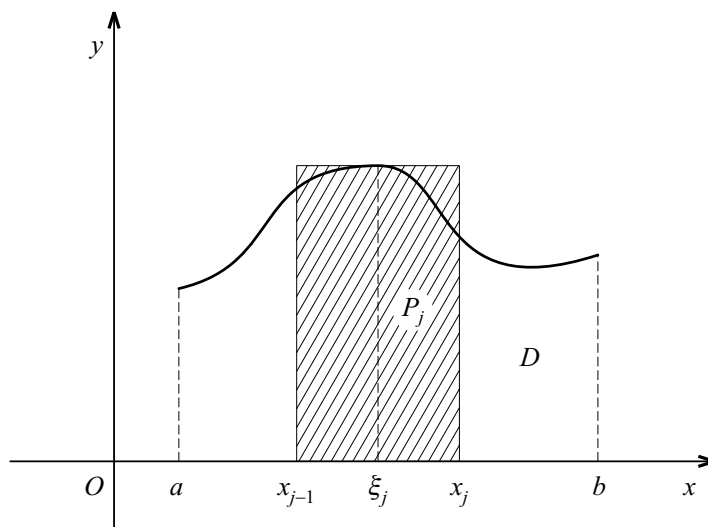
Przejdźmy teraz do obszaru płaskiego D zawartego między wykresem funkcji f w przedziale $[a, b]$ ($0 \leq a < b$) i osią x -ów, przy czym f jest funkcją ciągłą nieujemną. Rozważając podział Π przedziału $[a, b]$ określony nierównościami (41) zastąpimy obszar D przez układ prostokątów P_j ($j = 1, \dots, k$) (rys.71) o podstawie $[x_{j-1}, x_j]$ i wysokości $f(\xi_j)$, gdzie ξ_j jest środkiem odcinka $[x_{j-1}, x_j]$. Prostokąt P_j będziemy uważali za punkt materialny umieszczony w środku geometrycznym prostokąta i o masie równej jego polu. Punkt ten ma zatem współrzędne $(\xi_j, \frac{1}{2}f(\xi_j))$ i masę $f(\xi_j)\Delta x_j$ gdzie $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$. Momenty statyczne tak określonego układu punktów materialnych mają postać:

względem osi x -ów

$$\tilde{M}_x(\Pi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (f(\xi_j))^2 \Delta x_j,$$

względem osi y -ów

$$\tilde{M}_y(\Pi) = \sum_{j=1}^k \xi_j f(\xi_j) \Delta x_j.$$



[rys. 71]

Oczywiście układ punktów materialnych $\{P_j\}$ tym lepiej przybliży obszar D z rozłożoną w nim masą im mniejszą średnicę ma podział Π , wobec tego przyjmujemy następującą definicję *momentów statycznych obszaru D względem osi układu*:

momentu statycznego względem osi x -ów jako granicy

$$M_x(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}_x(\Pi_n),$$

momentu statycznego względem osi y -ów jako granicy

$$M_y(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}_y(\Pi_n),$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Ponieważ wyrażenia $\tilde{M}_x(\Pi)$, $\tilde{M}_y(\Pi)$ są sumami przybliżonymi całek

$$\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx, \quad \int_a^b x f(x) dx,$$

z przyjętej definicji wynikają w oparciu o twierdzenie 1 §1 wzory

$$(44) \quad M_x(D) = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y(D) = \int_a^b xy dx \quad (y = f(x)).$$

Przez *środek masy* układu punktów materialnych (x_j, y_j) o masie m_j ($x_j, y_j > 0$ $j = 1, \dots, k$) rozumiemy punkt (ξ, η) o współrzędnych określonych wzorami

$$\xi = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^k m_j x_j, \quad \eta = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^k m_j y_j \quad (M = \sum_{j=1}^k m_j).$$

Ze wzorów tych widać, że jeżeli w środku masy umieścimy całkowitą masę M układu, to jego momenty statyczne względem obu osi są równe odpowiednim momentom statycznym układu.

Pojęcie środka masy można łatwo przenieść na przypadek, gdy masa rozłożona jest w sposób ciągły na krzywej lub w obszarze płaskim. Podobnie, jak przy rozważaniu momentów statycznych, będziemy zakładali, że krzywa względnie obszar leży w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy i że masa rozłożona jest z gęstością 1.

Środkiem masy krzywej K określonej równaniem (40) nazywamy punkt (ξ, η) o współrzędnych określonych wzorami

$$(45) \quad \xi = \frac{1}{S} M_y(K), \quad \eta = \frac{1}{S} M_x(K)$$

które po uwzględnieniu (42) można zapisać w postaci

$$(46) \quad \xi = \frac{1}{S} \int_0^S x ds, \quad \eta = \frac{1}{S} \int_0^S y ds.$$

Ze wzoru (45) widać, że jeżeli środek masy potraktujemy jako punkt materialny o masie równej długości krzywej, to jego momenty statyczne względem osi układu współrzędnych są równe odpowiednim momentom tej krzywej.

Środkiem masy obszaru D zawartego między wykresem funkcji ciągłej nieujemnej f w przedziale $[a, b]$ ($0 \leq a < b$) a osią x -ów nazywamy punkt (ξ, η) którego współrzędne dane są wzorami

$$(47) \quad \xi = \frac{1}{|D|} M_y(D), \quad \eta = \frac{1}{|D|} M_x(D),$$

gdzie $|D|$ oznacza pole obszaru D . Po uwzględnieniu (44) wzory te przyjmują postać

$$(48) \quad \xi = \frac{1}{|D|} \int_a^b xy \, dx, \quad \eta = \frac{1}{2|D|} \int_a^b y^2 \, dx.$$

Podobnie, jak w przypadku krzywej, środek masy traktowany jako punkt materialny o masie równej polu obszaru ma momenty statyczne względem osi układu współrzędnych równe odpowiednim momentom tego obszaru. Mnożąc drugi ze wzorów (46) przez $2\pi S$ otrzymujemy

$$(49) \quad 2\pi\eta S = 2\pi \int_0^S y \, ds,$$

gdzie zgodnie ze wzorem (32) prawa strona jest równa polu powierzchni powstałej przez obrót krzywej K dookoła osi x -ów. Podobnie, mnożąc przez $2\pi|D|$ drugi ze wzorów (48) dostajemy

$$(50) \quad 2\pi\eta|D| = \pi \int_a^b y^2 \, dx,$$

gdzie wobec (20) prawa strona jest równa objętości bryły powstałej przez obrót obszaru D dookoła osi x -ów. Wzory (49), (50) stanowią matematyczny zapis *reguł Guldina*:²

Pierwsza reguła Guldina. *Pole powierzchni powstałej przy obrocie krzywej płaskiej dookoła osi leżącej w płaszczyźnie krzywej i nie przecinającej jej jest równe iloczynowi długości tej krzywej przez długość drogi, jaką przebył przy obrocie jej środek masy.*

Druga reguła Guldina. *Objętość bryły powstałej przy obrocie obszaru płaskiego dookoła osi leżącej w płaszczyźnie obszaru i nie mającej z nim punktów wspólnych jest równa iloczynowi pola tego obszaru przez długość drogi, jaką przebył przy obrocie jego środek masy.*

Przykład 11. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu współrzędnych i środek masy łuku K paraboli

$$y = x^2 \quad (0 \leq x \leq b)$$

zakładając, że masa jest rozłożona na nim ze stałą gęstością 1.

Zacniemy od obliczenia długości S łuku. Mamy

$$y' = 2x,$$

zatem ze wzoru (14) wynika, że

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2} \, dx,$$

²Poul Guldin (1577 - 1643), pochodził ze Szwajcarii, wykładał w kolegiach jezuickich w Rzymie, Wiedniu i Grazu, w 1641 r. opublikował twierdzenia dotyczące brył obrotowych.

co po podstawieniu

$$2x = t$$

daje

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2b} \sqrt{1+t^2} dt.$$

Opierając się na rachunkach przeprowadzonych w Przykładzie 5 dostajemy ostatecznie

$$(51) \quad S = \frac{1}{4} \log \left(2b + \sqrt{1+4b^2} \right) + \frac{1}{2} b \sqrt{1+4b^2}.$$

Zgodnie z wzorami (43) mamy

$$M_x(K) = \int_0^b x^2 \sqrt{1+4x^2} dx, \quad M_y(K) = \int_0^b x \sqrt{1+4x^2} dx.$$

W całce M_y zastosujemy podstawienie

$$4x^2 = z,$$

wówczas

$$8x dx = dz$$

zatem

$$M_y(K) = \frac{1}{8} \int_0^{4b^2} \sqrt{1+z} dz = \frac{1}{12} \left[(1+z)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{4b^2},$$

czyli

$$(52) \quad M_y(K) = \frac{1}{12} (1+4b^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}.$$

Całkę M_x obliczymy stosując podstawienie Eulera (por. punkt 8 §2)

$$(53) \quad \sqrt{1+4x^2} = t - 2x.$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu i redukcji otrzymujemy z (53)

$$(54) \quad x = \frac{t^2 - 1}{4t}$$

oraz

$$(55) \quad \sqrt{1+4x^2} = \frac{t^2 + 1}{2t},$$

ponadto z (54)

$$(56) \quad dx = \frac{t^2 + 1}{4t^2} dt.$$

Z (53) - (56) wynika, że całka m_x przyjmuje po podstawieniu (53) postać

$$(57) \quad M_x(K) = \int_1^a \frac{(t^2 - 1)^2}{16t^2} \cdot \frac{(t^2 + 1)^2}{8t^3} dt$$

gdzie

$$(58) \quad a = \sqrt{1 + 4b^2} + 2b.$$

Po prostych rachunkach stwierdzamy, że funkcja podcałkowa $g(t)$ we wzorze (57) jest równa

$$g(t) = \frac{1}{128t^5}(t^4 - 1)^2 = \frac{1}{128}\left(t^3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^5}\right),$$

zatem

$$M_x(K) = \frac{1}{128} \left[\frac{t^4}{4} - \frac{1}{4t^4} - 2 \log t \right]_1^a,$$

a więc

$$(59) \quad M_x(K) = \frac{1}{128} \left(\frac{a^4}{4} - \frac{1}{4a^4} - 2 \log a \right).$$

Współrzędne (ξ, η) środka masy znajdujemy stosując wzory (45) i korzystając z otrzymanych wyników (51), (52), (59).

Przykład 12. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu i środek masy obszaru D zawartego między elipsą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

i przedziałem $[0, a]$ na osi x -ów (rys. 63) (zakładamy, że masa jest rozłożona w sposób ciągły z gęstością 1).

Z rachunków przeprowadzonych w Przykładzie 6 wynika, że

$$(60) \quad |D| = \frac{1}{4}\pi ab.$$

Rozwiązując równanie elipsy względem y dostajemy (dla $y \geq 0$)

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

skąd wobec wzorów (44)

$$(61) \quad M_x(D) = \frac{b^2}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

oraz

$$M_y(D) = b \int_0^a x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Z (61) dostajemy

$$M_x(D) = \frac{b^2}{2} \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a,$$

co daje po prostym rachunku

$$(62) \quad M_x(D) = \frac{1}{3} ab^2.$$

W całce $M_y(D)$ zastosujemy podstawienie

$$\frac{x^2}{a^2} = t,$$

skąd wynika w zapisie różniczkowym

$$x dx = \frac{a^2}{2} dt$$

zatem

$$(63) \quad M_y(D) = \frac{ba^2}{2} \int_0^1 \sqrt{1-t} dt.$$

Ponieważ

$$\int_0^1 \sqrt{1-t} dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

więc z (63) otrzymujemy

$$(64) \quad M_y(D) = \frac{1}{3} a^2 b.$$

Korzystając ze wzorów (47) i opierając się na wynikach (60), (62), (64) znajdujemy środek masy. Ma on współrzędne

$$\xi = \frac{4}{3\pi} a, \quad \eta = \frac{4}{3\pi} b.$$

□

Przykład 13. Znaleźć objętość elipsoidy obrotowej E powstałej przez obrót elipsy o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

dokoła osi x -ów.

Ze względu na symetrię wystarczy założyć, że obraca się ćwiartka elipsy D rozważana w Przykładzie 12 (zakreskowana na rys. 63) - objętość otrzymanej bryły obrotowej V będzie wówczas równa połowie objętości elipsoidy. W celu znalezienia objętości bryły V wykorzystamy drugą regułę Guldina. Wiemy, że (por. Przykład 6)

$$|D| = \frac{1}{4}\pi ab,$$

natomiast środek masy obszaru D zakreśla przy obrocie okrąg o promieniu η (por. Przykład 12), wobec tego

$$|V| = \frac{1}{4}\pi ab \cdot 2\pi\eta,$$

co po prostym rachunku daje

$$|V| = \frac{2}{3}\pi ab^2,$$

zatem

$$|E| = 2|V| = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

W przypadku, gdy obracająca się elipsa jest kołem o promieniu r ($a = b = r$), otrzymujemy stąd znany wzór na objętość kuli. \square

Uwaga. Przy wyprowadzaniu wzorów (49), (50) zakładaliśmy, że funkcja f , której wykresem jest krzywa K ograniczająca obszar D , przyjmuje wartości nieujemne i jest określona w przedziale $[a, b]$, gdzie $0 \leq a < b$. W związku z tym reguły Guldina pozostają słuszne w przypadku, gdy końce krzywej względnie część brzegu obszaru leżą na osi obrotu - fakt ten wykorzystaliśmy w Przykładzie 13.

♡ ♡ ♡

7. Twierdzenia o wartości średniej rachunku całkowego. Udowodnimy dwie własności całki oznaczonej, które noszą nazwę twierdzeń o wartości średniej.

Twierdzenie 3 (pierwsze twierdzenie o wartości średniej). Załóżmy, że funkcje f, g są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i że funkcja g ma stały znak. Wówczas istnieje punkt $\xi \in [a, b]$ taki, że

$$(65) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g dx.$$

DOWÓD. Niech m, M oznaczają kres dolny i górny funkcji f w przedziale $[a, b]$, wówczas

$$(66) \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Założmy, że

$$g(x) \geq 0 \quad (x \in [a, b])$$

(w przypadku nierówności przeciwnej dowód przebiega podobnie i proponujemy Czytelnikowi samodzielne przeprowadzenie go). Z nierówności (66) wynika, że

$$(67) \quad mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

co po scałkowaniu (por. twierdzenie 4 §1) daje

$$(68) \quad m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Jeżeli

$$A = \int_a^b g(x) dx = 0$$

to na mocy (68) również

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

i równość (65) jest spełniona dla dowolnego $\xi \in [a, b]$. Jeżeli zaś $A \neq 0$, to (68) możemy zapisać w postaci

$$m \leq B \leq M$$

gdzie

$$B = \frac{1}{A} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Z twierdzenia Wierstrassa (twierdzenie 12 rozdz. III §3) wynika, że liczby m, M są wartościami funkcji f w pewnych punktach $c_1, c_2 \in [a, b]$. Ponieważ na mocy twierdzenia Bolzano Cauchy'ego (twierdzenie 13 rozdz. III §3) funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ własność Darboux, przyjmuje ona w przedziale \mathbb{P} o końcach c_1, c_2 każdą wartość pośrednią między m, M ; w szczególności istnieje punkt $\xi \in \mathbb{P}$ taki, że

$$f(\xi) = B.$$

Ostatnia równość jest równoważna (65), co kończy dowód. □

Przyjmując w twierdzeniu 3

$$g(x) = 1$$

otrzymujemy natychmiast

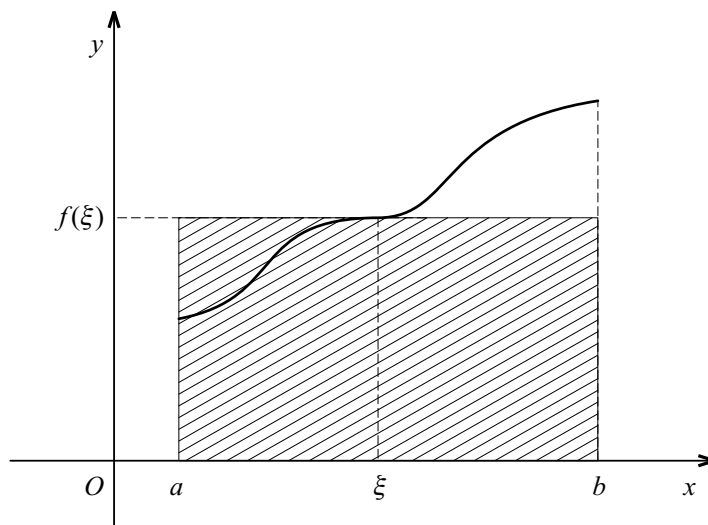
Twierdzenie 4. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to istnieje punkt $\xi \in [a, b]$ taki, że*

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

□

W przypadku funkcji f nieujemnej twierdzenie to ma prosty sens geometryczny: pole obszaru zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów jest równe polu prostokąta o

podstawie $[a, b]$ i wysokości $f(\xi)$, gdzie ξ jest odpowiednio dobranym punktem przedziału $[a, b]$ (rys. 72).



[rys. 72]

Twierdzenie 5 (drugie twierdzenie o wartości średniej). Załóżmy, że funkcja f jest ciągła zaś funkcja g jest monotoniczna i ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$. Wówczas istnieje punkt $\xi \in [a, b]$ taki, że

$$(69) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

DOWÓD. Przyjmijmy

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

wówczas zgodnie z twierdzeniem 6 §1 funkcja F jest różniczkowalna w przedziale $[a, b]$ i przy tym

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Wobec tego

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b F'(x)g(x) dx,$$

co po zastosowaniu wzoru (1) na całkowanie przez części daje

$$(70) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

Na mocy twierdzenia 13 rozdz. III §4 pochodna $g'(x)$ ma stały znak, możemy więc do całki po prawej stronie (70) zastosować twierdzenie 3, co daje

$$\int_a^b F(x)g'(x) dx = F(\xi) \int_a^b g'(x) dx$$

czyli

$$(71) \quad \int_a^b F(x)g'(x) dx = F(\xi)(g(b) - g(a))$$

dla pewnego $\xi \in [a, b]$. Z (70), (71) dostajemy

$$\int f(x)g(x) dx = g(a)(F(\xi) - F(a)) + g(b)(F(b) - F(\xi)),$$

co jest równoważne z równością (69). □

Przykład 14. Udowodnimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx = 0 \quad (0 < a < b).$$

Zastosujemy drugie twierdzenie o wartości średniej przyjmując

$$f(x) = \sin nx, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Otrzymujemy dla pewnego $\xi \in [a, b]$

$$u_n = \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^\xi \sin nx dx + \frac{1}{b} \int_\xi^b \sin nx dx,$$

czyli po obliczeniu całek po prawej stronie

$$u_n = \frac{1}{na}(\cos na - \cos n\xi) + \frac{1}{nb}(\cos n\xi - \cos nb),$$

a stąd

$$(72) \quad |u_n| \leq \frac{2}{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) < \frac{4}{na}.$$

Z (72) wynika, że nierówność ε -owa

$$|u_n| < \varepsilon$$

jest spełniona, jeżeli $n \geq N = \frac{4}{a\varepsilon}$. □

♡ ♡ ♡

8*. Całkowanie przybliżone. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i niech Π_n będzie podziałem przedziału $[a, b]$ na n równych części określonym nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

gdzie

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Obierając jako punkt pośredni ξ_j środek przedziału $[x_{j-1}, x_j]$ możemy utworzyć sumę przybliżoną

$$(73) \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \quad \left(\xi_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j) \right).$$

Zgodnie ze wzorem (17) §1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx,$$

zatem sumę S_n możemy uważać za przybliżoną wartość całki

$$(74) \quad \int_a^b f(x) dx.$$

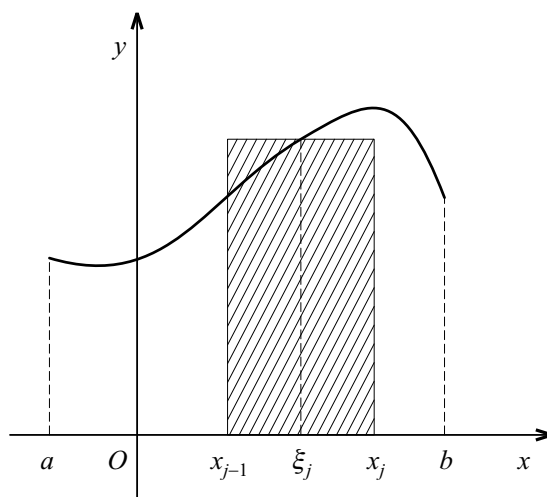
Do obliczenia jej wystarczy znać wartość funkcji w skończonej ilości punktów ξ_j ($j = 1, \dots, n$) (gdy funkcja opisuje jakąś wielkość fizyczną, wartości te wyznaczamy z pomiarów). Przejście od funkcji f do układu liczb $\{f(\xi_j)\}$ nazywamy *dyskretyzacją funkcji*, zaś różnicę $h = \xi_j - \xi_{j-1}$ *krokiem dyskretyzacji*. Równość (73) możemy zapisać inaczej w postaci

$$(75) \quad P(h) = h \sum_{j=1}^n f(\xi_j),$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_j = a + jh, \quad \xi_j = a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

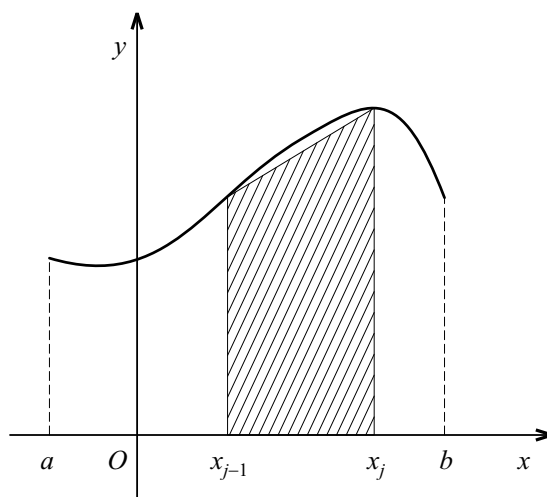
Przybliżoną metodę obliczania całki (74) polegającą na zastąpieniu jej przez sumę $P(h)$ nazywamy *metodą prostokątów*. Nazwa wynika z jej sensu geometrycznego: w przypadku dodatniej funkcji f pole pod jej wykresem w każdym przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ zastępujemy przez pole prostokąta o bokach h , $f(\xi_j)$ (rys.73), gdzie $h = x_j - x_{j-1}$ zaś ξ_j jest środkiem odcinka $[x_{j-1}, x_j]$.



[rys. 73]

Przybliżoną wartość całki (74) możemy również obliczyć w inny sposób, zastępując (w przypadku funkcji f dodatniej) pole pod wykresem funkcji w przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ przez pole trapezu o podstawach $f(x_{j-1})$, $f(x_j)$ i wysokości $\Delta x_j = \frac{b-a}{n}$ (rys. 74). Dodając pola tych trapezów otrzymujemy sumę

$$(76) \quad \bar{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j)).$$



[rys. 74]

W dalszym ciągu nie będziemy robili żadnych założeń o znaku funkcji f . Ponieważ liczba

$$\bar{y}_j = \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

leży między liczbami $f(x_{j-1})$, $f(x_j)$, z twierdzenia Bolzano - Cauchy'ego (twierdzenie 13 rozdz. III §3) wynika istnienie punktu $\bar{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ takiego, że

$$\bar{y}_j = f(\bar{x}_j).$$

Wobec tego suma \bar{S}_n może być zapisana w postaci

$$\bar{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_j),$$

jest to więc suma przybliżona całki (74) i wobec (17) §1 mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Zatem suma \bar{S}_n również może być uważana za przybliżoną wartość całki (74). Przy użyciu wprowadzonych wcześniej oznaczeń możemy (76) zapisać inaczej w postaci

$$(77) \quad T(h) = h \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_j = a + jh \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Metodę przybliżonego obliczania całki (74) polegającą na zastąpieniu jej przez sumę $T(h)$ nazywamy *metodą trapezów*.

Trzecia metoda przybliżonego obliczania całki (74) zwana *metodą Simpsona*³ polega na zastąpieniu funkcji f w przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ przez wielomian w stopnia ≤ 2 spełniający warunki

$$(78) \quad w(x_{j-1}) = y_{j-1}, \quad w(x_j) = y_j, \quad w(\xi_j) = \eta_j,$$

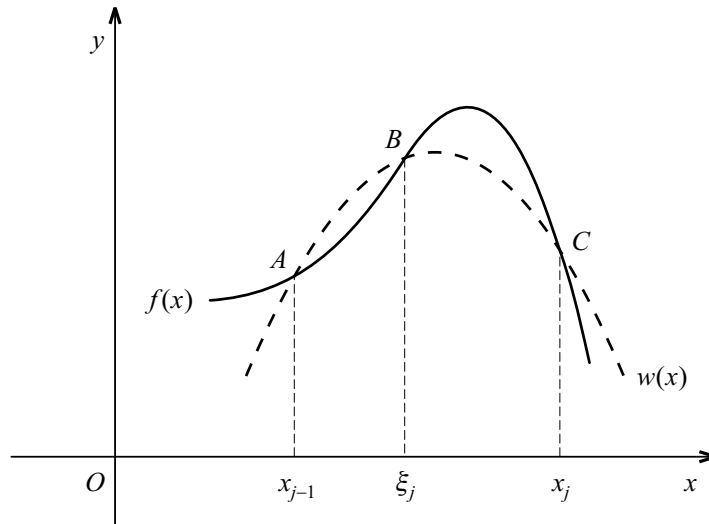
gdzie

$$y_{j-1} = f(x_{j-1}), \quad y_j = f(x_j), \quad \xi_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j), \quad \eta_j = f(\xi_j).$$

Wykresem wielomianu w jest linia prosta, jeżeli punkty $A = (x_{j-1}, y_{j-1})$, $B = (\xi_j, \eta_j)$, $C = (x_j, y_j)$ są współliniowe, w przeciwnym wypadku jest to parabola przechodząca przez te punkty (rys. 75). Łatwo wykazać, że taki wielomian istnieje. Niech bowiem

$$w(x) = ax^2 + bx + c,$$

³Thomas Simpson (1710 - 1761), matematyk angielski, profesor Akademii Wojskowej w Woolwich, zajmował się teorią błędów i metodami przybliżonego całkowania.



[rys. 75]

wówczas warunki (78) są równoważne układowi równań liniowych

$$(79) \quad \begin{aligned} ax_{j-1}^2 + bx_{j-1} + c &= y_{j-1} \\ ax_j^2 + bx_j + c &= y_j \\ a\xi_j^2 + b\xi_j + c &= \eta_j \end{aligned}$$

z niewiadomymi a, b, c . Wyznacznik tego układu jest wyznacznikiem Vandermonde'a⁴ a więc jest różny od zera, gdyż liczby x_{j-1}, x_j, ξ_j są różne. Wobec tego układ (79) ma dokładnie jedno rozwiązanie przy dowolnie danych y_{j-1}, y_j, η_j .

Okażemy teraz, że całka

$$p_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} w(x) dx$$

daje się wyrazić przez wartości funkcji f w punktach x_{j-1}, x_j, ξ_j . Całkując otrzymujemy

$$p_j = \frac{1}{3}a(x_j^3 - x_{j-1}^3) + \frac{1}{2}b(x_j^2 - x_{j-1}^2) + c(x_j - x_{j-1}),$$

co po rozłożeniu na czynniki wyrażeń w nawiasach daje

$$p_j = \frac{1}{3} q_j \Delta x_j$$

gdzie

$$q_j = a(x_{j-1}^2 + x_{j-1}x_j + x_j^2) + \frac{3}{2}b(x_{j-1} + x_j) + 3c.$$

⁴Wyznacznik Vandermonde'a jest omówiony w podręcznikach: B. Gleichgewicht, Algebra, Warszawa 1983 oraz A. Mostowski, M. Stark, Elementy algebry wyższej, Warszawa 1975.

Łatwy rachunek wykazuje, że

$$q_j = \frac{1}{2}w(x_{j-1}) + \frac{1}{2}w(x_j) + 2w(\xi_j)$$

wobec tego po uwzględnieniu (79) otrzymujemy

$$(80) \quad p_j = \frac{1}{6}(y_{j-1} + y_j + 4\eta_j)\Delta x_j.$$

Na mocy twierdzenia o podziale przedziału całkowania (twierdzenie 3 §1)

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx.$$

Zastępując całkę po przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ przez wyrażenie p_j otrzymujemy przybliżoną wartość całki (74) w postaci sumy

$$Q_n = \frac{b-a}{6n} \sum_{j=1}^n (y_{j-1} + y_j + 4\eta_j),$$

co przy użyciu wcześniej wprowadzonych oznaczeń można zapisać jako

$$(81) \quad S(h) = \frac{h}{3} \sum_{j=1}^n (f(x_{j-1}) + f(x_j) + 4f(\xi_j)),$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_j = a + 2jh, \quad \xi_j = a + (2j+1)h \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(h oznacza tu *krok dyskretyzacji* czyli odległość dwóch sąsiednich punktów, w których wyznaczamy wartość funkcji f).

9*. Oszacowanie błędu całkowania przybliżonego. Aby oszacować błąd jaki popełniamy zastępując całkę (74) przez jej przybliżoną wartość obliczoną według jednej z metod podanych w poprzednim punkcie posłużymy się wzorem Taylora (twierdzenie 2 rozdz. III §5). Załóżmy, że funkcja f określona w przedziale $\mathbb{P} = [c - \delta, c + \delta]$ jest klasy $C^2(\mathbb{P})$, wówczas przyjmując we wzorze Taylora $n = 2$ mamy dla $x \in \mathbb{P}$

$$(82) \quad f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + r_2(x),$$

gdzie

$$(83) \quad r_2(x) = \frac{(x-c)^2}{2} f''(\bar{x}),$$

zaś \bar{x} jest punktem leżącym między c, x . Ze wzoru (82) wynika, że funkcja r_2 jest ciągła w przedziale \mathbb{IP} jako różnica funkcji ciągłej f i funkcji liniowej. Całkując obustronnie (82) dostajemy

$$(84) \quad \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx = 2\delta f(c) + \int_{c-\delta}^{c+\delta} r_2(x) dx$$

a stąd

$$(85) \quad \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx - 2\delta f(c) \right| \leq \frac{1}{2} m_2 \int_{c-\delta}^{c+\delta} (x-c)^2 dx = \frac{1}{3} m_2 \delta^3,$$

gdzie

$$m_2 = \sup_{\mathbb{IP}} |f''(x)|.$$

Teraz już możemy łatwo oszacować **błąd metody prostokątów**. Niech dla ustalonego j

$$(86) \quad c = \xi_j, \quad \delta = \frac{h}{2}$$

zatem

$$(87) \quad c - \delta = x_{j-1}, \quad c + \delta = x_j.$$

Zakładając, że $f \in C^2([a, b])$ mamy wobec (85)

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx - hf(\xi_j) \right| \leq \frac{1}{24} M_2 h^3 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

gdzie

$$M_2 = \sup_{[a, b]} |f''|$$

i wobec tego po rozbiciu przedziału całkowania $[a, b]$ na sumę przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$ dostajemy

$$\left| \int_a^b f(x) dx - P(h) \right| \leq \frac{n}{24} M_2 h^3$$

skąd wobec

$$(88) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

wynika oszacowanie

$$(89) \quad \left| \int_a^b f(x) dx - P(h) \right| \leq ch^2 \quad \left(c = \frac{M_2(b-a)}{24} \right).$$

Wracając do wzoru (82) zauważmy, że wynikają z niego równości

$$\begin{aligned} f(c + \delta) &= f(c) + \delta f'(c) + \frac{\delta^2}{2} f''(c_1) \\ f(c - \delta) &= f(c) - \delta f'(c) + \frac{\delta^2}{2} f''(c_2) \end{aligned}$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{P}$, a z nich po dodaniu otrzymujemy

$$(90) \quad f(c + \delta) + f(c - \delta) = 2f(c) + \frac{\delta^2}{2} (f''(c_1) + f''(c_2)).$$

Z (84), (90) dostajemy

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx - \delta (f(c + \delta) + f(c - \delta)) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} r_2(x) dx - \frac{\delta^3}{2} (f''(c_1) + f''(c_2)),$$

skąd wynika nierówność

$$(91) \quad \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx - \delta (f(c + \delta) + f(c - \delta)) \right| \leq \frac{4}{3} m_2 \delta^3.$$

Aby oszacować **błąd metody trapezów** założymy, że $f \in C^2([a, b])$ i przyjmiemy dla ustalonego j oznaczenia (86), (87), wówczas wobec (91)

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx - \frac{1}{2} h (f(x_{j-1}) + f(x_j)) \right| \leq \frac{1}{6} M_2 h^3,$$

skąd po rozbiciu przedziału $[a, b]$ na sumę przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$ otrzymujemy po uwzględnieniu (88)

$$(92) \quad \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq ch^2 \quad \left(c = \frac{M_2(b-a)}{6} \right).$$

Przejdziemy teraz do oszacowania **błądu metody Simpsona**. Załóżmy, że $f \in C^4(\mathbb{P})$, wówczas ze wzoru Taylora przy $n = 4$ mamy dla $x \in \mathbb{P}$

$$(93) \quad f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \frac{(x - c)^2}{2} f''(c) + \frac{(x - c)^3}{6} f'''(c) + r_4(x)$$

gdzie

$$(94) \quad r_4(x) = \frac{(x - c)^4}{24} f^{(4)}(\bar{x})$$

zaś \bar{x} leży między c, x . Z (93) wynika, że funkcja r_4 jest ciągła w przedziale \mathbb{P} jako różnica funkcji ciągłej f i wielomianu trzeciego stopnia. Wobec tego możemy równość (93) scałkować obustronnie, co daje

$$(95) \quad \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx = 2\delta f(c) + \frac{1}{3}\delta^3 f''(c) + \int_{c-\delta}^{c+\delta} r_4(x) dx.$$

Przyjmując jako x we wzorze (93) jeden z punktów końcowych przedziału \mathbb{P} otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(c+\delta) &= f(c) + \delta f'(c) + \frac{\delta^2}{2} f''(c) + \frac{\delta^3}{6} f'''(c) + \frac{\delta^4}{24} f^{(4)}(d_1), \\ f(c-\delta) &= f(c) - \delta f'(c) + \frac{\delta^2}{2} f''(c) - \frac{\delta^3}{6} f'''(c) + \frac{\delta^4}{24} f^{(4)}(d_2), \end{aligned}$$

gdzie $d_1, d_2 \in \mathbb{P}$. Po dodaniu stronami mamy

$$(96) \quad f(c+\delta) + f(c-\delta) = 2f(c) + \delta^2 f''(c) + b_1(\delta)$$

jeżeli przyjmiemy oznaczenie

$$(97) \quad b_1(\delta) = \frac{\delta^4}{24} (f^{(4)}(d_1) + f^{(4)}(d_2)).$$

Z równości (96) wynika, że

$$\delta^2 f''(c) = f(c+\delta) + f(c-\delta) - 2f(c) - b_1(\delta),$$

co po wstawieniu do (95) daje po prostym rachunku

$$(98) \quad \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx = \frac{1}{3}\delta (f(c+\delta) + f(c-\delta) + 4f(c)) + b_2(\delta)$$

gdzie

$$(99) \quad b_2(\delta) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} r_4(x) dx - \frac{1}{3}\delta b_1(\delta).$$

Aby zastosować przeprowadzone rachunki do oszacowania błędu metody Simpsona założymy, że $f \in C^4([a, b])$ i przyjmiemy dla ustalonego j

$$(100) \quad c = \xi_j, \quad \delta = h = \frac{b-a}{2n}$$

wówczas

$$c - \delta = x_{j-1}, \quad c + \delta = x_{j+1}$$

i z (98) otrzymujemy

$$(101) \quad \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx - \frac{1}{3}h \left(f(x_{j-1}) + f(x_j) + 4f(\xi_j) \right) = b_2(h).$$

Z (94), (97), (99) po prostych rachunkach wynika oszacowanie

$$(102) \quad |b_2(h)| \leq \frac{2}{45} M_4 h^5,$$

gdzie

$$M_4 = \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|.$$

Po rozbiciu przedziału $[a, b]$ na sumę przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$ i uwzględnieniu (100) - (102) dostajemy ostatecznie

$$(103) \quad \left| \int_a^b f(x) dx - S(h) \right| \leq ch^4 \quad \left(c = \frac{M_4(b-a)}{45} \right).$$

Otrzymane oszacowania błędu (89), (92), (103) można zapisać krócej przy użyciu symboli Landau'a (rozdz. III §4 punkt 10). Zakładając, że $f \in C^2([a, b])$ mamy przy $h \rightarrow 0$

$$\int_a^b f(x) dx = P(h) + O(h^2)$$

oraz

$$\int_a^b f(x) dx = T(h) + O(h^2).$$

Jeżeli natomiast $f \in C^4([a, b])$, to

$$\int_a^b f(x) dx = S(h) + O(h^4)$$

przy $h \rightarrow 0$.

Zadania.

1. Obliczyć całki oznaczone

$$(i) \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx, \quad (ii) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx,$$

$$(iii) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx, \quad (iv) \int_0^1 x^3 e^{-x} \, dx.$$

Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części.

2. Obliczyć całki oznaczone

$$(i) \int_0^1 (3x - 2)^5 \, dx, \quad (ii) \int_0^5 \frac{dx}{2x + 1},$$

$$(iii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + \sin x}}, \quad (iv) \int_0^{\log 2} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \, dx.$$

Wskazówka. Zastosować odpowiednie podstawienie.

3. Okazać, że całka oznaczona

$$\int_0^a \frac{a \, dx}{a^2 + x^2}$$

nie zależy od a . Znaleźć jej wartość.

4. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \, dx}{3 - \cos x}.$$

Wskazówka. Zastosować podstawienie (omówione w §2 punkt 7)

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

5. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$$

dwoma sposobami:

a.) zastosować całkowanie przez części a następnie przez podstawienie;

b.) zauważyć, że suma całek

$$\int_0^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} y \, dy$$

jest równa polu pewnego prostokąta, następnie obliczyć drugą z całek stosując odpowiednie podstawienie.

6. Obliczyć całkę

$$\int_{-2}^0 |2x + |x + 1|| dx.$$

Wskazówka. Rozbić przedział całkowania.

7. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[-a, a]$ (gdzie $a > 0$). Okazać, że
(i) jeżeli f jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

(ii) jeżeli f jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Podać sens geometryczny.

8. Zakładając ciągłość funkcji f udowodnić równości

$$(i) \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-t) dt,$$

$$(ii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx,$$

$$(iii) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Wskazówka. Punkt (ii) sprowadzić do punktu (i). W punkcie (iii) zastosować podstawienie $x = \pi - t$.

9. Mówimy, że funkcja f określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest T -okresowa jeżeli równość

$$f(x+T) = f(x)$$

zachodzi dla każdego x (liczbę T nazywamy *okresem* funkcji f). Zakładając ciągłość i T -okresowość funkcji f udowodnić, że

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

10. Zakładając ciągłość funkcji f na całej osi rzeczywistej udowodnić równość

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^\pi f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \lambda) d\lambda$$

dla dowolnych rzeczywistych a, b .

Wskazówka. Opierając się na zadaniu 27 rozdz. III §3 przedstawić argument funkcji f w postaci $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha)$, gdzie α jest odpowiednio dobranym kątem. Następnie zastosować zadania 9 i 7.

11. Oznaczmy

$$A_n = \int_0^\pi \sin^n x dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Opierając się na wzorze rekurencyjnym podanym w §2 punkt 4 udowodnić zależność

$$A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}.$$

Wynioskować z niej, że

$$A_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \pi, \quad A_{2n+1} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}.$$

12. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\text{a.) } \int_0^\pi x \sin^n x dx, \quad \text{b.) } \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Wskazówka. Oprzeć się na zadaniu 8 (iii). W punkcie a.) skorzystać z zadania 11.

13. Znaleźć granice ciągów

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}, \quad v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 + k^2}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że n -ty wyraz ciągu jest sumą przybliżoną pewnej całki oznaczonej. Obliczyć tę całkę i zastosować wzór (17) §1.

14. Znaleźć granicę ciągu

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\log(2n)! - n \log n - \log n! \right).$$

Wskazówka. Skorzystać z równości

$$\frac{(2n)!}{n! n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right),$$

następnie zauważyć, że u_n jest sumą przybliżoną pewnej całki. Obliczyć tę całkę i zastosować wzór (17) §1.

15. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez parabolę $y = x^2$ i część okręgu o środku w początku układu i promieniu r leżącą w półpłaszczyźnie $y > 0$.

16. Obliczyć pole obszaru zawartego między parabolą $y = 4x^2$ i prostą $y = x + 1$.

17. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez prostą $y = x + 2$ i krzywą o równaniu

$$y = x^2 + 6x + 8$$

(co to za krzywa?).

18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez parabole o równaniach

$$y^2 = x + 4, \quad y^2 = 4 - x.$$

19. Obliczyć pole wycinka AOB koła o promieniu r (rys. 66). Zakładamy, że środek okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych i że promienie OA , OB tworzą z dodatnią półosią x -ów kąty α , β odpowiednio ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$). Porównać otrzymany wynik ze wzorem znanym z kursu szkolnego.

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 8.

20. Naszkicować wykres funkcji

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

i obliczyć pole zawarte między tym wykresem a osią x -ów w przedziale $[-1, 2]$.

21. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ i prostymi $x = 0$, $x = 1$, $y = -2$.

22. Obliczyć pole figury płaskiej określonej w prostokątnym układzie współrzędnych nierównościami

$$1 \leq x \leq 2, \quad y \leq x, \quad xy \geq 1.$$

23. Obliczyć pole części wspólnej wnętrza elipsy o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < a < b)$$

i koła o środku w początku układu i promieniu r .

Wskazówka. Zauważyć najpierw, że elipsa i okrąg koła nie mają punktów wspólnych gdy $r < a$ lub $r > b$. Przy obliczaniu całki wykorzystać Przykład 21 §2.

24. Obliczyć długość odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ stosując wzór całkowy (punkt 4). Porównać ze znanym wzorem z geometrii elementarnej.

25. Znaleźć funkcję $s(x)$ określoną wzorem (15), jeżeli krzywa K dana jest równaniem

- a.) $y = x^2 \quad (x \geq 0)$,
- b.) $x^2 + y^2 = r^2 \quad (y \geq 0, r > 0)$,
- c.) $x = y^2 \quad (y \geq 0, x \geq 1)$,
- d.) $y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (x \geq 0)$.

Wskazówka. W punkcie a.) wykorzystać Przykład 5. W punkcie c.) całkować przez podstawienie przyjmując funkcję podcałkową jako nową zmienną. W punkcie d.) oprzeć się na wzorach (25), (26) rozdz. III §5.

Uwaga. Krzywa określona w punkcie d.) nosi nazwę *krzywej łańcuchowej*. W mechanice dowodzi się, że opisuje ona kształt łańcucha zaczepionego w dwóch punktach i zwisającego swobodnie pod własnym ciężarem.

26. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi x -ów obszaru określonego nierównościami

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \sin x.$$

27. Jaka bryła powstanie przez obrót dookoła osi x -ów obszaru płaskiego ograniczonego prostymi $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ ($a < b$, $0 < c < d$)? Stosując wzory całkowe obliczyć objętość i powierzchnię boczną tej bryły. Porównać ze wzorami z geometrii elementarnej.

28. Obliczyć objętość i powierzchnię boczną bryły powstałej przez obrót dookoła osi x -ów obszaru ograniczonego wykresem funkcji

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

i prostymi $x = 0$, $x = b > 0$, $y = 0$.

Wskazówka. Wykorzystać Przykład 5.

29. Udowodnić uogólniony wzór na całkowanie przez części

a.) dla całek nieoznaczonych

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v dx,$$

b.) dla całek oznaczonych

$$\int_a^b uv^{(n)} dx = \left[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}v dx.$$

Zakładamy, że funkcje u, v mają ciągle pochodne do rzędu n włącznie.
Wskazówka. Zastosować indukcję względem n .

30. Przyjmując w zadaniu 29 b.)

$$u(x) = (b - x)^{n-1}, \quad v(x) = f(x)$$

wyprowadzić wzór Taylora z resztą w postaci całkowej

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + r_n$$

gdzie

$$r_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(x) (b-x)^{n-1} dx$$

(zakładamy, że $f \in C^n([a, b])$).

31. Korzystając z pierwszego twierdzenia o wartości średniej (twierdzenie 3) przedstawić resztę r_n określoną w zadaniu 30 jako resztę w postaci Lagrange'a (por. (4) rozdz. III §5).

32. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu i współrzędne środka masy odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ (zakładamy, że punkty A, B leżą w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy oraz że $x_1 \neq x_2$).

33. Znaleźć momenty statyczne względem osi układu i współrzędne środka masy figury płaskiej zawartej między wykresem funkcji f a osią x -ów, jeżeli

$$(i) \quad f(x) = x|\sin x|, \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi,$$

$$(ii) \quad f(x) = x^\alpha, \quad 0 \leq x \leq a \quad (\alpha > 0),$$

$$(iii) \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq r.$$

Podać rysunek.

Wskazówka. W punkcie (i) zastosować całkowanie przez części, w punkcie (iii) wykorzystać Przykład 3.

34. Niech f, g będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ spełniającymi warunek

$$0 \leq g(x) < f(x) \quad \text{dla } x \in (a, b) \quad (0 \leq a < b)$$

i niech D oznacza obszar zawarty między wykresami tych funkcji. Przeprowadzając rozumowanie podobne jak w punkcie 6 uzasadnić następującą definicję momentów statycznych obszaru D względem osi układu

$$M_x(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx, \quad M_y(D) = \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx.$$

Stosując wzory (47) podać współrzędne (ξ, η) środka masy obszaru D i uzasadnić drugą regułę Guldina.

35. Opierając się na zadaniu 34 znaleźć momenty statyczne względem osi układu oraz środek masy obszaru D , jeżeli

$$\text{a.) } f(x) = 2, \quad g(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\text{b.) } f(x) = 3x, \quad g(x) = x, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

36. Udowodnić, że środkiem masy koła jest jego środek geometryczny.

Wskazówka. Zakładając, że koło o promieniu r ma środek w punkcie (b, a) ($a > r$, $b > r$), oprzeć się na wzorach (47) i na zadaniu 34. Przy obliczaniu całek wykorzystać rachunki przeprowadzone w Przykładzie 10 oraz zadanie 7.

37. Znaleźć objętość torusa powstałego przez obrót koła o środku (b, a) i promieniu r ($a > r$, $b > r$) dokoła osi x -ów

(i) stosując wzór (20) na objętość bryły obrotowej,

(ii) opierając się na drugiej regule Guldina (por. zadanie 34).

Wskazówka. W punkcie (i) wykorzystać rachunki przeprowadzone w Przykładzie 10, w punkcie (ii) oprzeć się na zadaniu 36.

38. Niech D oznacza część koła o środku $(r, 0)$ i promieniu r łączącą w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku).

(i) Znaleźć momenty statyczne względem obu osi oraz współrzędne (ξ, η) środka masy obszaru D korzystając ze wzorów (44), (47).

(ii) Znaleźć współrzędną η środka masy opierając się na drugiej regule Guldina (por. Uwaga po Przykładzie 13).

Wskazówka. W punkcie (i) wykorzystać rachunki przeprowadzone w Przykładzie 10 oraz zadanie 7.

39*. Opierając się na rachunkach przeprowadzonych w punkcie 8 wykazać, że metoda Simpsona daje dokładną wartość całki gdy f jest wielomianem stopnia ≤ 3 .

40*. Obliczyć liczbę π z dokładnością do czterech miejsc po przecinku stosując do całki

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

metody przybliżone opisane w punktach 7, 8.

§4. Całka niewłaściwa.

♡ ♡ ♡

1. Obliczanie pola pod wykresem funkcji nieujemnej i nieograniczonej. Zacznijemy od prostego zadania: obliczyć pole obszaru płaskiego Ω zawartego między wykresem funkcji

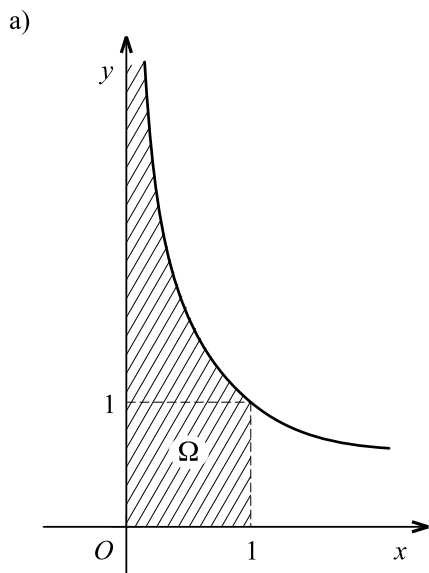
$$(1) \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a osią x -ów w przedziale $(0,1]$. Ponieważ

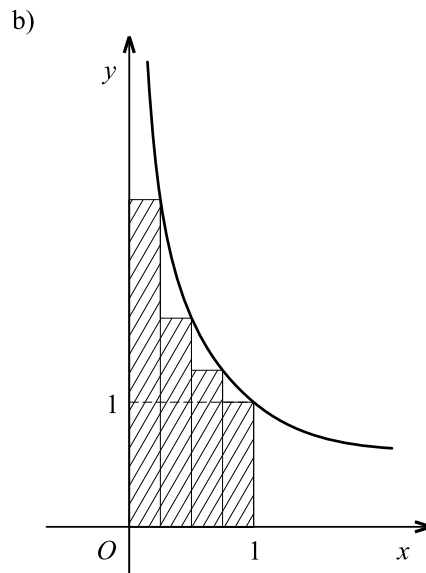
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty,$$

obszar Ω jest nieograniczony (rys. 76a). Obszar ten może jednak mieć skończone pole, podobnie jak suma nieskończonej ilości wyrazów czyli szereg nieskończony może mieć skończoną wartość (por. rozdz. IV). W §1 postawiliśmy podobne zadanie dla funkcji f ciągłej w przedziale domkniętym $[a, b]$. Rozwiązaliśmy je konstruując sumy przybliżone, co doprowadziło ostatecznie do pojęcia całki oznaczonej

$$\int_a^b f(x) dx$$



[rys. 76a]



[rys. 76b]

będącej miarą pola obszaru Ω . Spróbujemy teraz przenieść opisaną w §1 punkt 1 konstrukcję na przypadek funkcji g określonej wzorem (1).

Przy ustalonym n rozważmy podział przedziału $(0,1]$ na n równych części - mamy zatem

$$x_j = \frac{j}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Wybierając jako punkt pośredni ξ_j prawy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$ utworzmy sumę przybliżoną

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(x_j).$$

Suma ta jest równa polu obszaru Ω_n utworzonego z n prostokątów, z których każdy ma jako jeden bok odcinek $[x_{j-1}, x_j]$ a drugi bok ma długość $g(x_j)$ (na rys. 76b przyjęto $n = 4$, obszar Ω_4 zakreskowany). Oczywiście im większe n tym obszar Ω_n lepiej przybliża obszar Ω . Można więc przypuszczać, że

$$(2) \quad |\Omega| = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Aby obliczyć granicę (2) zauważmy najpierw, że

$$(3) \quad S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

W celu oszacowania sumy po prawej stronie skorzystamy z nierówności

$$\frac{1}{\sqrt{j+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{j}} \quad (j \leq x \leq j+1),$$

która po scałkowaniu w przedziale $[j, j+1]$ (por. twierdzenie 4 i Przykład 9 §1) daje

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{j+1}} \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{j}}$$

dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$. Sumując względem j dostajemy stąd

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

czyli, po obliczeniu całek,

$$2\sqrt{n+1} - 1 \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \leq 2\sqrt{n} - 1,$$

skąd wobec (3) wynika oszacowanie

$$(5) \quad a_n \leq S_n \leq b_n,$$

gdzie

$$a_n = 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad b_n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

z nierówności (5) wynika na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2.$$

Powtórzmy teraz opisany przed chwilą rachunek dzieląc, ponownie jak poprzednio, przedział $(0,1]$ na n równych części ale obierając w inny sposób punkty pośrednie. Przyjmiemy mianowicie dla ustalonego $c > 0$

$$(7) \quad \xi_1 = \frac{1}{c^2 n^2}, \quad \xi_j = x_j = \frac{j}{n} \quad \text{dla } j = 2, \dots, n.$$

Dla $n > \frac{1}{c^2}$ mamy $\xi_1 \in (0, x_1]$ i możemy utworzyć sumę przybliżoną

$$\bar{S}_n = \frac{1}{n}g(\xi_1) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n g(\xi_j),$$

która również jest równa polu figury złożonej z prostokątów (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku). Zgodnie z (1), (7)

$$\bar{S}_n = c + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

Opierając się na nierówności (4) dostajemy oszacowanie

$$\int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{j=2}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

z którego po obliczeniu całek wynika nierówność

$$(8) \quad \bar{a}_n \leq \bar{S}_n \leq \bar{b}_n,$$

gdzie

$$\bar{a}_n = c + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{b}_n = c + 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Ponieważ

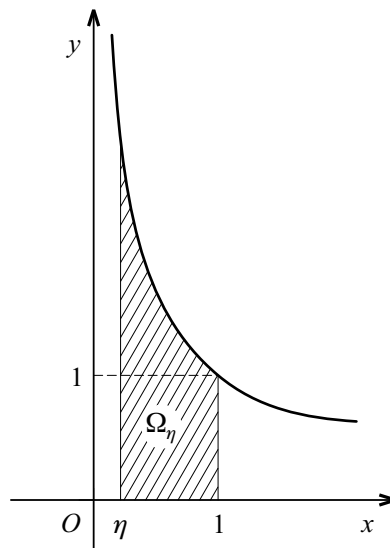
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{b}_n = c + 2$$

stosując ponownie twierdzenie o trzech ciągach otrzymujemy z (8)

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = c + 2.$$

Porównując wyniki (6), (9) stwierdzamy, że granica ciągu sum przybliżonych zależy od sposobu, w jaki obieramy punkty pośrednie ξ_j : ustalając dowolnie liczbę $a \geq 2$ możemy je obrać w taki sposób, by ciąg sum przybliżonych był zbieżny do a . Widzimy więc, że konstrukcja prowadząca do obliczenia pola pod wykresem funkcji opisana w §1 zawodzi w przypadku gdy funkcja ta jest nieograniczona (a więc i nieciągła) w jednym z punktów końcowych przedziału. Możemy jednak postąpić inaczej, obliczając najpierw pole obszaru Ω_η zawartego między wykresem funkcji g a osią x -ów w przedziale domkniętym $[\eta, 1]$ a następnie przechodząc do granicy przy $\eta \rightarrow 0+$ (rys. 77) Ponieważ jak wiemy (por. §1)

$$|\Omega_\eta| = \int_\eta^1 g(x) dx = 2 - 2\sqrt{\eta}$$



[rys. 77]

więc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} |\Omega_\eta| = 2.$$

Znalezioną granicę możemy uważać za pole obszaru Ω . Zauważmy, że tą samą wartość otrzymaliśmy aproksymując obszar Ω przez obszary Ω_n złożone z prostokątów, gdy jako punkt pośredni w sumie przybliżonej został obrany prawy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$.

2. Całka niewłaściwa po przedziale ograniczonym. W §1 określiliśmy całkę funkcji ciągłej w przedziale domkniętym jako granicę ciągu sum przybliżonych. W przypadku funkcji nieujemnej całka ta stanowi miarę pola zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów. Jak widać z przykładu podanego w punkcie 1, metoda ta zawodzi w przypadku funkcji nieciągłej w jednym z końców przedziału, gdyż granica ciągu sum przybliżonych może zależeć od sposobu, w jaki zostały one skonstruowane - na przykład od wyboru

punktów pośrednich ξ_j . Jako punkt wyjścia do definicji całki takiej funkcji przyjmiemy przedstawiony w końcu punktu 1 sposób obliczania pola pod wykresem funkcji g określonej wzorem (1).

Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $(a, b]$ i niech

$$G(\eta) = \int_{a+\eta}^b f(x) dx.$$

Jeżeli istnieje skończona granica

$$(10) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\eta)$$

to mówimy, że *całka niewłaściwa*

$$(11) \quad \int_a^b f(x) dx$$

jest zbieżna i przyjmujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x) dx.$$

Jeżeli granica (10) nie istnieje lub jest granicą niewłaściwą, to mówimy, że *całka niewłaściwa* (11) *jest rozbieżna*.

Przykład 1. Zbadamy całkę

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Funkcja podcałkowa

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

jest ciągła w przedziale $(0, 1]$, natomiast nie jest określona dla $x = 0$. Wobec tego całka $I(\alpha)$ jest całką niewłaściwą. Zakładając, że $\alpha \neq 1$ dostajemy przy ustalonym $0 < \eta < 1$

$$(12) \quad \int_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_\eta^1 = \frac{1}{1-\alpha} (1 - \eta^{1-\alpha})$$

natomiast dla $\alpha = 1$ mamy

$$(13) \quad \int_\eta^1 \frac{dx}{x} = \left[\log x \right]_\eta^1 = -\log \eta.$$

Ze wzorów (12), (13) widać, że skończona granica

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

istnieje tylko wtedy gdy $\alpha < 1$ i wówczas

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Zatem całka niewłaściwa $I(\alpha)$ jest zbieżna dla $0 < \alpha < 1$ i rozbieżna dla $\alpha \geq 1$, przy tym

$$I(\alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \quad \text{dla} \quad 0 < \alpha < 1.$$

W podobny sposób można rozważać całkę niewłaściwą przy założeniu, że funkcja podcałkowa jest ciągła w przedziale $[a, b)$. Przyjmujemy wówczas

$$(14) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx.$$

Jeżeli funkcja podcałkowa jest ciągła tylko w przedziale otwartym (a, b) , to jej całkę niewłaściwą określamy jako sumę całek niewłaściwych poprzednio zdefiniowanych czyli

$$(15) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

gdzie c jest dowolnie ustaloną liczbą z przedziału (a, b) (proponujemy, by Czytelnik udowodnił, że prawa strona wzoru (15) nie zależy od wyboru liczby c).

Wzory rachunkowe, podane poprzednio dla całek oznaczonych, przenoszą się łatwo na całki niewłaściwe zbieżne. W szczególności pozostają prawdziwe: wzór (25) §1 (wyrażający związek między całką a funkcją pierwotną) oraz wzory (1), (2) §3 (na całkowanie przez części i przez podstawienie) - z tym, że wartość funkcji w punkcie należy zastąpić przez jej granicę.

Przykład 2. Zbadajmy całkę

$$J(\beta) = \int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^{\beta}} \quad (\beta > 0).$$

Funkcja podcałkowa

$$f(x) = \frac{1}{(2-x)^{\beta}}$$

jest ciągła w przedziale $[0, 2)$ i nieokreślona dla $x = 2$, zatem całka $J(\beta)$ jest całką niewłaściwą. Ponieważ funkcja pierwotna ma postać

$$F_{\beta}(x) = \begin{cases} \frac{(2-x)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{dla } \beta \neq 1, \\ -\log(2-x) & \text{dla } \beta = 1, \end{cases}$$

więc

$$(16) \quad \int_0^{2-\eta} \frac{dx}{(2-x)^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} (\eta^{1-\beta} - 2^{1-\beta}) & \text{dla } \beta \neq 1, \\ -\log \eta + \log 2 & \text{dla } \beta = 1. \end{cases}$$

Prawa strona (16) ma skończoną granicę przy $\eta \rightarrow 0+$ tylko wtedy, gdy $\beta < 1$. Zatem całka niewłaściwa $J(\beta)$ jest zbieżna dla $0 < \beta < 1$ i rozbieżna dla $\beta \geq 1$, przy tym

$$J(\beta) = \frac{2^{1-\beta}}{1-\beta} \quad \text{dla } 0 < \beta < 1.$$

Niech K będzie krzywą o równaniu

$$y = f(x) \quad (x \in [a, b]),$$

gdzie f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Przy założeniu, że f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, zostały uzasadnione w §3 następujące wzory całkowe:

wzór (14) określający długość krzywej K ,

wzór (30) określający pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej K dokoła osi x -ów,

wzory (43) określające momenty statyczne krzywej K względem obu osi układu współrzędnych

(we wzorach (43) zakładaliśmy dodatkowo, że krzywa K leży w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy tzn. że $0 \leq a < b$ oraz że $f(x) \geq 0$). Jeżeli osłabimy nieco założenia przyjmując, że pochodna f' jest ciągła tylko w przedziale otwartym (a, b) , to całkę występującą w każdym ze wspomnianych wzorów należy rozumieć jako całkę niewłaściwą. Wzory te, jak również wynikające z nich reguły Guldina (§3 punkt 6) pozostają prawdziwe, jeżeli występujące w nich całki niewłaściwe są zbieżne.

Przykład 3. W przykładzie 10 §3 rozważaliśmy bryłę zwaną *torusem* utworzoną przez obrót koła o środku $(0, a)$ i promieniu r ($a > r$) dokoła osi x -ów (rys. 70) i obliczyliśmy jej objętość. Obecnie przejdziemy do obliczenia jej powierzchni. Powierzchnia torusa S składa się z dwóch części S_+ , S_- otrzymanych przez obrót półokręgów K_+ , K_- odpowiednio, zatem

$$|S| = |S_+| + |S_-|.$$

Po rozwiązaniu względem y równania okręgu K ograniczającego koło otrzymujemy

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

stąd

$$(y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2},$$

zatem

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

niezależnie od znaku stojącego przed pierwiastkiem i zgodnie ze wzorem (30) §3

$$(17) \quad |S_+| = 2\pi \int_{-r}^r \frac{ar}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-r}^r r dx$$

oraz

$$(18) \quad |S_-| = 2\pi \int_{-r}^r \frac{ar}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx - 2\pi \int_{-r}^r r dx.$$

Po dodaniu (17), (18) dostajemy

$$(19) \quad |S| = 4\pi ar \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

przy czym całka po prawej stronie jest całką niewłaściwą (funkcja podcałkowa nie jest określona dla $x = \pm r$). W celu obliczenia całki zastosujemy podstawienie

$$\frac{x}{r} = t$$

skąd

$$dx = r dt.$$

Wobec tego

$$\int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \left[\arcsin t \right]_{-1}^1$$

i podstawiając do (19) otrzymujemy pole powierzchni torusa

$$|S| = 4\pi^2 ar.$$

3. Warunki zapewniające zbieżność całki niewłaściwej. Z warunku Cauchy'ego istnienia granicy funkcji omówionego w rozdz. III §2 łatwo wyprowadzić warunek konieczny i dostateczny zbieżności całki niewłaściwej. Dla ustalenia uwagi zajmiemy się przypadkiem, gdy funkcja podcałkowa jest nieciągła (lub nawet nieokreślona) w lewym końcu przedziału. Twierdzenie 13 (rozdz. III §2) można łatwo przeformułować zastępując granicę przez granicę prawostronną i sąsiedztwo deltowe przez sąsiedztwo prawostronne. Jako wniosek otrzymujemy

Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $(a, b]$. Wówczas całka niewłaściwa (11) jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla dowolnych $a < a' < a'' < a + \delta$ zachodziła nierówność*

$$(20) \quad \left| \int_{a'}^{a''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Niech

$$G(\eta) = \int_{a+\eta}^b f(x) dx.$$

Skończona granica

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\eta)$$

istnieje wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla dowolnych $0 < \eta' < \eta'' < \delta$ zachodziła nierówność

$$(21) \quad |G(\eta') - G(\eta'')| < \varepsilon.$$

Na podstawie twierdzenia o podziale przedziału całkowania

$$\int_{a+\eta'}^b f(x) dx = \int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x) dx + \int_{a+\eta''}^b f(x) dx$$

wobec tego

$$G(\eta') - G(\eta'') = \int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x) dx$$

i nierówność (21) przyjmuje postać (20), jeżeli położymy $a' = a + \eta'$, $a'' = a + \eta''$. \square

Prostym wnioskiem z udowodnionego twierdzenia jest następujące *kryterium porównawcze zbieżności całki niewłaściwej*:

Twierdzenie 2. Niech f, g będą funkcjami ciągłymi w przedziale $(a, b]$. Jeżeli w pewnym przedziale (a, c) (gdzie $a < c \leq b$) zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq g(x)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_a^c g(x) dx$$

jest zbieżna, to całka niewłaściwa

$$\int_a^b f(x) dx$$

również jest zbieżna.

DOWÓD wynika natychmiast z nierówności

$$\left| \int_{a'}^{a''} f(x) dx \right| \leq \int_{a'}^{a''} |f(x)| dx \leq \int_{a'}^{a''} g(x) dx$$

i z twierdzenia 1.

♡ ♡ ♡

Przykład 4. Funkcją Beta nazywamy całkę

$$(22) \quad B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

gdzie $a, b > 0$. Rozważana całka jest całką niewłaściwą gdy przynajmniej jedna z liczb a, b należy do przedziału $(0, 1)$, gdyż wówczas odpowiedni wykładnik potęgi jest ujemny i w konsekwencji funkcja podcałkowa nie jest określona w jednym z końców przedziału. Udowodnimy, że jest to całka niewłaściwa zbieżna. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $0 < a < 1, b \geq 1$, wówczas pierwszy czynnik pod całką jest nieokreślony dla $x = 0$. Drugi czynnik jest funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[0, 1]$, jest więc funkcją ograniczoną na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 12, rozdz. III §3). Istnieje zatem liczba $M > 0$ taka, że dla $x \in [0, 1]$

$$0 \leq (1-x)^{b-1} \leq M,$$

a stąd wynika nierówność

$$(23) \quad x^{a-1} (1-x)^{b-1} \leq Mx^{a-1}$$

dla $0 < x \leq 1$. W Przykładzie 1 pokazaliśmy, że całka niewłaściwa

$$\int_0^1 x^{a-1} dx$$

jest zbieżna dla $0 < a < 1$. Z twierdzenia 1 wynika natychmiast, że pomnożenie funkcji podcałkowej przez stałą różną od zera nie wpływa na zbieżność całki niewłaściwej, wobec tego całka

$$\int_0^1 Mx^{a-1} dx$$

również jest zbieżna, a stąd i z nierówności (23) wynika na mocy Twierdzenia 2 zbieżność całki (22). Dowód zbieżności w przypadkach, gdy $a \geq 1, 0 < b < 1$ lub $0 < a, b < 1$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

♡ ♡ ♡

4. Całka niewłaściwa po przedziale nieograniczonym. Dotąd rozważaliśmy wyłącznie całki rozciągnięte na przedział ograniczony dopuszczając sytuację, gdy funkcja podcałkowa jest nieograniczona w jednym z końców przedziału. Teraz zajmiemy się przypadkiem, gdy przedział całkowania jest nieograniczony tzn. jest półprostą lub całą osią x -ów. Takie całki również nazywamy *całkami niewłaściwymi*.

Zakładając, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, \infty)$ przyjmiemy jako definicję

$$(24) \quad \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx,$$

o ile istnieje skończona granica po prawej stronie. Mówimy wówczas, że całka niewłaściwa (24) jest *zbieżna*. Jeżeli f jest funkcją nieujemną, to całka ta wyraża pole nieograniczonego obszaru zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów. Jeżeli granica po prawej stronie (24) nie istnieje lub jest granicą niewłaściwą, to mówimy, że całka niewłaściwa (24) jest *rozbieżna*.

W podobny sposób przyjmujemy dla funkcji ciągłej w przedziale $(-\infty, b]$

$$(25) \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^b f(x) dx.$$

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na całej osi rzeczywistej lub w jednym z przedziałów otwartych $(-\infty, a)$, (a, ∞) , to przyjmujemy jako definicję

$$(26) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^a f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx \quad (c < a), \\ \int_a^{\infty} f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad (a < c), \end{aligned}$$

przy czym całkę po lewej stronie uważamy za zbieżną jeżeli zbieżne są obie całki po prawej stronie (proponujemy, by Czytelnik przeprowadził prosty dowód, że prawe strony we wzorach (26) nie zależą od wyboru liczby c).

Podobnie, jak w przypadku całek niewłaściwych po przedziale ograniczonym, wzory rachunkowe udowodnione poprzednio dla całek oznaczonych przenoszą się na całki niewłaściwe zbieżne postaci (24), (25), (26) z tym, że przez wartość funkcji w punkcie ∞ ($-\infty$) należy rozumieć jej granicę.

W dalszym ciągu zajmijmy się całką niewłaściwą postaci (24). Wszystkie udowodnione dalej twierdzenia dadzą się łatwo przenieść na przypadek całek niewłaściwych postaci (25) i (26).

Przykład 5. Zbadajmy całkę niewłaściwą

$$(27) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

w której funkcja podcałkowa

$$(28) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

jest ciągła na całej osi rzeczywistej. Mamy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x]_0^t = \frac{\pi}{2},$$

zatem całka niewłaściwa (27) jest zbieżna i przy tym

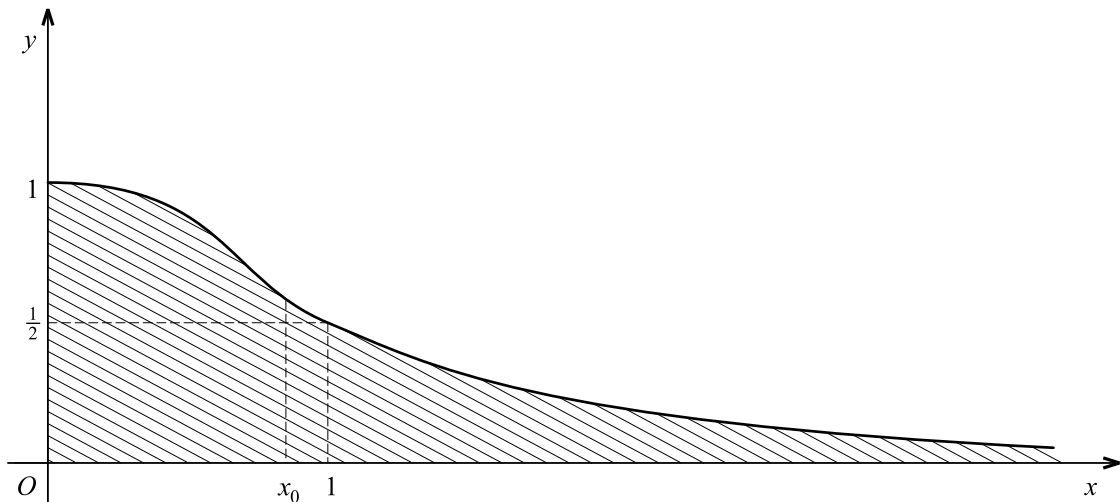
$$(29) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Wykres funkcji podcałkowej można łatwo narysować. Różniczkując (28) dostajemy

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

zatem f maleje w przedziale $[0, \infty)$ i ma punkt przegięcia $x_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$



[rys. 78]

Szkic wykresu podajemy na rys. 78. Pole obszaru zakreskowanego wynosi $\frac{\pi}{2}$.

Przykład 6. Zbadamy zbieżność całki niewłaściwej

$$K(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{gdzie } \alpha > 0.$$

Funkcja podcałkowa jest ciągła w przedziale $[1, \infty)$. Przy ustalonym $t > 1$ mamy

$$\int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - 1) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \log t & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

Granica po prawej stronie przy $t \rightarrow \infty$ istnieje tylko dla $\alpha > 1$. Wobec tego całka $K(\alpha)$ jest zbieżna dla $\alpha > 1$ i rozbieżna dla $0 < \alpha \leq 1$ i przy tym

$$K(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{dla } \alpha > 1.$$

Podobnie, jak w przypadku całki niewłaściwej po przedziale ograniczonym, można łatwo otrzymać warunek konieczny i dostateczny zbieżności całki (24) opierając się na twierdzeniu 14 rozdz. III §2.

Twierdzenie 3. Zakładamy, że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, \infty)$. Wówczas całka niewłaściwa (24) jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać taką liczbę $M > 0$, że dla dowolnych $M < t' < t''$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Wystarczy zauważyć, że przyjmując

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

mamy

$$F(t'') - F(t') = \int_{t'}^{t''} f(x) dx.$$

□

Z udowodnionego twierdzenia wynika natychmiast następujące kryterium porównawcze zbieżności:

Twierdzenie 4. Niech f, g będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, \infty)$. Jeżeli istnieje liczba $A > 0$ taka, że dla $x \geq A$ zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq g(x)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_A^\infty g(x) dx$$

jest zbieżna, to całka niewłaściwa (24) również jest zbieżna.

DOWÓD wynika natychmiast z nierówności

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| \leq \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx \leq \int_{t'}^{t''} g(x) dx$$

i z twierdzenia 3.

□

♡ ♡ ♡

Przykład 7. Wykażemy zbieżność całki niewłaściwej

$$(30) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Wprawdzie wyrażenie podcałkowe nie jest określone w lewym końcu przedziału, jednak zgodnie z (11) rozdz. III §2 istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Jeżeli więc określimy funkcję podcałkową jako

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x > 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

to otrzymamy funkcję ciągłą w przedziale $[0, \infty)$ i możemy rozważać całkę niewłaściwą (30).

Przechodząc do dowodu zbieżności całki zauważmy najpierw, że

$$(31) \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \quad \text{dla } x > \frac{\pi}{2},$$

jednakże, jak wykazaliśmy w Przykładzie 6, całka

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

jest rozbieżna i wobec tego nie możemy zastosować kryterium porównawczego opierając się na nierówności (31). Spóbjemy udowodnić zbieżność całki (30) opierając się na twierdzeniu 3. Zastosujemy drugie twierdzenie o wartości średniej (twierdzenie 5 §3) przyjmując

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

co dla $0 < M < t' < t''$ daje

$$(32) \quad \int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{t'} \int_{t'}^{\tau} \sin x dx + \frac{1}{t''} \int_{\tau}^{t''} \sin x dx,$$

gdzie $\tau \in [t', t'']$. Ponieważ dla dowolnych a, b

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| = |\cos a - \cos b| \leq 2,$$

z (32) dostajemy oszacowanie

$$\left| \int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2 \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} \right) < \frac{4}{M},$$

zatem nierówność epsilonowa

$$\left| \int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon$$

będzie spełniona, jeżeli przyjmiemy $M = \frac{4}{\varepsilon}$.

Przykład 8. Zbadamy całkę niewłaściwą

$$D_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Całka D_1 była badana w Przykładzie 5. Stwierdziliśmy, że jest zbieżna i przy tym

$$D_1 = \frac{\pi}{2},$$

wobec tego możemy w dalszym ciągu założyć, że $n \geq 2$. Ponieważ

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

dla dowolnego x , na mocy kryterium porównawczego (twierdzenie 4) całka D_n jest również zbieżna. Aby ją obliczyć zastosujemy podstawienie

$$x = \operatorname{tg} t,$$

z którego wynika, że

$$1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \infty.$$

Otrzymujemy zatem

$$D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt,$$

czyli przy użyciu oznaczeń punktu 2 §3

$$D_n = B_{2n-2}.$$

Na podstawie wzoru (8) §3 otrzymujemy stąd

$$D_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n \geq 2).$$

♡ ♡ ♡

5. Związek między zbieżnością całki niewłaściwej a zbieżnością szeregu nieskończonego. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 5 (Cauchy'ego - Maclaurina). Niech f będzie funkcją ciągłą, malejącą i dodatnią w przedziale $[1, \infty)$. Wówczas całka niewłaściwa

$$(33) \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg nieskończony

$$(34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

DOWÓD. Ponieważ f jest malejąca, w przedziale $[k-1, k]$ ($k = 2, 3, \dots$) zachodzi nierówność

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1),$$

która po scałkowaniu daje

$$(35) \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1).$$

Z nierówności (35) wynika, że

$$(36) \quad S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli całka niewłaściwa (33) jest zbieżna, to jest ona granicą ciągu

$$a_n = \int_1^n f(x) dx,$$

przy czym ciąg ten jest rosnący wobec założenia że $f(x) > 0$. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq \int_1^{\infty} f(x) dx$$

i stąd na mocy (36)

$$S_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Wobec tego szereg (34) o wyrazach dodatnich jest zbieżny, gdyż ciąg jego sum częściowych $\{S_n\}$ jest ograniczony z góry.

Jeżeli natomiast szereg (34) jest zbieżny, to spełnia on warunek Cauchy'ego (por. twierdzenie 6 rozdz. IV §1) i wobec tego do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ i dowolnego m naturalnego zachodziła nierówność

$$(37) \quad \sum_{k=n}^{n+m-1} f(k) < \varepsilon.$$

Aby udowodnić zbieżność całki (33) oprzemy się na twierdzeniu 3. Przyjmijmy $M = N + 1$ i obierzmy dowolnie liczby t', t'' spełniające nierówność

$$N + 1 = M < t' < t''.$$

Istnieją wówczas liczby naturalne n, m takie, że

$$N < n \leq M < t' < t'' < n + m,$$

zatem

$$\int_{t'}^{t''} f(x) dx \leq \int_n^{n+m} f(x) dx,$$

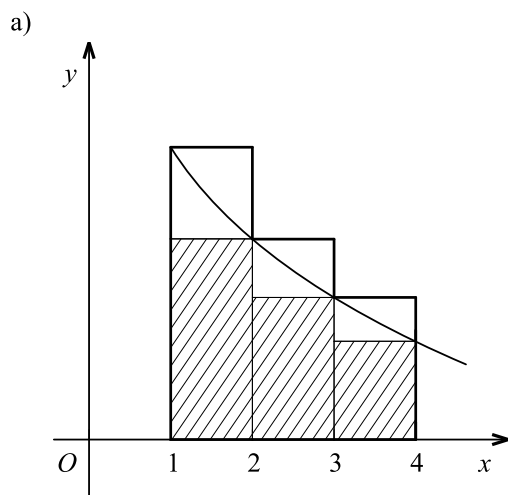
a stąd wykorzystując prawą część nierówności (35) oraz (37) dostajemy

$$(38) \quad \int_{t'}^{t''} f(x) dx \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} f(k) < \varepsilon.$$

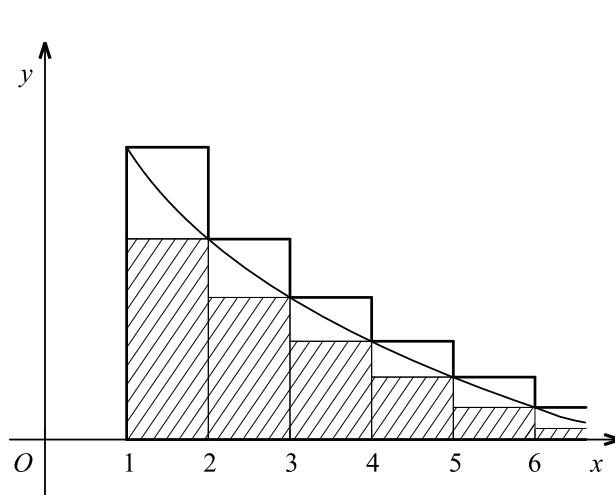
Ponieważ liczba M została dobrana do ε , nierówność (38) oznacza, że spełniony jest warunek konieczny i dostateczny zbieżności całki (33) podany w twierdzeniu 3, zatem całka jest zbieżna. \square

Udowodnione twierdzenie ma prosty sens geometryczny. Załóżmy, że całka niewłaściwa (33) (a zatem i szereg (34)) są zbieżne. Z nierówności (35) wynika, że

$$(39) \quad \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$



[rys. 79a]



[rys. 79b]

(na rys. 79a lewa suma oznacza łączne pole prostokątów zakreskowanych, zaś prawa suma daje łączne pole prostokątów obwiedzione grubszą linią dla $n = 4$). Przechodząc w (39) do granicy przy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy nierówność

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

z której wynika, że pole pod wykresem funkcji w przedziale $[1, \infty)$ jest ograniczone z dołu przez pole figury zakreskowanej i z góry przez pole figury obwiedzionej grubszą linią (rys. 79b).

Przykład 9. Jak wykazaliśmy w Przykładzie 6, całka

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

jest zbieżna dla $\alpha > 1$ i rozbieżna dla $0 < \alpha \leq 1$. Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego - Maclaurin'a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest również zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $0 < \alpha \leq 1$. Ten sam wynik otrzymaliśmy w inny sposób w rozdziale IV §2 (Przykład 1).

♡ ♡ ♡

6. Pewne specjalne całki niewłaściwe. W Przykładzie 7 udowodniliśmy zbieżność całki niewłaściwej

$$(40) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

teraz udowodnimy, że jej wartość wynosi $\frac{\pi}{2}$. W dowodzie oprzemy się na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 6 (lemat Riemanna). *Jeżeli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, to*

$$(41) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0,$$

oraz

$$(42) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

DOWÓD. Udowodnimy (41), dowód (42) przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Na mocy twierdzenia 9 rozdz. III §3 funkcja f jest jednostajnie ciągła w przedziale $[a, b]$, zatem ustalając dowolnie $\varepsilon > 0$ można dobrać podział tego przedziału

$$(43) \quad a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$$

w taki sposób, że

$$(44) \quad |f(x) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

dla $x \in [a_{k-1}, a_k]$, $k = 1, 2, \dots, m$. Ponadto zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa (twierdzenie 12 rozdz. III §3) funkcja f jest ograniczona w przedziale $[a, b]$, istnieje więc stała $M > 0$ taka, że

$$(45) \quad |f(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Wykorzystując podział (43) przedstawimy całkę w postaci sumy

$$(46) \quad \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) \sin nx \, dx$$

przy czym

$$(47) \quad \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) \sin nx \, dx = \int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(x) - f(a_k)) \sin nx \, dx + f(a_k) \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin nx \, dx.$$

Ponieważ

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin nx \, dx \right| = \frac{1}{n} |\cos(na_{k-1}) - \cos(na_k)| \leq \frac{2}{n},$$

z równości (47) dostajemy po uwzględnieniu (44), (45)

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) \sin nx \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_k - a_{k-1}) + \frac{2M}{n},$$

skąd po zsumowaniu względem k wynika zgodnie z (46)

$$\left| \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Mm}{n}.$$

Wobec tego dla $n > 4Mm\varepsilon^{-1}$ zachodzi nierówność epsilonowa

$$\left| \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| < \varepsilon$$

co kończy dowód. □

Do badania całki (40) będzie potrzebny wzór sumacyjny

$$(48) \quad \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (t \neq 2k\pi, \quad k \text{ całkowite}),$$

który łatwo otrzymać przy pomocy prostych przekształceń trygonometrycznych. Mnożąc bowiem lewą stronę przez mianownik i korzystając z pierwszego wzoru (38) rozdz.III §1 dostajemy

$$\begin{aligned} & \sin \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} \cos t + 2 \sin \frac{t}{2} \cos 2t + \dots + 2 \sin \frac{t}{2} \cos nt = \\ & \sin \frac{1}{2}t + \left(\sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t \right) + \left(\sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t \right) + \dots + \left(\sin \frac{2n+1}{2}t - \sin \frac{2n-1}{2}t \right), \end{aligned}$$

co po redukcji daje licznik prawej strony. Wzór (48) można również udowodnić metodą indukcji - por. zadanie 25 rozdz. I §1. Przyjmując $t = 2x$ we wzorze (48) otrzymujemy

$$1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + \dots + 2 \cos 2nx = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x},$$

co po scałkowaniu w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ daje

$$(49) \quad \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx + \dots + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \, dx$$

czyli

$$(50) \quad A_n = \frac{\pi}{2},$$

gdzie A_n oznacza całkę po prawej stronie (49) (wszystkie całki po lewej stronie znikają). Natomiast całka

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} \, dx$$

po podstawieniu

$$y = (2n + 1)x$$

przyjmuje postać

$$B_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy$$

skąd wynika, że

$$(51) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Ponadto

$$(52) \quad A_n - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n + 1)x dx,$$

gdzie

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

dla $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Stosując regułę de l'Hospitala (twierdzenie 16 rozdz.III §4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0, \end{aligned}$$

zatem przyjmując dodatkowo

$$f(0) = 0$$

możemy uważać funkcję f za ciągłą w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ i zastosować do niej twierdzenie 6, z którego zgodnie z (52) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B_n) = 0.$$

Wobec tego uwzględniając (50), (51) dostajemy żądany wynik

$$(53) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Przejdziemy teraz do obliczenia *całki Poissona*¹

$$P = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

¹Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), matematyk francuski, zajmował się równaniami różniczkowymi, rachunkiem całkowym i teorią prawdopodobieństwa. Uprawiał również fizykę (m.in. teorię sprężystości, hydrodynamikę oraz elektrostatykę i magnetyzm). Był członkiem Paryskiej Akademii Nauk oraz Akademii Nauk w Petersburgu.

Zauważmy najpierw, że jest to całka niewłaściwa zbieżna. Z nierówności

$$(54) \quad e^t \geq 1 + t \quad (t \in \mathbb{R})$$

(por. (62) rozdz.III §4) po podstawieniu $t = x^2$ otrzymujemy bowiem

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ponieważ zaś zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

była udowodniona poprzednio (Przykład 5), zbieżność całki P wynika z kryterium porównawczego (Twierdzenie 4). Aby obliczyć całkę Poissona zastosujemy podstawienie

$$x = y \sqrt{n},$$

które daje

$$(55) \quad P = \sqrt{n} P_n,$$

gdzie

$$(56) \quad P_n = \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Oszacujemy całkę P_n wychodząc z nierówności

$$(57) \quad 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2},$$

która powstaje przez zastąpienie w (54) liczby t przez $\pm x^2$. Z (57) wynika, że

$$(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2} \quad \text{dla } |x| \leq 1$$

oraz

$$e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy stąd

$$(58) \quad C_n \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq P_n \leq D_n$$

gdzie

$$C_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad D_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Całka C_n daje się łatwo obliczyć przez zastosowanie podstawienia

$$x = \cos t,$$

które daje

$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt,$$

czyli (por punkt 2 §3)

$$(59) \quad C_n = A_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)},$$

natomiast całka D_n była obliczona w Przykładzie 8, gdzie wykazaliśmy, że

$$(60) \quad D_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Z (55), (58) wynika natychmiast nierówność

$$(61) \quad a_n \leq P_n \leq b_n,$$

gdzie

$$(62) \quad a_n = \sqrt{n} C_n, \quad b_n = \sqrt{n} D_n.$$

Obliczenie całki P sprowadza się teraz do wykazania, że oba ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy. Posłużymy się w tym celu wzorem Wallisa, udowodnionym w punkcie 2 §3, zapisując go w postaci

$$(63) \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n, \quad e_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}.$$

Zauważmy najpierw, że ciąg $\{e_n\}$ jest malejący, gdyż

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(2n+2)\sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{n+1}} < 1,$$

co łatwo sprawdzić mnożąc obie strony nierówności przez mianownik i podnosząc do kwadratu. Wobec tego z (63) wynika, że

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq e_n,$$

zatem

$$\frac{\pi}{2} \leq 2e_n^2$$

dla dowolnego n , a stąd w oparciu o (60), (62), (63) otrzymujemy

$$(64) \quad b_n \leq \frac{2n}{2n-1} e_n.$$

Ponadto z (59), (62), (63) dostajemy

$$(65) \quad a_n = \frac{2n}{2n+1} e_n.$$

Nierówności (61), (64) i równość (65) dają ostatecznie

$$\frac{2n}{2n+1} e_n \leq P \leq \frac{2n}{2n-1} e_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

skąd po przejściu do granicy i uwzględnieniu (63) wnioskujemy, że

$$(66) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ostatnią całką niewłaściwą, jaką zbadamy, jest funkcja $\Gamma(x)$ określona dla $x > 0$ wzorem

$$(67) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dla $x < 1$ funkcja podcałkowa jest nieograniczona przy $x \rightarrow 0+$, ponadto przedział całkowania jest nieograniczony (oczywiście w przedziale otwartym $(0, \infty)$ funkcja podcałkowa jest ciągła). Tego typu całkę niewłaściwą definiujemy jako sumę

$$(68) \quad \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

przy czym całkę po lewej stronie uważamy za zbieżną, jeżeli zbieżne są obie całki po prawej stronie. Pierwsza z tych całek jest zbieżna na mocy kryterium porównawczego (twierdzenie 2), gdyż

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \quad \text{dla } t \geq 0,$$

zaś całka

$$\int_0^1 t^{x-1} dt$$

jest zbieżna jeżeli $x > 0$ (por. Przykład 1). Aby udowodnić zbieżność drugiej całki oszacujemy z góry funkcję podcałkową. Mamy

$$(69) \quad t^{x-1} e^{-t} = g(t) \cdot \frac{1}{t^2},$$

gdzie

$$g(t) = \frac{t^{x+1}}{e^t}.$$

Ponieważ funkcja g jest ciągła dla $t \geq 1$ i przy tym (por. Przykłady 33 i 34 rozdz. III §4)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0,$$

jest ona funkcją ograniczoną w przedziale $[1, \infty)$ (proponujemy Czytelnikowi dokładne przeprowadzenie dowodu). Istnieje zatem stała $M > 0$ taka, że

$$|g(t)| \leq M \quad (t \in [1, \infty)),$$

a zatem zgodnie z (69)

$$t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{M}{t^2}.$$

Ponieważ, jak wykazaliśmy w Przykładzie 6, całka

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

jest zbieżna, z ostatniej nierówności wynika na mocy kryterium porównawczego (twierdzenie 4) zbieżność drugiej całki po prawej stronie (68). Okazaliśmy zatem, że całka niewłaściwa $\Gamma(x)$ jest zbieżna dla dowolnie ustalonego $x > 0$. Wzór (67) określa funkcję Γ w całym przedziale $(0, \infty)$.

Aby zbadać dokładniej funkcję Γ obliczymy jej wartości dla $x = n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$(70) \quad \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1,$$

ponadto dla $x = n \geq 2$ otrzymujemy całkując przez części

$$\Gamma(n) = - \int_0^{\infty} t^{n-1} (e^{-t})' dt = \left[-t^{n-1} e^{-t}\right]_0^{\infty} + (n-1) \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-t} dt,$$

czyli

$$(71) \quad \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \quad (n \geq 2)$$

(reguła całkowania przez części może być stosowana, gdyż całki niewłaściwe po obu stronach równości są zbieżne). Z (70), (71) wynika, że

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

jeżeli przyjmiemy umowę, że $0! = 1$ (łatwy dowód indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi). Funkcja Γ może być zatem uważana za uogólnienie pojęcia silni na przypadek dowolnej liczby rzeczywistej > -1 . Zauważmy na koniec, że

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt,$$

co po podstawieniu

$$t = z^2$$

daje

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

czyli zgodnie ze wzorem (66)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Zadania.

1. Obliczyć całki niewłaściwe

$$(i) \int_0^1 \log x \, dx, \quad (ii) \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx, \quad (iii) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Wskazówka. Zastosować całkowanie przez części.

2. Niech f będzie funkcją ciągłą nieujemną w przedziale $(a, b]$. Udowodnić, że całka niewłaściwa

$$\int_a^b f(x) dx$$

jest albo zbieżna albo równa $+\infty$.

Wskazówka. Zauważyć, że funkcja

$$G(t) = \int_t^b f(x) dx \quad (a < t \leq b)$$

jest monotoniczna. Następnie zastosować twierdzenie o zbieżności monotonicznej (rozd. III §2 punkt 6).

3. Niech f będzie funkcją ciągłą nieujemną w przedziale $[a, \infty)$. Udowodnić, że całka niewłaściwa

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

jest albo zbieżna albo równa $+\infty$.

Wskazówka. Wprowadzić funkcję

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

i dalej jak w zadaniu 2.

4. Opierając się na zadaniach 2, 3 udowodnić następujące kryteria rozbieżności całki niewłaściwej:

A. Jeżeli funkcje f, g ciągłe w przedziale (a, b) spełniają nierówność

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad (a < x \leq b)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_a^b g(x) dx$$

jest rozbieżna, to całka niewłaściwa

$$\int_a^b f(x) dx$$

też jest rozbieżna.

B. Jeżeli funkcje f, g ciągłe w przedziale $[a, \infty)$ spełniają nierówność

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad (x \geq a)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty g(x) dx$$

jest rozbieżna, to całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

również jest rozbieżna.

5. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx, & \text{(ii)} \quad \int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \\ \text{(iii)} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2} dx, & \text{(iv)} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x + \cos x}{x\sqrt{x}} dx, \\ \text{(v)} \quad \int_\pi^\infty \frac{|\sin x| + |\cos x|}{\sqrt{x}} dx, & \text{(vi)} \quad \int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} dx. \end{array}$$

Wskazówka. Zastosować kryteria porównawcze zbieżności (twierdzenia 2 i 4) lub kryteria porównawcze rozbieżności (zadanie 4).

6. Udowodnić, że

(i) jeżeli funkcja f jest ciągła i ograniczona w przedziale $(a, b]$, to całka niewłaściwa

$$(72) \quad \int_a^b f(x) dx$$

jest zbieżna,

(ii) jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to całka niewłaściwa (72) jest równa całce oznaczonej z funkcji f w przedziale $[a, b]$.

7. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^1 x^\alpha e^{-\frac{1}{x}} dx$$

dla dowolnego rzeczywistego α .

Wskazówka. Okazać, że funkcja podcałkowa ma granicę przy $x \rightarrow 0+$ i oprzeć się na zadaniu 6 (i).

8. Udowodnić zbieżność całek niewłaściwych

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx, \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

(zwanych *całkami Fresnela*).²

Wskazówka. Dokonać podstawienia

$$x^2 = t.$$

9. Z badać zbieżność całek niewłaściwych

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x (\log x)^\alpha}, \quad \int_3^\infty \frac{dx}{x (\log x) (\log \log x)^\alpha}$$

w zależności od parametru $\alpha > 0$ i wyciągnąć wnioski dotyczące zbieżności szeregów

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n (\log n)^\alpha}, \quad \sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n (\log n) (\log \log n)^\alpha}$$

(por. rozdz. IV §2, Przykład 2 i zadanie 2).

Wskazówka. Zauważyć najpierw, że twierdzenie 5 pozostaje słuszne, jeżeli liczbę 1 zastąpić przez jakąkolwiek inną liczbę naturalną.

10. Oznaczmy

$$\underbrace{\log \log \dots \log x}_{p \text{ razy}} = \log_{(p)} x,$$

$$f(x) = \frac{1}{x (\log x) (\log_{(2)} x) \dots (\log_{(p-1)} x) (\log_{(p)} x)^\alpha},$$

²Augustin J. Fresnel (1788 - 1827), matematyk francuski.

gdzie p jest liczbą naturalną ≥ 3 zaś α liczbą rzeczywistą dodatnią. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_m^\infty f(x) dx$$

w zależności od parametru α (m jest liczbą naturalną tak dużą, by mianownik funkcji podcałkowej był różny od zera dla $x \geq m$). Co można powiedzieć o zbieżności szeregu

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$$

(por. rozdz. IV §2, zadanie 3)?

Wskazówka - jak w zadaniu 9.

11. Niech f będzie funkcją ciągłą, malejącą i dodatnią w przedziale $[1, \infty)$. Udowodnić, że jeżeli całka niewłaściwa

$$\int_1^\infty f(x) dx$$

jest zbieżna, to

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Pokazać na przykładzie, że twierdzenie to nie jest prawdziwe w przypadku, gdy f nie jest funkcją malejącą.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 5.

12. Obliczyć sumę

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Wskazówka. W całce

$$C_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

zastosować do funkcji podcałkowej wzór dwumianowy Newtona, następnie skorzystać ze wzoru (60).

13. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale otwartym $(-a, a)$ - zatem całka

$$\int_{-a}^a f(x) dx$$

jest całką niewłaściwą. Udowodnić, że

(i) jeżeli f jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

(ii) jeżeli f jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0,$$

(por. zadanie 7 §3).

14. Niech K oznacza część okręgu o środku $(r, 0)$ i promieniu r , leżącą w pierwszej ćwiartce płaszczyzny xy .

(i) Znaleźć momenty statyczne względem obu osi oraz współrzędne (ξ, η) środka masy krzywej K korzystając ze wzorów (43), (45).

(ii) Znaleźć współrzędną η środka masy opierając się na pierwszej regule Guldina (por. Uwaga po Przykładzie 13 §3).

Wskazówka. W punkcie (i) wykorzystać zadanie 13.

15. Rozważmy okrąg o środku (b, a) i promieniu r ($a > r$, $b > r$) i niech K_+ (K_-) oznacza półokrąg leżący w półpłaszczyźnie $y > a$ ($y < a$). Znaleźć momenty statyczne względem obu osi i środek masy każdej z krzywych K_+ , K_- . Położenie środka masy zilustrować rysunkiem.

Wskazówka. W rachunkach wykorzystać zadanie 13.

16. Okrąg, o którym mowa w zadaniu 15, tworzy przy obrocie dookoła osi x -ów powierzchnię S zwaną *torusem* (por. Przykład 3 i Przykład 10 §3). Oznaczając przez S_+ (S_-) powierzchnię powstałą przy obrocie półokręgu K_+ (K_-) mamy

$$S = S_+ \cup S_-.$$

Opierając się na wynikach zadania 15 i stosując pierwszą regułę Guldina znaleźć pole powierzchni S_+ , S_- i całego torusa S . Porównać z wynikiem otrzymanym w Przykładzie 3.

§5*. Całka Riemanna funkcji ograniczonej.

1. Całki górna i dolna Darboux. W §1 wprowadziliśmy całkę oznaczoną funkcji ciągłej w przedziale domkniętym $[a, b]$ jako granicę ciągu sum przybliżonych (wzór (17) §1). W przypadku funkcji dodatniej jej całka jest miarą pola zawartego między wykresem funkcji a osią x -ów. Przechodząc do sytuacji ogólniejszej wprowadzimy teraz całkę z funkcji ograniczonej ale niekoniecznie ciągłej.

Załóżmy, że f jest funkcją określoną w przedziale domkniętym $[a, b]$ i ograniczoną w tym przedziale. Wobec tego istnieją liczby rzeczywiste m, M takie, że

$$(1) \quad m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a, b]).$$

Rozważając podział Π odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$(2) \quad \Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

przyjmujemy oznaczenia

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}.$$

Oczywiście zachodzą nierówności

$$(3) \quad m \leq m_j \leq M_j \leq M \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, k.$$

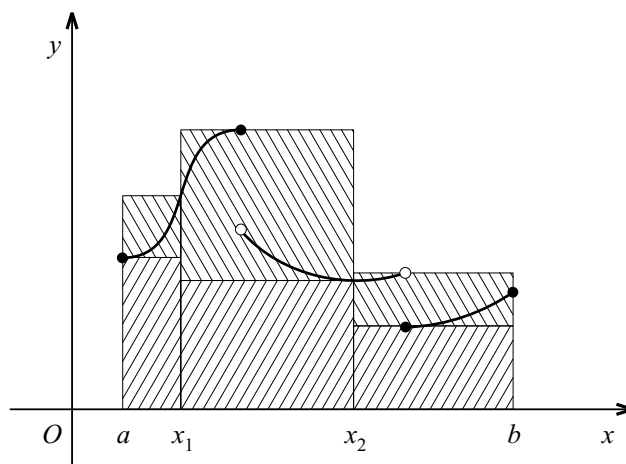
Sumę

$$G(\Pi, f) = \sum_{j=1}^k M_j \Delta x_j$$

nazwiemy *sumą górną odpowiadającą podziałowi Π* , zaś sumę

$$D(\Pi, f) = \sum_{j=1}^k m_j \Delta x_j$$

- *sumą dolną odpowiadającą podziałowi Π* . W przypadku funkcji f dodatniej obie sumy mają prosty sens geometryczny - wyrażają pole figur złożonych z prostokątów, przy czym pola te przybliżają od góry i od dołu pole pod wykresem funkcji. Na rys. 80 mamy $k = 3$, suma górna jest równa polu figury zakreślanej poziomo, figura zakratkowana ma pole równe sumie dolnej. Funkcja f (wykres zaznaczony grubszą linią) jest dodatnia i ma dwa punkty nieciągłości.



[rys. 80]

Podobnie jak w §1 określimy *średnicę podziału* Π jako liczbę

$$d(\Pi) = \max_j \Delta x_j.$$

Podział Π możemy utożsamiać z ciągiem punktów $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$. Będziemy mówili, że podział $\bar{\Pi}$ jest *zagęszczeniem* podziału Π , jeżeli zawiera on wszystkie punkty podziału Π tzn. jeżeli

$$\Pi \subset \bar{\Pi}.$$

Oczywiście wówczas $d(\bar{\Pi}) \leq d(\Pi)$. Zachodzi łatwe do udowodnienia

Twierdzenie 1. *Jeżeli podział Π^* jest zagęszczeniem podziału Π , to*

$$(4) \quad G(\Pi^*, f) \leq G(\Pi, f)$$

oraz

$$(5) \quad D(\Pi^*, f) \geq D(\Pi, f)$$

.

DOWÓD. Udowodnimy (4) w najprostszym przypadku, gdy podział Π^* powstaje z Π przez dodanie jednego punktu x^* . Dla ustalenia uwagi niech $x^* \in (x_0, x_1)$. Mamy

$$(6) \quad M^* = \sup_{[x_0, x^*]} f \leq M_1, \quad M^{**} = \sup_{[x^*, x_1]} f \leq M_1$$

wobec tego, oznaczając

$$\Delta x^* = x^* - x_0, \quad \Delta x^{**} = x_1 - x^*$$

otrzymujemy

$$G(\Pi^*, f) = M^* \Delta x^* + M^{**} \Delta x^{**} + \sum_{j=2}^k M_j \Delta x_j$$

co wobec (6) daje

$$G(\Pi^*, f) \leq M_1(\Delta x^* + \Delta x^{**}) + \sum_{j=2}^k M_j \Delta x_j = G(\Pi, f).$$

Jeżeli podział Π^* powstaje przez dodanie do podziału Π większej ilości punktów, to powtarzając opisane rozumowanie również dochodzimy do (4). Nierówności (5) dowodzimy podobnie, proponujemy by Czytelnik przeprowadził dowód jako ćwiczenie. \square

Treść twierdzenia 1 można wypowiedzieć w sposób mniej precyzyjny następująco: im drobniejszy jest podział Π tym mniejsza jest suma górna i tym większa jest suma dolna. W przypadku funkcji f dodatniej przy rozdrabnianiu podziału polepsza się aproksymacja pola pod wykresem - od góry przez sumy górne i od dołu przez sumy dolne (por. rys. 80).

Z nierówności (3) wynika, że dla dowolnego podziału Π

$$(7) \quad m(b-a) \leq D(\Pi, f) \leq G(\Pi, f) \leq M(b-a).$$

Wobec tego zbiór sum górnych odpowiadających wszystkim podziałom Π odcinka $[a, b]$ jest zbiorem ograniczonym i jako taki posiada w zbiorze liczb rzeczywistych kres dolny i kres górny (por. rozdz.I §2). Tą samą własność ma zbiór sum dolnych. Przyjmujemy jako definicję

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf_{\Pi} G(\Pi, f), \quad \underline{\int_a^b f(x) dx} = \sup_{\Pi} D(\Pi, f)$$

(kres górny względnie dolny rozciągnięty jest na wszystkie podziały Π odcinka $[a, b]$).
Wyrażenia

$$\overline{\int_a^b f(x) dx}, \quad \underline{\int_a^b f(x) dx}$$

nazywamy odpowiednio *całką górną Darboux* i *całką dolną Darboux* z funkcji f na przedziale $[a, b]$.

2. Własności całek Darboux. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 2. *Zachodzi nierówność*

$$(8) \quad \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

DOWÓD. Rozważmy dwa podziały Π_1, Π_2 przedziału $[a, b]$ i niech

$$\overline{\Pi} = \Pi_1 \cup \Pi_2.$$

Podział $\overline{\Pi}$ jest więc wspólnym zagęszczeniem podziałów Π_1, Π_2 . Na podstawie (4), (5), (7) otrzymujemy

$$D(\Pi_1, f) \leq D(\overline{\Pi}, f) \leq G(\overline{\Pi}, f) \leq G(\Pi_2, f)$$

skąd wynika, że

$$D(\Pi_1, f) \leq G(\Pi_2, f)$$

dla dowolnie obranych podziałów Π_1, Π_2 . Wobec tego przy ustalonym Π_2 mamy

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\Pi_1} D(\Pi_1, f) \leq G(\Pi_2, f)$$

a stąd

$$\int_a^b f(x) dx \leq \inf_{\Pi_2} G(\Pi_2, f) = \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

czyli (8). □

Przykład 1. Rozważmy funkcję Dirichleta

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \end{cases}$$

(funkcję tą można określić jako granicę pewnego ciągu o wyrazach zależnych od x - por. rozdz. II §1 zadanie 11). Dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$ określonego nierównością (2) w każdym przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ leżą zarówno liczby wymierne jak i niewymierne (por. twierdzenie 5 i zadanie 6 rozdz. I §2). Wobec tego

$$m_j = 0, \quad M_j = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

a stąd

$$D(\Pi, d) = 0, \quad G(\Pi, d) = b - a.$$

Zatem

$$\int_a^b d(x) dx = 0, \quad \overline{\int_a^b d(x) dx} = b - a.$$

Całki górna i dolna z funkcji Dirichleta nie są równe.

Twierdzenie 3. Dla dowolnej funkcji f ograniczonej w przedziale $[a, b]$

$$(9) \quad \begin{aligned} \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} G(\Pi, f) &= \overline{\int_a^b f(x) dx}, \\ \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} D(\Pi, f) &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

DOWÓD. Udowodnimy pierwszą z równości (9). Należy okazać, że do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla każdego podziału Π spełniającego warunek

$$(10) \quad d(\Pi) < \delta$$

zachodziła nierówność

$$G(\Pi, f) - \int_a^{\bar{b}} f(x) dx < \varepsilon$$

którą można zapisać w równoważnej postaci

$$(11) \quad G(\Pi, f) < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + \varepsilon.$$

Nie zmniejszając ogólności możemy przeprowadzić dowód przy założeniu, że

$$(12) \quad f(x) \geq 0 \quad (x \in [a, b]).$$

Istotnie, z nierówności (1) wynika

$$g(x) = f(x) - m \geq 0 \quad (x \in [a, b])$$

i przy tym

$$G(\Pi, g) = G(\Pi, f) + c$$

oraz

$$\int_a^{\bar{b}} g(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + c,$$

gdzie $c = m(a - b)$ (por. twierdzenie 18 rozdz. III §3), wobec tego nierówność (11) wynika natychmiast z analogicznej nierówności dla funkcji g .

Z definicji całki górnej jako kresu dolnego sum górnych wynika istnienie podziału

$$\bar{\Pi}: \quad a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_{\bar{k}} = b$$

takiego, że

$$(13) \quad G(\bar{\Pi}, f) \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi na początku przyjmujemy

$$\bar{m}_r = \inf_{[\bar{x}_{r-1}, \bar{x}_r]} f, \quad \bar{M}_r = \sup_{[\bar{x}_{r-1}, \bar{x}_r]} f, \quad \Delta \bar{x}_r = \bar{x}_r - \bar{x}_{r-1}, \quad (r = 1, 2, \dots, \bar{k}).$$

Z założenia (12) wynika, że wszystkie liczby M , M_j , m_j , \bar{M}_r , \bar{m}_r są nieujemne.

Rozważając dowolnie obrany podział Π określony nierównością (2) oznaczmy przez A zbiór wszystkich liczb j z ciągu $\{1, 2, \dots, k\}$ takich, że przedział otwarty (x_{j-1}, x_j) zawiera punkt podziału $\bar{\Pi}$ i niech $B = \{1, 2, \dots, k\} \setminus A$. Oczywiście

$$(14) \quad G(\Pi, f) = \sum_{j \in A} M_j \Delta x_j + \sum_{j \in B} M_j \Delta x_j.$$

Aby oszacować pierwszą sumę zauważmy, że

$$\Delta x_j \leq d(\Pi)$$

i stąd, po pomnożeniu przez M_j ,

$$M_j \Delta x_j \leq M_j d(\Pi),$$

zatem

$$M_j \Delta x_j \leq M d(\Pi).$$

Ponieważ zbiór A ma co najwyżej \bar{k} elementów, po zsumowaniu dostajemy

$$(15) \quad \sum_{j \in A} M_j \Delta x_j \leq M \bar{k} d(\Pi).$$

Dla $j \in B$ mamy przy pewnym $r \in \{1, 2, \dots, \bar{k}\}$

$$(16) \quad [x_{j-1}, x_j] \subset [\bar{x}_{r-1}, \bar{x}_r].$$

Przy ustalonym r oznaczmy przez N_r zbiór tych j , dla których zachodzi (16), wówczas, zakładając że N_r nie jest zbiorem pustym, mamy

$$(17) \quad \sum_{j \in N_r} M_j \Delta x_j \leq \bar{M}_r \sum_{j \in N_r} \Delta x_j.$$

Ponieważ

$$\sum_{j \in N_r} \Delta x_j \leq \Delta \bar{x}_r,$$

mnożąc obie strony przez liczbę $\bar{M}_r \geq 0$ otrzymujemy z (17)

$$\sum_{j \in N_r} M_j \Delta x_j \leq \bar{M}_r \Delta \bar{x}_r.$$

Ponieważ

$$B = \bigcup_{1 \leq r \leq \bar{k}} N_r,$$

mamy, dopisując ewentualnie po prawej stronie wyrazy nieujemne,

$$\sum_{j \in B} M_j \Delta x_j \leq \sum_{r=1}^{\bar{k}} \bar{M}_r \Delta \bar{x}_r$$

czyli

$$\sum_{j \in B} M_j \Delta x_j \leq G(\bar{P}i, f),$$

skąd, uwzględniając (13), (14), (15) otrzymujemy

$$(18) \quad G(\Pi, f) \leq M\bar{k}d(\Pi) + \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nierówność (11) wynika z (10) i (18), jeżeli przyjmiemy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\bar{k}M}.$$

Aby udowodnić drugą z równości (9) wystarczy zauważyć, że (por. twierdzenie 18 rozdz. III §3)

$$(19) \quad D(\Pi, f) = -G(\Pi, -f)$$

oraz

$$(20) \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_a^b (-f(x)) dx.$$

Udowodnioną część twierdzenia możemy teraz zastosować do funkcji $-f(x)$. Stwierdzamy, że do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla każdego podziału Π spełniającego warunek (10) zachodziła nierówność

$$G(\Pi, -f) < \int_a^b (-f(x)) dx + \varepsilon,$$

czyli wobec (19), (20)

$$-D(\Pi, f) < -\int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Ostatnia nierówność może być zapisana w postaci

$$\int_a^b f(x) dx - D(\Pi, f) < \varepsilon,$$

co kończy dowód. □

3. Całka Riemanna. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że f jest funkcją określoną w przedziale domkniętym $[a, b]$ i ograniczoną w tym przedziale. Wobec tego, jak wykazaliśmy w punkcie 1, istnieją jej całki Darboux, górna i dolna. Jeżeli są one równe, to mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$. Wspólną wartość całki górnej i dolnej nazywamy *całką Riemanna* (lub krócej *całką*) *funkcji f na przedziale $[a, b]$* i oznaczamy symbolem

$$(21) \quad \int_a^b f(x) dx$$

podobnie jak dla funkcji f ciągłej. Mamy zatem

$$(22) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

W dalszym ciągu przez *funkcję całkowaną* będziemy zawsze rozumieli funkcję całkowaną w sensie Riemanna na ustalonym przedziale domkniętym $[a, b]$. Jej całkę Riemanna będziemy nazywali po prostu całką. Następujące twierdzenie podaje warunek konieczny i dostateczny całkowości funkcji:

Twierdzenie 4. *Funkcja f jest całkowana na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnie ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π_ε odcinka $[a, b]$ tak, by zachodziła nierówność*

$$(23) \quad G(\Pi_\varepsilon, f) - D(\Pi_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

DOWÓD. Załóżmy, że warunek podany w twierdzeniu jest spełniony. Na mocy definicji całki górnej i dolnej oraz twierdzenia 2 mamy

$$D(\Pi_\varepsilon, f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq G(\Pi_\varepsilon, f)$$

skąd wobec (23) wynika, że

$$(24) \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolnie obraną liczbą dodatnią, nierówność (24) jest równoważna równości

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx$$

a to oznacza całkowność funkcji f . Podany warunek jest zatem dostateczny.

Aby udowodnić jego konieczność ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Z definicji całki górnej wynika istnienie podziału $\Pi_\varepsilon^{(1)}$ przedziału $[a, b]$ takiego, że

$$(25) \quad G(\Pi_\varepsilon^{(1)}, f) < \overline{\int_a^b f(x) dx} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobnie z definicji całki dolnej wynika, że istnieje podział $\Pi_\varepsilon^{(2)}$ dla którego spełniona jest nierówność

$$(26) \quad \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < D(\Pi_\varepsilon^{(2)}, f).$$

Rozważmy teraz podział $\Pi_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^{(1)} \cup \Pi_\varepsilon^{(2)}$. Jest on wspólnym zagęszczeniem podziałów $\Pi_\varepsilon^{(1)}$ i $\Pi_\varepsilon^{(2)}$, wobec tego na mocy twierdzenia 1 z nierówności (25), (26) wynika, że

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < D(\Pi_\varepsilon, f) \leq G(\Pi_\varepsilon, f) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jeżeli założymy całkowalność funkcji f na przedziale $[a, b]$, to obie całki Darboux są równe i z ostatniej nierówności wynika (23). \square

Funkcja Dirichleta d rozważana w Przykładzie 1 nie jest całkowalna na żadnym przedziale $[a, b]$, gdyż jej całki Darboux mają różne wartości. Warunek całkowalności podany w twierdzeniu 4 nie jest spełniony, gdyż dla każdego podziału Π odcinka $[a, b]$ mamy

$$D(\Pi, d) = 0, \quad G(\Pi, d) = b - a.$$

4. Klasy funkcji całkowalnych. Jako prosty wniosek z twierdzenia 4 otrzymujemy

Twierdzenie 5. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest całkowalna.*

DOWÓD. Na mocy twierdzenia Heinego (twierdzenie 9 rozdz. III §3) funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest w tym przedziale jednostajnie ciągła. Wobec tego do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, że dla każdego podziału Π odcinka $[a, b]$ określonego nierównościami (2) i spełniającego warunek

$$(27) \quad d(\Pi) < \delta$$

zachodzą nierówności

$$(28) \quad M_j - m_j < \eta \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Z (28) wynika, że dla takiego podziału Π

$$G(\Pi, f) - D(\Pi, f) < \eta(b - a).$$

Warunek całkowalności podany w twierdzeniu 4 jest więc spełniony, jeżeli przyjmiemy

$$\eta = \frac{\varepsilon}{b - a}$$

a jako podział Π_ε obierzemy jakikolwiek podział, którego średnica spełnia (27). \square

Twierdzenie to daje się następująco uogólnić:

Twierdzenie 6. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ poza skończoną ilością punktów jest całkowalna.*

DOWÓD. Dla uproszczenia dowodu założymy, że funkcja f jest nieciągła tylko w jednym punkcie $c \in (a, b)$. Czytelnik z łatwością zauważy, jak można przenieść dowód na przypadek, gdy funkcja ma dowolną (skończoną) ilość punktów nieciągłości, wśród których mogą być końce przedziału.

Aby skonstruować podział Π_ε spełniający (23) obierzmy najpierw punkty x', x'' tak, by zachodziły nierówności

$$a < x' \leq c \leq x'' < b$$

i niech

$$\overline{M} = \sup_{[x', x'']} f, \quad \overline{m} = \inf_{[x', x'']} f, \quad \Delta \bar{x} = x'' - x'.$$

Wówczas

$$(29) \quad (\overline{M} - \overline{m}) \Delta \bar{x} \leq (M - m) \Delta \bar{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

jeżeli obierzemy punkty x', x'' w taki sposób, by

$$(30) \quad \Delta \bar{x} < \frac{\varepsilon}{2(M - m)}$$

(liczby M, m określone przez nierówność (1)). Podzielimy teraz odcinki $[a, x']$ oraz $[x'', b]$ przy pomocy punktów x_j ($j = 0, 1, \dots, k, j \neq s$) spełniających nierówności

$$(31) \quad \begin{aligned} a = x_0 &< x_1 < \dots < x_{s-1} = x', \\ x'' = x_s &< x_{s+1} < \dots < x_k = b. \end{aligned}$$

Dalej rozumujemy podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 5. Funkcja f jest jednostajnie ciągła w każdym z przedziałów $[a, x']$, $[x'', b]$, zatem do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $j \neq s$ z warunku

$$(32) \quad x_j - x_{j-1} < \delta$$

wynikały nierówności

$$M_j - m_j < \eta.$$

Wówczas

$$\sum_{j \neq s} (M_j - m_j) \Delta x_j < \eta \sum_{j \neq s} \Delta x_j < \eta(b - a),$$

zatem

$$(33) \quad \sum_{j \neq s} (M_j - m_j) \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2},$$

jeżeli przyjmiemy

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Ustalmy teraz dowolnie $\varepsilon > 0$ i niech Π_ε będzie podziałem odcinka $[a, b]$ wyznaczonym przez punkty x_0, x_1, \dots, x_k spełniające (31). Mamy

$$G(\Pi_\varepsilon, f) - D(\Pi_\varepsilon, f) = (\overline{M} - \overline{m}) \Delta \bar{x} + \sum_{j \neq s} (M_j - m_j) \Delta x_j$$

a więc wobec (29), (33)

$$G(\Pi_\varepsilon, f) - D(\Pi_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

co oznacza, że spełniony jest warunek całkowalności funkcji f podany w twierdzeniu 4. \square

Z twierdzenia 4 wynika również jako prosty wniosek

Twierdzenie 7. *Funkcja monotoniczna w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest całkowalna.*

DOWÓD. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że f jest funkcją rosnącą, wówczas dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (2)

$$m_j = f(x_{j-1}), \quad M_j = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Jeżeli w szczególności Π jest podziałem odcinka $[a, b]$ na k równych części, to

$$\Delta x_j = \frac{b-a}{k},$$

zatem

$$G(\Pi, f) - D(\Pi, f) = \frac{b-a}{k} \sum_{j=1}^k (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{b-a}{k} (f(b) - f(a)).$$

Warunek (23) będzie więc spełniony, jeżeli obierzemy k w taki sposób, by spełniona była nierówność

$$\frac{b-a}{k} (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

którą można w równoważny sposób zapisać jako

$$k > \frac{b-a}{\varepsilon} (f(b) - f(a)).$$

\square

Z twierdzeń 5 - 7 wynika, że istnieją dwie obszerne klasy funkcji całkowalnych:

1^o klasa funkcji monotonicznych,

2^o klasa funkcji ciągłych poza skończoną ilością punktów.

Powstaje pytanie, jakie działania wykonywane na funkcjach całkowalnych dają w wyniku funkcję całkowalną? Odpowiedź będzie zawarta w twierdzeniach, które teraz udowodnimy.

Twierdzenie 8. Jeżeli funkcje f , g są całkowalne na przedziale $[a, b]$ i c jest dowolną stałą, to funkcja

- (i) $f + g$,
- (ii) cf

również jest całkowalna na tym przedziale.

DOWÓD. Udowodnimy najpierw (i). Dla dowolnie ustalonego podziału Π określonego nierównościami (2) niech

$$\begin{aligned}\bar{m}_j &= \inf_{[x_{j-1}, x_j]} (f + g), & \bar{M}_j &= \sup_{[x_{j-1}, x_j]} (f + g), \\ m'_j &= \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f, & M'_j &= \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, \\ m''_j &= \inf_{[x_{j-1}, x_j]} g, & M''_j &= \sup_{[x_{j-1}, x_j]} g.\end{aligned}$$

Z własności kresów górnego i dolnego (twierdzenie 17 rozdz. III §3) wynika, że

$$\bar{m}_j \geq m'_j + m''_j, \quad \bar{M}_j \leq M'_j + M''_j$$

i wobec tego

$$(34) \quad \begin{aligned}D(\Pi, f) + D(\Pi, g) &\leq D(\Pi, f + g), \\ G(\Pi, f + g) &\leq G(\Pi, f) + G(\Pi, g).\end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia 4 do ustalonej dowolnie liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać podziały Π'_ε , Π''_ε tak, by zachodziły nierówności

$$(35) \quad \begin{aligned}G(\Pi'_\varepsilon, f) - D(\Pi'_\varepsilon, f) &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ G(\Pi''_\varepsilon, g) - D(\Pi''_\varepsilon, g) &< \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Nierówności (35) są tym bardziej spełnione, jeżeli podziały Π'_ε , Π''_ε zastąpimy przez ich wspólne zagęszczenie $\Pi_\varepsilon = \Pi'_\varepsilon \cup \Pi''_\varepsilon$. Z (34) wynika wówczas, że

$$G(\Pi_\varepsilon, f + g) - D(\Pi_\varepsilon, f + g) < \varepsilon.$$

Zatem zgodnie z twierdzeniem 4 funkcja $f + g$ jest całkowalna.

Przechodząc do dowodu (ii) zauważmy, że dla $c = 0$ funkcja cf jest oczywiście całkowalna jako funkcja stała a więc ciągła (twierdzenie 5). Załóżmy wobec tego, że $c \neq 0$ i niech dla dowolnie obranego podziału Π odcinka $[a, b]$

$$\bar{m}_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} (cf), \quad \bar{M}_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} (cf).$$

Z własności kresów górnego i dolnego (twierdzenie 18 rozdz. III §3) otrzymujemy

$$\bar{m}_j = cm'_j, \quad \bar{M}_j = cM'_j \quad \text{dla } c > 0$$

oraz

$$\overline{m}_j = cM'_j, \quad \overline{M}_j = cm'_j \quad \text{dla } c < 0.$$

Wobec tego

$$D(\Pi, cf) = \begin{cases} cD(\Pi, f) & \text{dla } c > 0, \\ cG(\Pi, f) & \text{dla } c < 0 \end{cases}$$

oraz

$$G(\Pi, cf) = \begin{cases} cG(\Pi, f) & \text{dla } c > 0, \\ cD(\Pi, f) & \text{dla } c < 0, \end{cases}$$

zatem

$$(36) \quad G(\Pi, cf) - D(\Pi, cf) = |c| \left(G(\Pi, f) - D(\Pi, f) \right).$$

Wobec całkowalności funkcji f do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można zgodnie z twierdzeniem 4 dobrać podział Π_ε odcinka $[a, b]$ tak, by zachodziła nierówność

$$G(\Pi_\varepsilon, f) - D(\Pi_\varepsilon, f) < \frac{\varepsilon}{|c|},$$

wówczas z równości (36) wynika, że

$$G(\Pi_\varepsilon, cf) - D(\Pi_\varepsilon, cf) < \varepsilon,$$

co w oparciu o twierdzenie 4 zapewnia całkowalność funkcji cf . □

Z udowodnionego twierdzenia widać, że działania liniowe tzn. dodawanie funkcji i mnożenie ich przez stałą nie wyprowadzają z klasy funkcji całkowalnych. Okazuje się, że również bardziej skomplikowane działania mają tę własność. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 9. *Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$ zaś q funkcją ciągłą w przedziale $[m, M]$ (przedział ten określa nierówność (1)). Wówczas funkcja złożona*

$$h(x) = q(f(x))$$

jest całkowalna na przedziale $[a, b]$.

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że funkcja q

(i) jest w przedziale $[m, M]$ ograniczona tzn istnieje stała $K > 0$ taka, że

$$|q(y)| \leq K \quad \text{dla } y \in [m, M],$$

(ii) jest w przedziale $[m, M]$ jednostajnie ciągła, zatem do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla

$$|y' - y''| < \delta \quad (y', y'' \in [m, M])$$

zachodziła nierówność

$$|q(y') - q(y'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

(por. twierdzenia 9 i 12 rozdz. III §3). Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że

$$(37) \quad \delta < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

W dowodzie oprzemy się na twierdzeniu 4. Niech Π będzie podziałem odcinka $[a, b]$ określonym nierównościami (2) i niech

$$\bar{m}_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} h, \quad \bar{M}_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} h,$$

wobec tego

$$(38) \quad G(\Pi, h) - D(\Pi, h) = \sum_{j=1}^k (\bar{M}_j - \bar{m}_j) \Delta x_j.$$

Z założenia całkowalności funkcji f wynika, że podział Π może być tak dobrany, aby zachodziła nierówność

$$(39) \quad G(\Pi, f) - D(\Pi, f) < \delta^2.$$

Podzielmy zbiór liczb $\{1, 2, \dots, k\}$ na dwie klasy, przyjmując, że

$$\begin{aligned} j \in A & \quad \text{gdy} \quad M_j - m_j < \delta, \\ j \in B & \quad \text{gdy} \quad M_j - m_j \geq \delta, \end{aligned}$$

wówczas

$$(40) \quad \bar{M}_j - \bar{m}_j < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{dla} \quad j \in A,$$

natomiast z (39) wynika, że

$$\delta \sum_{j \in B} \Delta x_j \leq \sum_{j \in B} (M_j - m_j) \Delta x_j < \delta^2,$$

co daje oszacowanie

$$(41) \quad \sum_{j \in B} \Delta x_j < \delta.$$

Równość (38) może być zapisana w postaci

$$G(\Pi, h) - D(\Pi, h) = \sum_{j \in A} (\bar{M}_j - \bar{m}_j) \Delta x_j + \sum_{j \in B} (\bar{M}_j - \bar{m}_j) \Delta x_j,$$

skąd po uwzględnieniu (40), (41) otrzymujemy

$$G(\Pi, h) - D(\Pi, h) < \frac{\varepsilon}{2} + 2K\delta,$$

czyli wobec (37)

$$G(\Pi, h) - D(\Pi, h) < \varepsilon.$$

Podział Π spełnia warunek podany w twierdzeniu 4, zatem funkcja h jest całkowalna. \square

Z udowodnionego twierdzenia wynikają dwa wnioski, które sformułujemy w formie dalszych twierdzeń.

Twierdzenie 10. *Jeżeli f, g są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to iloczyn fg też jest całkowalny na tym przedziale.*

DOWÓD. Przyjmując w twierdzeniu 9

$$q(t) = t^2$$

stwierdzamy, że kwadrat funkcji całkowalnej również jest funkcją całkowalną. Ponieważ

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

więc po zastosowaniu twierdzenia 8 otrzymujemy tezę. \square

Twierdzenie 11. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to jej moduł $|f|$ też jest funkcją całkowalną na tym przedziale.*

DOWÓD. Wystarczy przyjąć w twierdzeniu 9 $q(t) = |t|$. \square

Udowodnimy jeszcze następującą własność funkcji całkowalnych:

Twierdzenie 12. *Jeżeli f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ i $[c, d] \subset [a, b]$, to f jest całkowalna na przedziale $[c, d]$.*

DOWÓD. Zgodnie z twierdzeniem 4 do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π odcinka $[a, b]$ tak, by zachodziła nierówność

$$(42) \quad G(\Pi, f) - D(\Pi, f) < \varepsilon.$$

Nierówność ta będzie tym bardziej spełniona, gdy podział Π uzupełnimy dwoma punktami c, d (por. twierdzenie 1). Możemy wobec tego założyć, że punkty c, d są punktami podziału Π . Oznaczając przez $\Pi_{[c, d]}$ zbiór punktów podziału Π należących do odcinka $[c, d]$ mamy

$$G(\Pi_{[c, d]}, f) - D(\Pi_{[c, d]}, f) < G(\Pi, f) - D(\Pi, f),$$

zatem z (42) wynika, że podział $\Pi_{[c, d]}$ spełnia warunek podany w twierdzeniu 4, a to oznacza całkowalność funkcji f na przedziale $[c, d]$. \square

5. Całka Riemanna jako granica sum przybliżonych. W §1 określiliśmy całkę funkcji ciągłej jako granicę ciągu sum przybliżonych. Opierając się na twierdzeniu 3 łatwo udowodnić, że tą samą własność ma całka Riemanna funkcji ograniczonej (niekoniecznie ciągłej).

Niech Π będzie podziałem odcinka $[a, b]$ określonym nierównościami (2) i niech $\xi(\Pi) = \{\xi_j\}$ oznacza układ punktów pośrednich tzn. spełniających warunek

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Podobnie, jak w przypadku funkcji f ciągłej rozważanym w §1, wprowadzimy *sumę przybliżoną całki* (21) odpowiadającą podziałowi Π jako wyrażenie

$$S(f, \Pi, \xi(\Pi)) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta x_j.$$

Z nierówności

$$m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

wynika, że

$$(43) \quad D(\Pi, f) \leq S(f, \Pi, \xi(\Pi)) \leq G(\Pi, f)$$

dla dowolnego podziału Π i dowolnego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi)$. Warto przy tym zauważyć, że sumy górna i dolna mogą nie być sumami przybliżonymi, gdyż na ogół nieciągła funkcja f może nie przyjmować swego kresu dolnego m_j ani kresu górnego M_j w żadnym punkcie $\xi \in [x_{j-1}, x_j]$.

Twierdzenie 13. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$ i niech $\{\Pi_n\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$. Dla dowolnie obranego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$ przyjmijmy oznaczenie

$$S_n = S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)).$$

Wówczas

$$(44) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

DOWÓD. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech δ będzie liczbą dobraną do ε , o której mowa w dowodzie twierdzenia 3. Ponieważ $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów, istnieje takie N , że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$d(\Pi_n) < \delta.$$

Zgodnie z twierdzeniem 3 mamy wówczas dla $n > N$

$$G(\Pi_n, f) < \overline{\int_a^b f(x) dx} + \varepsilon,$$

$$D(\Pi_n, f) > \underline{\int_a^b f(x) dx} - \varepsilon$$

co w zestawieniu z równością (22) i nierównością (43) daje

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < S_n < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$$

dla $n > N$, przy czym N jest dobrane do liczby δ , a więc za jej pośrednictwem do liczby ε ustalonej dowolnie na początku rozumowania. Oznacza to, że zachodzi (44). \square

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że w przypadku funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$ (która jest całkowalna zgodnie z twierdzeniem 5) całka Riemanna jest identyczna z całką oznaczoną wprowadzoną w §1.

6. Własności rachunkowe całki Riemanna. Wzory rachunkowe udowodnione w §1 dla całki funkcji ciągłej pozostają słuszne dla całki Riemanna funkcji ograniczonej. Sformułujemy je w postaci twierdzeń.

Twierdzenie 14. *Załóżmy, że funkcje f, g są całkowalne na przedziale $[a, b]$ i niech c będzie dowolną stałą. Wówczas funkcje $f + g$ oraz cf są całkowalne na przedziale $[a, b]$ i zachodzą równości*

$$(45) \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$(46) \quad \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

DOWÓD. Całkowalność funkcji $f + g$ oraz cf była udowodniona w twierdzeniu 8. Równości (45), (46) otrzymujemy podobnie jak dla funkcji ciągłych (twierdzenie 2 §1) w oparciu o twierdzenie 13.

Twierdzenie 15 (o podziale przedziału całkowania). *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to jest całkowalna na każdym z przedziałów $[a, c]$, $[c, b]$ (gdzie $a < c < b$) i zachodzi równość*

$$(47) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

DOWÓD. Całkowalność funkcji f na przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$ wynika z twierdzenia 12 zaś dowód równości (47) przebiega tak samo jak dowód twierdzenia 3 §1 w oparciu o twierdzenie 13.

Twierdzenie 16 (o monotoniczności całki). *Jeżeli funkcje f, g całkowalne na przedziale $[a, b]$ spełniają nierówność*

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b],$$

to

$$(48) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

DOWÓD przeprowadzamy tak samo jak w twierdzeniu 4 §1 opierając się na twierdzeniu 13.

Jako prosty wniosek z twierdzenia 16 dostajemy

Twierdzenie 17. *Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$, to funkcja $|f|$ też jest całkowna na tym przedziale i zachodzi nierówność*

$$(49) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

DOWÓD. Całkowalność funkcji $|f|$ była udowodniona w twierdzeniu 11. Aby otrzymać (49) zauważmy, że

$$f(x) \leq |f(x)|, \quad -f(x) \leq |f(x)| \quad (x \in [a, b])$$

wobec tego zgodnie z (46), (48)

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

oraz

$$\int_a^b (-f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Ostatnie dwie nierówności dają (49). □

Opierając się na twierdzeniu 13 można łatwo udowodnić dla całki Riemanna

Twierdzenie 18 (zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego). *Jeżeli f jest całkowna na przedziale $[a, b]$ i ma pierwotną F w tym przedziale, to*

$$(50) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

DOWÓD nie różni się od dowodu twierdzenia 5 §1. □

Definiując całkę Riemanna w przedziale $[a, b]$ zakładamy oczywiście, że $a < b$. Ze względów rachunkowych wygodnie jest przyjąć (podobnie, jak zrobiliśmy to w §1 dla funkcji f ciągłej)

$$(51) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (a < b),$$

$$(52) \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Przy tak rozszerzonej definicji całki pozostają słuszne wzory (45), (46), (50), zaś twierdzenie 15 można sformułować nieco ogólniej:

Twierdzenie 15'. *Jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $\mathbb{P} = [A, B]$, to dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{P}$ zachodzi (47).*

DOWÓD przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 3' §1 i pozostawiamy go Czytelnikowi.

Twierdzenie 19. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale domkniętym $[A, B]$ i niech $a \in [A, B]$. Wówczas funkcja

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

jest ciągła w przedziale $[A, B]$. Jeżeli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in (A, B)$, to G ma w tym punkcie pochodną i zachodzi równość

$$(53) \quad G'(x_0) = f(x_0).$$

Gdy x_0 jest jednym z końców przedziału $[A, B]$, wzór (53) pozostaje słuszny, jeżeli przez pochodną rozumiemy pochodną jednostronną.

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód przy założeniu, że x_0 jest punktem wewnętrznym przedziału. Korzystając z (51), (52) i z twierdzenia o podziale przedziału całkowania możemy przyrost funkcji G zapisać następująco:

$$(54) \quad G(x_0 + h) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Wobec tego z (49) wynika, że

$$(55) \quad |G(x_0 + h) - G(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)| dt \right|$$

niezależnie od znaku h . Ponieważ f jest ograniczona w $[A, B]$, istnieje stała K taka, że

$$|f(x)| \leq K \quad (x \in [A, B])$$

i stąd

$$(56) \quad \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)| dt \right| \leq K|h|.$$

Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i niech

$$\delta = \frac{\varepsilon}{K}.$$

Wówczas z (55), (56) wynika, że

$$|G(x_0 + h) - G(x_0)| < \varepsilon$$

dla $|h| < \delta$ a to oznacza ciągłość funkcji G w punkcie x_0 .

Aby udowodnić różniczkowalność funkcji G zauważmy, że wobec (54) iloraz różnicowy można zapisać w postaci

$$\Phi(h) = \frac{1}{h} [G(x_0 + h) - G(x_0)] = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

natomiast

$$f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt$$

dla przyrostów h o dowolnym znaku. Wobec tego

$$(57) \quad |\Phi(h) - f(x_0)| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right|.$$

Jeżeli f jest ciągła w punkcie x_0 , to do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, że dla $|h| < \delta$ wyrażenie podcałkowe po prawej stronie (57) ma wartość bezwzględną $< \varepsilon$. Wówczas dla $|h| < \delta$ mamy

$$|\Phi(h) - f(x_0)| \leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

a to oznacza, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) = f(x_0).$$

Zatem funkcja G jest różniczkowalna w punkcie x_0 i zachodzi równość (53). Dowód w przypadku gdy x_0 jest jednym z końców przedziału $[A, B]$ przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. \square

Na zakończenie udowodnimy jeszcze jedną własność całki Riemanna przydatną przy obliczaniu całek z konkretnych funkcji.

Twierdzenie 20. *Jeżeli $f(x) = g(x)$ w przedziale $[a, b]$ poza skończoną ilością punktów i funkcja f jest całkowalna na $[a, b]$ to funkcja g też jest całkowalna na tym przedziale i zachodzi równość*

$$(58) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

DOWÓD. Dla uproszczenia dowodu założymy, że funkcje f, g mają różne wartości tylko w jednym punkcie $c \in (a, b)$. Udowodnimy najpierw całkowalność funkcji g opierając się na twierdzeniu 4. Funkcja g jest ograniczona, istnieją więc liczby M, m takie, że

$$m \leq g(x) \leq M \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Obierając dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ ustalmy punkty x', x'' w taki sposób, by zachodziły nierówności

$$(59) \quad x' < c < x'', \quad (M - m)(x'' - x') < \frac{\varepsilon}{2}$$

W przedziałach $[a, x']$, $[x'', b]$ funkcja g jest identyczna z funkcją f , jest więc na każdym z tych przedziałów całkowalna zgodnie z twierdzeniem 12. Istnieją zatem podziały określone nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} = x', \quad x'' = x_p < x_{p+1} < \cdots < x_k = b$$

takie, że zachodzą nierówności

$$(60) \quad \sum_{j=1}^{p-1} (M_j - m_j) \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sum_{j=p+1}^k (M_j - m_j) \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{4},$$

gdzie

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} g, \quad M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} g \quad (j = 1, \dots, k; j \neq p).$$

Niech

$$m_p = \inf_{[x', x'']} g, \quad M_p = \sup_{[x', x'']} g, \quad \Delta x_p = x'' - x',$$

wówczas z drugiej nierówności (59) wynika, że

$$(61) \quad (M_p - m_p) \Delta x_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wobec tego podział Π odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} = x' < x_p = x'' < \cdots < x_k = b$$

spełnia warunek twierdzenia 4, gdyż po dodaniu nierówności (60), (61) otrzymujemy

$$G(\Pi, g) - D(\Pi, g) < \varepsilon.$$

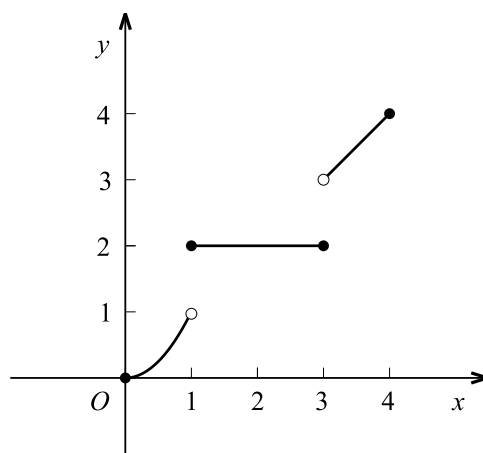
Zatem funkcja g jest całkowalna na przedziale $[a, b]$. Zgodnie z twierdzeniem 13 jej całka jest granicą ciągu sum przybliżonych, przy czym ciąg normalny $\{\Pi_n\}$ podziałów odcinka $[a, b]$ i układy punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$ mogą być dowolnie obrane. Zakładając, że dla żadnego n punkt c nie jest punktem pośrednim, mamy

$$S(f, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = S(g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)),$$

co po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ daje (58).

Przykład 2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{dla } 1 \leq x \leq 3, \\ x & \text{dla } 3 < x \leq 4. \end{cases}$$



[rys. 81]

Funkcja f ma w przedziale $[0, 4]$ dwa punkty nieciągłości: $c_1 = 1$ oraz $c_2 = 3$ (por. rys. 83), wobec tego jest całkowna na tym przedziale (twierdzenie 6). Na podstawie twierdzenia o podziale przedziału całkowania mamy

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx.$$

Pierwszą i trzecią całkę po prawej stronie obliczymy korzystając z twierdzenia 20. W pierwszej całce zmienimy wartość funkcji f w punkcie $x = 1$ przyjmując $f(1) = 1$, wówczas

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

natomiast w trzeciej całce przyjmiemy $f(3) = 3$. Wówczas

$$\int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 x dx = \frac{7}{2},$$

a więc

$$\int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{3} + 4 + \frac{7}{2} = \frac{47}{6}.$$

Zadania.

1. Obliczyć

$$\int_{-1}^2 f(x) dx,$$

jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } -1 \leq x < 1, \\ 2 & \text{dla } x = 1, \\ -x & \text{dla } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniach 15 i 20.

2. Obliczyć

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

jeżeli

$$f(x) = \sin x \quad \text{dla} \quad -\pi < x < \pi, \quad x \neq \pm \frac{\pi}{2},$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(-\pi) = f(\pi) = 1.$$

Wskazówka - jak w zadaniu 1.

3. Niech f, g będą funkcjami całkowalnymi na przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że
(i) z nierówności

$$f(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in [a, b]$$

wynika

$$\int_a^b f(x) dx > 0;$$

(ii) z nierówności

$$f(x) > g(x) \quad \text{dla} \quad x \in [a, b]$$

wynika

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$$

(por. zadanie 8 §1).

Wskazówka. W punkcie (i) przyjąć $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ i z zaprzeczenia tezy wywnioskować, że istnieje przedział $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, w którym $f(x) < \varepsilon_1$. Powtarzając to rozumowanie okazać, że istnieje ciąg zstępujący przedziałów $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$) taki, że $f(x) < \varepsilon_n$ dla $x \in [a_n, b_n]$. Następnie korzystając z twierdzenia Ascoliego (twierdzenie 1 rozdz. II §2) udowodnić istnienie punktu $c \in [a, b]$, w którym funkcja f przyjmuje wartość zero - wbrew założeniu. Punkt (ii) sprowadzić do punktu (i).

4. Załóżmy, że funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że
a.) z nierówności

$$A \leq f(x) \leq B$$

wynika oszacowanie

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq B(b-a);$$

b.) z nierówności

$$|f(x)| \leq M$$

wynika oszacowanie

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a)$$

(por. zadania 7 i wniosek 1 §1).

5. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[P, Q]$. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b \in [P, Q]$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6. Udowodnić, że funkcja całkowalna na każdym z przedziałów $[a, c]$, $[c, b]$ jest całkowalna na ich sumie $[a, b]$.

7. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że dla dowolnie obranej liczby rzeczywistej c funkcja $g(x) = f(x - c)$ jest całkowalna na przedziale $[a + c, b + c]$.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 4.

8. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że dla dowolnie obranej liczby $t > 0$ funkcja $h(x) = f(tx)$ jest całkowalna na przedziale $[\frac{a}{t}, \frac{b}{t}]$.

Wskazówka - jak w zadaniu 7.

9. Niech $\frac{p}{q}$ będzie ułamkiem nieskracalnym o liczniku całkowitym i mianowniku naturalnym i niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{gdy } x = \frac{p}{q}, \\ 0 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

(por. zadanie 17 rozdz. III §3). Udowodnić, że funkcja f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, b]$ i obliczyć jej całkę w tym przedziale.

Wskazówka. Obierając dowolnie $N > 0$ udowodnić najpierw istnienie liczby $r(N)$ takiej, że ilość liczb wymiernych $\frac{p}{q}$ w przedziale $[a, b]$, dla których

$$(62) \quad q \leq N$$

nie przekracza $r(N)$. Następnie dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) przedstawić różnicę

$$Q(\Pi, f) = G(\Pi, f) - D(\Pi, f)$$

w postaci

$$(63) \quad Q(\Pi, f) = \sum_{j \in A} (M_j - m_j) \Delta x_j + \sum_{j \in B} (M_j - m_j) \Delta x_j,$$

gdzie $j \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek $[x_{j-1}, x_j]$ zawiera liczbę $\frac{p}{q}$ spełniającą (62). Następnie oszacować z góry obie sumy po prawej stronie (63) i dobrać liczbę N oraz średnicę podziału Π tak, by spełniony był warunek całkowalności podany w twierdzeniu 4.

10. (Pierwsze twierdzenie o wartości średniej.)

Niech f, g będą funkcjami całkowalnymi na przedziale $[a, b]$, przy czym g ma stały znak. Zakładając, że

$$m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a, b]),$$

udowodnić istnienie liczby $\mu \in [m, M]$ takiej, że

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Jaką postać przyjmuje to twierdzenie gdy $g(x) = 1$? Podać sens geometryczny.

Wskazówka. Przenieść dowód twierdzenia 3 z §3.

11. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$ zaś g funkcją nieujemną i malejącą w tym przedziale. Udowodnić istnienie liczby ξ należącej do przedziału $[a, b]$ takiej, że

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx.$$

Wskazówka. Rozważając dowolny podział Π przedziału $[a, b]$ określony nierównościami (2) udowodnić najpierw, że suma

$$\sum_{j=1}^k g(x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx$$

zawiera się w przedziale $[mg(a), Mg(a)]$, gdzie

$$m = \inf_{[a,b]} F, \quad M = \sup_{[a,b]} F, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Następnie do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ dobrać podział Π przedziału $[a, b]$ tak, by suma

$$\sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} (g(x) - g(x_{j-1})) f(x) dx$$

leżała w przedziale $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Wobec dowolności liczby ε wywnioskować stąd, że

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mg(a)$$

i skorzystać z ciągłości funkcji F (por. twierdzenie 19).

12. (Drugie twierdzenie o wartości średniej.)

Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$ zaś g funkcją monotoniczną w tym przedziale. Udowodnić istnienie liczby ξ leżącej w przedziale $[a, b]$ takiej, że

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Porównać z twierdzeniem 5 §3.

Wskazówka. Zastosować zadanie 11.

13. Niech f, g będą funkcjami całkowalnymi na przedziale $[a, b]$ i niech

$$g(x) \geq \eta > 0 \quad (x \in [a, b]).$$

Udowodnić, że iloraz $\frac{f}{g}$ jest funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$.

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniach 9, 10.

§6*. Funkcje o wahanu skończonym.

1. Wahanie funkcji. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale domkniętym $[a, b]$ zaś Π podziałem tego przedziału określonym nierównościami

$$(1) \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

i niech

$$V(\Pi, f) = \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})|.$$

Liczbę (skończoną lub nie)

$$(2) \quad W_a^b(f) = \sup_{\Pi} V(\Pi, f)$$

nazywamy *wahaniem funkcji f na przedziale $[a, b]$* . Mówimy, że f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ (lub że f ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$), jeżeli

$$(3) \quad W_a^b(f) < \infty.$$

Przykład 1. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ 2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Wówczas dla dowolnego podziału Π

$$|f(x_j) - f(x_{j-1})| = \begin{cases} 2 & \text{gdy } x_{j-1} < 0 \leq x_j, \\ 0 & \text{dla pozostałych } j, \end{cases}$$

i stąd

$$V(\Pi, f) = 2.$$

Wobec tego

$$W_{-1}^1(f) = 2,$$

zatem warunek (3) jest spełniony i f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[-1, 1]$. \square

Przykład 2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Zauważmy najpierw, że f jest ciągła w przedziale $[0, 1]$. Ciągłość dla $x = 0$ wynika z twierdzenia 2 rozdz.III §3, bowiem zgodnie z nierównością

$$\left| x \sin \frac{\pi}{x} \right| \leq |x|$$

mamy

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon,$$

jeżeli założymy, że $|x| < \delta = \varepsilon$, natomiast ciągłość f dla $x \neq 0$ wynika z twierdzeń o ciągłości iloczynu i superpozycji (rozd. III §3).

Okażemy, że f nie jest funkcją o wahaniu skończonym w przedziale $[0, 1]$. Wystarczy w tym celu okazać, że do dowolnie danej liczby $M > 0$ można dobrać podział Π odcinka $[0, 1]$ w taki sposób, by zachodziła nierówność

$$(4) \quad V(\Pi, f) > M.$$

Ponieważ

$$\sin \frac{\pi}{x} = 1 \quad \text{dla} \quad x = \frac{2}{4k+1}, \quad \sin \frac{\pi}{x} = -1 \quad \text{dla} \quad x = \frac{2}{4k+3}$$

(k całkowite), przyjmijmy

$$\bar{x}_r = \frac{2}{4r+1} \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, \dots$$

oraz

$$\bar{\bar{x}}_r = \frac{2}{4r+3} \quad \text{dla} \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

i rozważmy podział

$$\Pi_s : \quad 0 < \bar{\bar{x}}_s < \bar{x}_s < \bar{\bar{x}}_{s-1} < \bar{x}_{s-1} < \dots < \bar{\bar{x}}_1 < \bar{x}_1 < \bar{\bar{x}}_0 < 1.$$

Mamy

$$f(\bar{x}_r) = \bar{x}_r, \quad f(\bar{\bar{x}}_r) = -\bar{\bar{x}}_r$$

i stąd

$$V(\Pi_s, f) = 2 \sum_{r=1}^s \bar{x}_r + 2 \sum_{r=0}^s \bar{\bar{x}}_r,$$

czyli

$$(5) \quad V(\Pi_s, f) = 4 \sum_{r=1}^s \frac{1}{4r+1} + 4 \sum_{r=0}^s \frac{1}{4r+3}.$$

Zostawmy na chwilę badanie funkcji f i przyjrzyjmy się szeregom

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{4r+1}, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{4r+3}.$$

Łatwo sprawdzić opierając się na twierdzeniu 1 rozdz. IV §2, że oba są rozbieżne - zachodzą bowiem nierówności

$$\frac{1}{4r+1} > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r+1}, \quad \frac{1}{4r+3} > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r+1},$$

zaś szereg

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r+1}$$

jest rozbieżny jako szereg harmoniczny (Przykład 4 rozdz. IV §1). Po prawej stronie (5) występują zatem sumy częściowe szeregów rozbieżnych, a stąd wynika, że podział Π_s spełnia warunek (4), jeżeli obierzemy dostatecznie duże s .

Z podanych przykładów widać, że funkcja o wahanu skończonym może nie być ciągła a z drugiej strony istnieją funkcje ciągłe mające nieskończone wahanie. Sformułujemy teraz warunki dostateczne do tego by funkcja miała skończone wahanie na ustalonym przedziale.

Twierdzenie 1. *Funkcja monotoniczna w przedziale $[a, b]$ jest funkcją o wahanu skończonym w tym przedziale.*

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi założymy, że f jest rosnąca, wówczas dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1)

$$V(\Pi, f) = \sum_{j=1}^k \left(f(x_j) - f(x_{j-1}) \right),$$

czyli po redukcji

$$V(\Pi, f) = f(b) - f(a).$$

Zatem

$$W_a^b(f) = f(b) - f(a) < \infty.$$

□

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i ma w przedziale otwartym (a, b) ograniczoną pochodną, to jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$.*

DOWÓD. Dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) mamy na mocy twierdzenia Lagrange'a

$$V(\Pi, f) = \sum_{j=1}^k |f'(\xi_j)| (x_j - x_{j-1}),$$

gdzie $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Z założenia istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$|f'(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in (a, b),$$

wobec tego

$$V(\Pi, f) \leq M \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) = M(b - a).$$

Zatem

$$W_a^b(f) \leq M(b - a) < \infty.$$

□

Wniosek 1. *Funkcja klasy C^1 w przedziale domkniętym $[a, b]$ ma skończone wahanie na tym przedziale.*

Mówimy, że f jest funkcją *kawałkami gładką* w przedziale $[a, b]$, jeżeli istnieje taki skończony ciąg liczb c_j ($j = 0, 1, \dots, p$) spełniających nierówności

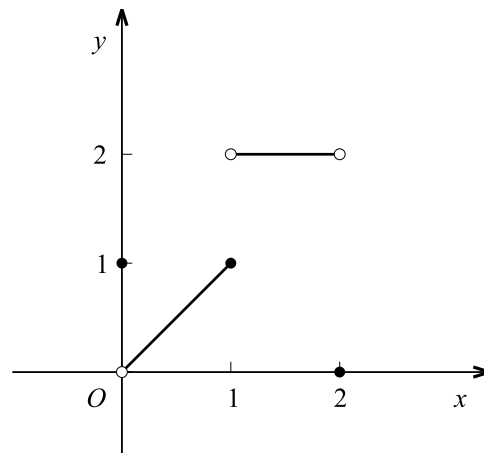
$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$$

i taki układ funkcji h_j ($j = 1, \dots, p$), że

$$1^0 f(x) = h_j(x) \text{ dla } c_{j-1} < x < c_j,$$

$$2^0 \text{ funkcja } h_j \text{ jest klasy } C^1 \text{ w przedziale domkniętym } [c_{j-1}, c_j].$$

Jeżeli funkcje h_j są stałe, to mówimy, że funkcja f jest *kawałkami stała* w przedziale $[a, b]$.



[rys. 82]

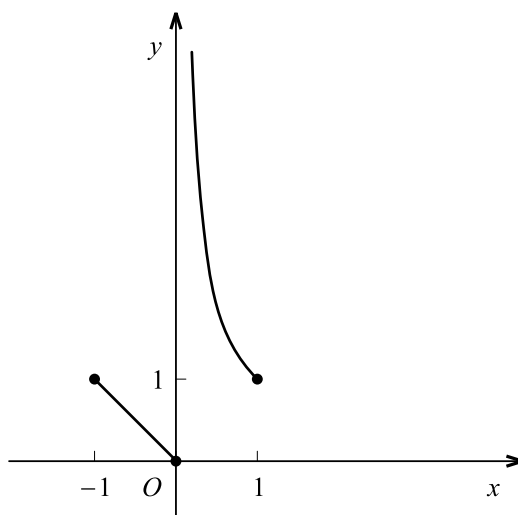
Przykład 3. Niech (rys. 82)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ x & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 2 & \text{dla } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{dla } x = 2. \end{cases}$$

Mamy

$$a = c_0 = 0 < c_1 = 1 < c_2 = b = 2, \quad h_1(x) = x, \quad h_2(x) = 2.$$

Ponieważ funkcje h_1, h_2 są klasy C^1 odpowiednio w przedziałach $[0, 1]$, $[1, 2]$, funkcja f jest kawałkami gładką w przedziale $[0, 2]$. W punktach c_0, c_1, c_2 funkcja f jest nieciągła.



[rys. 83]

Przykład 4. Niech (rys. 83)

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

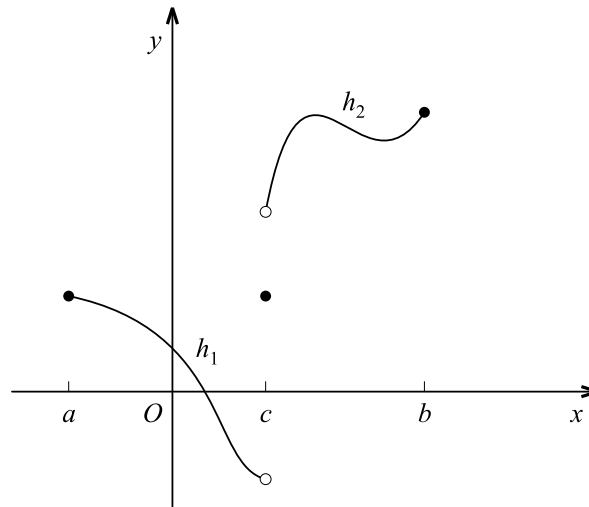
wówczas przy wprowadzonych poprzednio oznaczeniach

$$a = c_0 = -1 < c_1 = 0 < c_2 = b = 1, \quad h_1(x) = -x, \quad h_2(x) = \frac{1}{x}.$$

Jednak f nie jest kawałkami gładka w przedziale $[-1, 1]$, gdyż funkcja h_2 nie jest klasy C^1 w przedziale $[0, 1]$ (w punkcie $x = 0$ funkcja ta nie jest określona, zaś przy $x \rightarrow 0+$ dąży do $+\infty$).

Twierdzenie 3. *Jeżeli f jest kawałkami gładka w przedziale $[a, b]$, to jest funkcją o wahaniu skończonym w tym przedziale.*

DOWÓD.



[rys. 84]

Przeprowadzimy dowód zakładając, że f ma jedyny punkt nieciągłości c wewnątrz przedziału. Dowód w ogólnym przypadku przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. Mamy (rys. 84)

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{dla } a \leq x < c, \\ h_2(x) & \text{dla } c < x \leq b \end{cases}$$

przy czym funkcja h_1 jest klasy C^1 w przedziale $[a, c]$ i funkcja h_2 jest klasy C^1 w przedziale $[c, b]$. Z uczynionych założeń wynika istnienie stałej $M > 0$ takiej, że

$$(6) \quad |h_1'(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in [a, c], \quad |h_2'(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in [c, b].$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\sigma(c) = h_2(c) - h_1(c), \quad \sigma_-(c) = f(c) - h_1(c), \quad \sigma_+(c) = h_2(c) - f(c).$$

Oszacujemy $V(\Pi, f)$ dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1). Jeżeli c nie jest punktem podziału, to dla pewnego s

$$x_{s-1} < c < x_s$$

i wówczas

$$|f(x_s) - f(x_{s-1})| \leq |h_2(x_s) - h_2(c)| + |\sigma(c)| + |h_1(c) - h_1(x_{s-1})|,$$

skąd po zastosowaniu twierdzenia Lagrange'a i nierówności (6) otrzymujemy

$$(7) \quad |f(x_s) - f(x_{s-1})| \leq M(x_s - x_{s-1}) + |\sigma(c)|.$$

Jeżeli zaś dla pewnego r

$$c = x_r$$

(zatem c jest punktem podziału Π), to

$$|f(x_r) - f(x_{r-1})| \leq |\sigma_-(c)| + |h_1(c) - h_1(x_{r-1})|$$

i

$$|f(x_{r+1}) - f(x_r)| \leq |h_2(x_{r+1}) - h_2(c)| + |\sigma_+(c)|,$$

skąd stosując ponownie twierdzenie Lagrange'a i nierówność (6) otrzymujemy

$$(8) \quad |f(x_r) - f(x_{r-1})| \leq M(x_r - x_{r-1}) + |\sigma_-(c)|$$

oraz

$$(9) \quad |f(x_{r+1}) - f(x_r)| \leq M(x_{r+1} - x_r) + |\sigma_+(c)|.$$

Podobny rachunek wykazuje, że jeżeli $c \notin [x_{j-1}, x_j]$ to

$$(10) \quad |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M(x_j - x_{j-1}).$$

Z nierówności (7) - (10) wynika oszacowanie

$$V(\Pi, f) \leq M(b - a) + S(c),$$

gdzie

$$S(c) = |\sigma(c)| + |\sigma_+(c)| + |\sigma_-(c)|.$$

Wobec tego

$$W_a^b(f) \leq M(b - a) + S(c) < \infty,$$

co kończy dowód. □

2. Własności wahania funkcji. Będziemy zakładali, że f jest funkcją o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$.

Twierdzenie 4. Dla dowolnego $c \in (a, b)$

$$W_a^b(f) = W_a^c(f) + W_c^b(f).$$

DOWÓD. Niech

$$\Pi^{(1)} : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = c$$

będzie dowolnym podziałem odcinka $[a, c]$, zaś

$$\Pi^{(2)} : c = y_0 < y_1 < \dots < y_s = b$$

dowolnym podziałem odcinka $[c, b]$. Wówczas

$$\Pi = \Pi^{(1)} \cup \Pi^{(2)}$$

jest podziałem odcinka $[a, b]$ i przy tym

$$V(\Pi^{(1)}, f) + V(\Pi^{(2)}, f) = V(\Pi, f).$$

Na mocy definicji wahania funkcji wynika stąd, że

$$V(\Pi^{(1)}, f) + V(\Pi^{(2)}, f) \leq W_a^b(f).$$

Rozważając kres górny lewej strony po wszystkich podziałach $\Pi^{(1)}$ (przy ustalonym $\Pi^{(2)}$) dostajemy nierówność

$$W_a^c(f) + V(\Pi^{(2)}, f) \leq W_a^b(f),$$

następnie przechodząc do kresu górnego po wszystkich podziałach $\Pi^{(2)}$ otrzymujemy

$$(11) \quad W_a^c(f) + W_c^b(f) \leq W_a^b(f).$$

Pozostaje do udowodnienia nierówność przeciwna. Niech Π będzie dowolnym podziałem odcinka $[a, b]$ określonym nierównościami (1), wówczas dla pewnego s

$$x_{s-1} \leq c \leq x_s,$$

zatem $\Pi^{(1)} = \{a, x_1, \dots, x_{s-1}, c\}$ jest podziałem odcinka $[a, c]$ i $\Pi^{(2)} = \{c, x_s, \dots, x_k = b\}$ jest podziałem odcinka $[c, b]$. Ponieważ

$$|f(x_s) - f(x_{s-1})| \leq |f(x_s) - f(c)| + |f(c) - f(x_{s-1})|,$$

zachodzi nierówność

$$V(\Pi, f) \leq V(\Pi^{(1)}, f) + V(\Pi^{(2)}, f),$$

z której wynika, że

$$V(\Pi, f) \leq W_a^c(f) + W_c^b(f).$$

Rozważając kres górny lewej strony po wszystkich podziałach Π odcinka $[a, b]$ otrzymujemy

$$(12) \quad W_a^b(f) \leq W_a^c(f) + W_c^b(f).$$

Z nierówności (11), (12) wynika teza twierdzenia. □

Wniosek 2. Jeżeli $a \leq c < d \leq b$ i f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ to również jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[c, d]$ i przy tym

$$(13) \quad W_c^d(f) \leq W_a^b(f).$$

DOWÓD. Ponieważ wahanie funkcji jest liczbą nieujemną, z (11) wynika

$$W_c^b(f) \leq W_a^b(f),$$

zaś zastępując przedział $[a, b]$ przez $[c, b]$ otrzymujemy podobnie

$$W_c^d(f) \leq W_c^b(f).$$

Nierówności te dają (13). □

Z Wniosku 1 wynika, że jeżeli f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$, to ustalając dowolnie $x \in (a, b)$ możemy rozważać funkcję

$$(14) \quad w(x) = W_a^x(f).$$

Definicję wahanu funkcji można formalnie przenieść na przypadek przedziału "zdegenerowanego" $[a, a]$, oczywiście

$$W_a^a(f) = 0$$

dla każdej funkcji f . Dlatego możemy rozważać funkcję (14) w całym przedziale $[a, b]$, przyjmując

$$w(a) = W_a^a(f) = 0.$$

Twierdzenie 5. Zakładamy, że f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$.
Wówczas

(i) Jeżeli f jest ciągła prawostronnie w punkcie $c \in [a, b)$, to funkcja

$$w(x) = W_a^x(f)$$

też jest ciągła prawostronnie w punkcie c .

(ii) Jeżeli f jest ciągła lewostronnie w punkcie $c \in (a, b]$, to funkcja w jest też ciągła lewostronnie w punkcie c .

DOWÓD. Zauważmy, że zgodnie z Wnioskiem 2 mamy

$$W_a^x(f) < \infty$$

dla $x \in [a, b]$, zatem funkcja $w(x)$ jest dobrze określona w całym przedziale $[a, b]$.

Udowodnimy najpierw (i). Z definicji kresu górnego wynika, że do dowolnie ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π_ε odcinka $[c, b]$ tak, by

$$(15) \quad W_c^b(f) < V(\Pi_\varepsilon, f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przyjmijmy, że podział Π_ε jest określony nierównościami

$$c = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b.$$

Ponieważ f jest prawostronnie ciągła w punkcie c , można do ε dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by zachodziła nierówność

$$(16) \quad |f(c) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

o ile

$$(17) \quad c < \bar{x} < c + \delta.$$

Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że $c + \delta < x_1$. Zauważmy, że

$$|f(x_1) - f(c)| \leq |f(x_1) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - f(c)|,$$

wobec tego rozważając podział odcinka $[\bar{x}, b]$

$$\bar{\Pi} : \bar{x} < x_1 < \cdots < x_k = b$$

mamy na mocy (16)

$$V(\Pi_\varepsilon, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + V(\bar{\Pi}, f),$$

a stąd wobec (15)

$$W_c^b(f) < \varepsilon + V(\bar{\Pi}, f),$$

co daje

$$W_c^b(f) < \varepsilon + W_{\bar{x}}^b(f).$$

Zgodnie z twierdzeniem 4

$$W_a^{\bar{x}}(f) - W_a^c(f) = W_c^b(f) - W_{\bar{x}}^b(f),$$

zatem ostatnia nierówność może być zapisana w postaci

$$W_a^{\bar{x}}(f) - W_a^c(f) < \varepsilon.$$

Zachodzi ona dla dowolnie ustalonego \bar{x} spełniającego (17), a to oznacza tezę (i).

Dowód (ii) przebiega podobnie. Do dowolnie ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ dobieramy najpierw podział Π'_ε odcinka $[a, c]$ określony nierównościami

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_p = c$$

taki, że

$$(18) \quad W_a^c(f) < V(\Pi'_\varepsilon, f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

oraz liczbę $\delta > 0$ o tej własności, że

$$(19) \quad |f(c) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

jeżeli

$$(20) \quad c - \delta < \bar{x} < c.$$

Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że

$$x'_{p-1} < c - \delta.$$

Ponieważ

$$|f(c) - f(x'_{p-1})| \leq |f(c) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - f(x'_{p-1})|,$$

więc wprowadzając podział odcinka $[a, \bar{x}]$

$$\bar{\Pi} : a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{p-1} < \bar{x}$$

mamy zgodnie z (19)

$$V(\Pi'_\varepsilon, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + V(\bar{\Pi}, f),$$

a zatem wobec (18)

$$W_a^c < \varepsilon + V(\bar{\Pi}, f),$$

skąd wynika, że

$$W_a^c(f) < \varepsilon + W_a^{\bar{x}}(f).$$

Ostatnią nierówność można zapisać w postaci

$$W_a^c(f) - W_a^{\bar{x}}(f) < \varepsilon.$$

Nierówność ta zachodzi dla dowolnie ustalonego \bar{x} spełniającego (20) a to oznacza tezę (ii).

□

Z udowodnionego twierdzenia wynika

Wniosek 3. Niech f będzie funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to tą samą własność ma funkcja

$$w(x) = W_a^x(f).$$

3. Rozkład kanoniczny Jordana. Opierając się na twierdzeniach 4, 5 udowodnimy

Twierdzenie 6 (Jordana). ¹ Każda funkcja f o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ daje się przedstawić jako różnica dwóch funkcji rosnących

$$(21) \quad f(x) = p(x) - q(x),$$

gdzie

$$(22) \quad p(x) = \frac{1}{2} \left(W_a^x(f) + f(x) \right), \quad q(x) = \frac{1}{2} \left(W_a^x(f) - f(x) \right).$$

Jeżeli f jest ciągła w $[a, b]$, to tą samą własność mają funkcje p, q .

DOWÓD. Ciągłość funkcji p, q zapewnia Wniosek 3, pozostaje okazać, że funkcje te są rosnące. Załóżmy, że

$$a \leq c < d \leq b$$

i niech Π oznacza podział odcinka $[c, d]$ określony następująco

$$\Pi : c = x_0 < x_1 = d.$$

Wówczas z definicji wahanu funkcji mamy

$$V(\Pi, f) = |f(d) - f(c)| \leq W_c^d(f)$$

i wobec tego

$$(23) \quad W_c^d(f) + f(d) - f(c) \geq 0, \quad W_c^d(f) + f(c) - f(d) \geq 0.$$

Opierając się na twierdzeniu 4 stwierdzamy, że

$$p(d) - p(c) = \frac{1}{2} \left(W_c^d(f) + f(d) - f(c) \right)$$

oraz

$$q(d) - q(c) = \frac{1}{2} \left(W_c^d(f) + f(c) - f(d) \right),$$

zatem z (23) wynika

$$p(d) \geq p(c), \quad q(d) \geq q(c),$$

co kończy dowód. □

Rozkład funkcji f o wahanu skończonym określony wzorami (21), (22) nazywamy *rozkładem kanonicznym Jordana*.

4. Własności rachunkowe funkcji o wahanu skończonym. Na zakończenie udowodnimy pewne proste twierdzenia dotyczące funkcji o wahanu skończonym.

¹Camille Jordan (1838 - 1922), matematyk francuski, zajmował się analizą matematyczną, algebrą macierzy i teorią grup. Napisał pierwszą w świecie książkę poświęconą teorii grup i teorii Galois. Od 1881 r. członek Paryskiej Akademii Nauk, od 1895 r. członek Akademii Nauk w Petersburgu.

Twierdzenie 7. *Jeżeli f jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$, to również $|f|$ ma tą własność.*

DOWÓD. Z nierówności

$$\left| |f(x_j)| - |f(x_{j-1})| \right| \leq |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

(por. (12) rozdz.I §1) wynika, że

$$V(\Pi, |f|) \leq V(\Pi, f)$$

dla każdego podziału Π odcinka $[a, b]$. Przechodząc do kresu górnego ze względu na wszystkie podziały otrzymujemy

$$W_a^b(|f|) \leq W_a^b(f)$$

skąd wynika teza. □

Z definicji wahanu funkcji wynika natychmiast

Twierdzenie 8. *Funkcja o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ jest ograniczona w tym przedziale.*

DOWÓD. Ustalając dowolnie $x_0 \in (a, b]$ rozważmy podział Π odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$\Pi : a < x_0 \leq b,$$

wówczas

$$|f(x_0) - f(a)| \leq V(\Pi, f) \leq W_a^b(f),$$

stąd (por. (12) rozdz.I §1)

$$|f(x_0)| - |f(a)| \leq |f(x_0) - f(a)| \leq W_a^b(f),$$

zatem

$$|f(x_0)| \leq |f(a)| + W_a^b(f).$$

□

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 9. *Jeżeli funkcje f_1, f_2 mają skończone wanie na przedziale $[a, b]$, to ich kombinacja liniowa oraz iloczyn mają również skończone wanie na tym przedziale.*

DOWÓD. Dla dowolnych stałych c_1, c_2 , zgodnie ze wzorami (9), (10) rozdz. I §1, mamy

$$\begin{aligned} & |c_1 f_1(x_j) + c_2 f_2(x_j) - c_1 f_1(x_{j-1}) - c_2 f_2(x_{j-1})| \\ & \leq |c_1| |f_1(x_j) - f_1(x_{j-1})| + |c_2| |f_2(x_j) - f_2(x_{j-1})| \end{aligned}$$

i stąd

$$V(\Pi, c_1 f_1 + c_2 f_2) \leq |c_1| V(\Pi, f_1) + |c_2| V(\Pi, f_2)$$

dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$. Przechodząc do kresu górnego po wszystkich podziałach (por. rozdz. III §3 punkt 10) otrzymujemy

$$(24) \quad W_a^b(c_1 f_1 + c_2 f_2) \leq |c_1| W_a^b(f_1) + |c_2| W_a^b(f_2),$$

skąd wynika pierwsza część tezy.

Na podstawie twierdzenia 8 funkcje f_1, f_2 są ograniczone w przedziale $[a, b]$, istnieje więc liczba $M > 0$ taka, że

$$|f_j(x)| \leq M \quad (j = 1, 2; x \in [a, b]).$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} & |f_1(x_j)f_2(x_j) - f_1(x_{j-1})f_2(x_{j-1})| \\ & \leq |f_1(x_j)||f_2(x_j) - f_2(x_{j-1})| + |f_2(x_{j-1})||f_1(x_j) - f_1(x_{j-1})| \\ & \leq M \left(|f_1(x_j) - f_1(x_{j-1})| + |f_2(x_j) - f_2(x_{j-1})| \right) \end{aligned}$$

a stąd

$$V(\Pi, f_1 f_2) \leq M \left(V(\Pi, f_1) + V(\Pi, f_2) \right)$$

dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$. Przejście do kresu górnego po wszystkich podziałach daje

$$W_a^b(f_1 f_2) \leq M \left(W_a^b(f_1) + W_a^b(f_2) \right),$$

skąd otrzymujemy drugą część tezy. □

Zadania.

1. Posługując się twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej oszacować z góry wachanie następujących funkcji:

- a.) $f(x) = x \cos x$ na przedziale $[0, \pi]$,
 b.) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}$ na przedziale $[-1, 1]$,
 c.) $f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ na przedziale $[0, e]$.

2. Znaleźć wachanie funkcji

- a.) $f(x) = 2x$ na przedziale $[-1, 1]$,
 b.) $f(x) = \sin x^2$ na przedziale $\left[0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$,
 c.) $f(x) = \frac{3-x}{2x+5}$ na przedziale $[-1, 10]$.

3. Które z podanych funkcji mają skończone wahanie na przedziale $[0, 1]$? Naszkicować ich wykresy.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{(ii)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1, \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{2\pi}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ \text{(iv)} \quad f(x) &= \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x^2 & \text{dla } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Wskazówka. Punkt (iii) porównać z Przykładem 2.

4. Znaleźć wahanie funkcji f na przedziale $[a, b]$, jeżeli

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= x^2, \quad a = -2, \quad b = 1, \\ \text{(ii)} \quad f(x) &= \sin x, \quad a = 0, \quad b = 2\pi, \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \begin{cases} 2x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{dla } 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 2. \end{aligned}$$

Wskazówka. Podzielić przedział i zastosować twierdzenie 4.

5. Dla funkcji podanych w zadaniu 4 znaleźć funkcję

$$w(x) = W_a^x(f)$$

i podać rozkład Jordana. Zbadać ciągłość funkcji w , wynik porównać z twierdzeniem 5.

6. Niech f, g będą funkcjami o wahanii skończonym w przedziale $[a, b]$, przy czym

$$|g(x)| \geq \alpha > 0$$

dla $x \in [a, b]$. Udowodnić, że iloraz $\frac{f}{g}$ ma też skończone wahanie na przedziale $[a, b]$.

Wskazówka. Udowodnić, że funkcja $\frac{1}{g}$ ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$ i zastosować twierdzenie 9.

7. Niech

$$p_\alpha(t) = \alpha t \operatorname{tg} t - t \quad (\alpha \neq 0).$$

Udowodnić, że w każdym przedziale $\mathbb{P}_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, gdzie k jest liczbą całkowitą różną od zera, leży dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji p_α .

Wskazówka. Zacząć od zbadania funkcji p_α w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

8. Zbadać ekstrema i naszkicować wykres funkcji

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{\pi}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$(\alpha \in \mathbb{R})$.

Wskazówka. Zauważyć najpierw, że punkty

$$\check{x} = 0 \quad \text{oraz} \quad \check{x}_k = \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

są jedynymi miejscami zerowymi funkcji f_α . W celu zbadania ekstremów dla $\alpha \neq 0$ oprzeć się na zadaniu 7. Następnie znaleźć punkty, w których $\sin \frac{\pi}{x}$ przyjmuje wartości ± 1 ; czy dla $\alpha \neq 0$ są one punktami ekstremalnymi funkcji f_α ?

9. Niech f będzie dowolną funkcją określoną w przedziale $\Delta = [a, b]$. Sprawdzić, że

(i) Jeżeli podział $\tilde{\Pi}$ jest zagęszczeniem podziału Π (tzn. powstaje z niego przez dołączenie nowych punktów), to

$$V(\Pi, f) \leq V(\tilde{\Pi}, f).$$

(ii) Jeżeli f jest monotoniczna w przedziale Δ , to

$$V(\Pi, f) = |f(b) - f(a)|.$$

(iii) Załóżmy, że f ma w przedziale Δ stały znak i jedyne ekstremum dla $x = t_0 \in (a, b)$, przy czym jest to

$$\text{minimum, gdy } f(x) \leq 0, \quad \text{maximum, gdy } f(x) \geq 0.$$

Wówczas

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(t_0)|.$$

10. Niech f_α będzie funkcją określoną w zadaniu 8. Okazać, że

$$W_0^1(f_\alpha) \begin{cases} = \infty & \text{dla } \alpha \leq 1, \\ < \infty & \text{dla } \alpha > 1. \end{cases}$$

Wskazówka. Dla $\alpha \leq 1$ rozumujemy podobnie jak w Przykładzie 2, dla $\alpha > 1$ opieramy się na zadaniach 8, 9. Wynika z nich, że szacując z góry wyrażenie $V(\Pi, f)$ gdzie

$$\Pi : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1$$

można założyć, że odcinek $[x_1, 1]$ został rozbity na przedziały Δ spełniające jeden z warunków (ii) lub (iii) zadania 9. W wyniku otrzymujemy oszacowanie

$$V(\Pi, f_\alpha) \leq 3 \sum_{k=1}^r \check{x}_k^\alpha,$$

gdzie r jest liczbą naturalną dobraną do x_1 . Następnie należy wykorzystać zbieżność odpowiedniego szeregu.

11. Niech f_α będzie funkcją rozważaną w zadaniach 8, 10. Zbadać, dla jakich α

- a.) f_α jest ciągła,
- b.) f_α jest różniczkowalna,
- c.) f'_α jest ograniczona,
- d.) f'_α jest ciągła

w przedziale $[0, 1]$. Porównać z twierdzeniem 2 i zadaniem 10.

12. Załóżmy, że

- (i) funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału,
- (ii) funkcja $|f'|$ jest ograniczona i całkowalna na przedziale $[a, b]$.

Okazać, że

$$W_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Wskazówka. Zauważyć, że przy dowolnie ustalonym $\delta > 0$

$$W_a^b(f) = \sup_{d(\Pi) < \delta} V(\Pi, f).$$

13. Zakładając, że

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b],$$

$$(b) \quad \text{istnieje } \lim_{n \rightarrow \infty} W_a^b(g_n) = A < \infty,$$

udowodnić nierówność

$$W_a^b(g) \leq A.$$

14. Utrzymując w mocy założenie (a) zadania 12 załóżmy oprócz tego, że

- (b) dla każdego $\eta > 0$ funkcja $|f'|$ jest ograniczona i całkowalna w przedziale $[a + \eta, b]$,
- (c) istnieje granica

$$(25) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b |f'(x)| dx = \int_a^b |f'(x)| dx$$

(całka po prawej stronie (25) jest *całką niewłaściwą Riemanna*).
Okazać, że wówczas

$$W_a^b(f) \leq |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Wskazówka. Zastąpić funkcję f przez funkcję

$$g_\eta(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } a + \eta \leq x \leq b, \\ 0 & \text{dla } a \leq x < a + \eta, \end{cases}$$

następnie oprzeć się na zadaniach 12, 13.

15. Niech f_α będzie funkcją rozważaną w zadaniach 8, 10, 11. Udowodnić, że

$$W_0^1(f_\alpha) < \infty \quad \text{dla } \alpha > 1$$

opierając się na zadaniach 12, 14.

16. Niech $\{c_0 = b, c_1, c_2, \dots\}$ będzie ciągiem ściśle malejącym zbieżnym do $a < b$, niech g będzie funkcją określoną w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunki

$$g(x) = h_n \quad \text{dla } x \in (c_{n+1}, c_n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

i niech

$$\sigma_n = h_{n-1} - h_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Okazać, że

(i) g ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy gdy szereg

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

jest bezwzględnie zbieżny,

(ii) w przypadku bezwzględnej zbieżności szeregu (26) przyjmując

$$\sigma_0 = g(b) - g(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

mamy

$$W_a^b(g) = \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_n|.$$

Wskazówka. Niech Π będzie podziałem odcinka $[a, b]$ określonym nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b.$$

Zauważyć, że
1^o jeżeli

$$c_{n+1} < x_1 \leq c_n,$$

to

$$V(\Pi, g) \leq |h_n - g(a)| + \sum_{j=1}^n |\sigma_j|$$

przy czym można dobrać podział Π tak, by zachodziła równość;

2^o dopisując do podziału Π nowe punkty zwiększamy wyrażenie $V(\Pi, g)$ (por. zadanie 9);

3^o w przypadku zbieżności szeregu (26) ciąg $\{h_n\}$ ma skończoną granicę i przy tym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n - g(a)) = \sigma_0.$$

17. Niech $\{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ będzie ciągiem określonym w zadaniu 16 i niech g będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ spełniającą warunki

$$g(x) = h_n(x) \quad \text{dla} \quad x \in (c_{n+1}, c_n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

przy czym funkcja h_n jest klasy C^1 w przedziale $[c_{n+1}, c_n]$. Udowodnić, że jeżeli pochodne h'_n są wspólnie ograniczone tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$|h'_n(x)| \leq M \quad \text{dla} \quad x \in (c_{n+1}, c_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

to

$$W_a^b(g) \leq M(b - a).$$

18. Udowodnić, że

$$W_a^b(g) = 0$$

wtedy i tylko wtedy gdy g jest funkcją stałą w przedziale $[a, b]$.

19. Załóżmy, że funkcja f o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ daje się przedstawić w postaci

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \left(x \in [a, b] \right),$$

przy czym funkcje g, h są rosnące. Udowodnić, że dla $x, y \in [a, b]$, $x < y$ zachodzą nierówności

$$p(y) - p(x) \leq g(y) - g(x), \quad q(y) - q(x) \leq h(y) - h(x),$$

gdzie funkcje p, q są określone wzorami (22).

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do oszacowania wyrażenia $W_x^y(f)$ w oparciu o wzór (24).

§7*. Całka Riemanna - Stieltjesa.

1. Całki górna i dolna Darboux - Stieltjesa. Załóżmy, że f jest funkcją ograniczoną w przedziale domkniętym $[a, b]$ zaś α funkcją rosnącą w tym przedziale. Podobnie, jak w §5, będziemy rozważać podziały odcinka $[a, b]$ i odpowiadające im sumy górne i dolne z tym, że długość Δx_j przedziału $[x_{j-1}, x_j]$ zastąpimy przez przyrost funkcji α na tym przedziale. Określając podział Π nierównościami

$$(1) \quad \Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

i przyjmując

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad \Delta\alpha_j = \alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})$$

wprowadzimy *sumę górną Darboux - Stieltjesa*¹

$$G(\Pi, f, \alpha) = \sum_{j=1}^k M_j \Delta\alpha_j$$

i *sumę dolną Darboux - Stieltjesa*

$$D(\Pi, f, \alpha) = \sum_{j=1}^k m_j \Delta\alpha_j.$$

W rachunkach podanych w §5 istotną rolę odgrywała nierówność $\Delta x_j \geq 0$. Ponieważ α jest z założenia funkcją rosnącą, mamy również $\Delta\alpha_j \geq 0$ i dlatego większość rozumowań przeprowadzonych w §5 w przypadku funkcji $\alpha(x) = x$ przenosi się bez zmian. W szczególności zbiór sum górnych odpowiadających wszystkim podziałom Π odcinka $[a, b]$ jest zbiorem ograniczonym i tą samą własność ma zbiór sum dolnych, każdy z nich ma zatem w zbiorze liczb rzeczywistych kres górny i kres dolny (por. rozdz. I §2). Przyjmiemy jako definicję

$$\overline{\int_a^b f d\alpha} = \inf_{\Pi} G(\Pi, f, \alpha),$$
$$\underline{\int_a^b f d\alpha} = \sup_{\Pi} D(\Pi, f, \alpha).$$

Wyrażenia te nazywamy odpowiednio *całką górną Darboux - Stieltjesa* i *całką dolną Darboux - Stieltjesa* funkcji f względem funkcji α w przedziale $[a, b]$. Odpowiednik twierdzenia 3 §5 można sformułować następująco:

¹Thomas Jean Stieltjes (1856 - 1894), matematyk holenderski, profesor uniwersytetu w Leydzie, następnie w Tuluzie. Zajmował się analizą matematyczną, w szczególności uogólnieniem pojęcia całki.

Twierdzenie 1. *Jeżeli α jest funkcją rosnącą ciągłą zaś f funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$, to*

$$\lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} G(\Pi, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f d\alpha,$$

$$\lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} D(\Pi, f, \alpha) = \underline{\int_a^b} f d\alpha.$$

DOWÓD przebiega podobnie jak w przypadku $\alpha(x) = x$ rozważanym w §5 (twierdzenie 3), jedyna zmiana polega na wykorzystaniu jednostajnej ciągłości funkcji α w przedziale $[a, b]$. Wynika z niej, że do dowolnie danej liczby $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by z warunku $d(\Pi) < \delta$ wynikała nierówność

$$\max_j \Delta\alpha_j < \eta.$$

Mnożąc tą nierówność przez $M_j \geq 0$ dostajemy

$$M_j \Delta\alpha_j \leq M_j \eta,$$

zatem

$$M_j \Delta\alpha_j \leq M \eta,$$

co po zsumowaniu względem $j \in A$ daje odpowiednik nierówności (15) §5 w postaci

$$\sum_{j \in A} M_j \Delta\alpha_j \leq M \bar{k} \eta.$$

Wystarczy teraz przyjąć

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2\bar{k}M},$$

dalsze szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. □

2. Całka Riemanna - Stieltjesa względem funkcji rosnącej. W dalszym ciągu zakładamy, że f jest funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$, zaś α funkcją rosnącą w tym przedziale. Jeżeli całki górna i dolna Darboux - Stieltjesa są równe, to mówimy, że funkcja f jest całkowalna względem funkcji α na przedziale $[a, b]$. Wspólną wartość całki górnej i całki dolnej nazywamy *całką Riemanna - Stieltjesa* (lub krócej *całką Stieltjesa*) *funkcji f względem funkcji α w przedziale $[a, b]$* . Dla całki Riemanna - Stieltjesa przyjmujemy oznaczenie

$$\int_a^b f d\alpha \quad \text{lub} \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x),$$

zatem

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) d\alpha(x) = \underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha$$

dla dowolnej funkcji f całkowalnej względem α na przedziale $[a, b]$.

Kryterium całkowalności podane w §5 dla całki Riemanna przenosi się bez zmian na przypadek całki Riemanna - Stieltjesa. Mamy więc

Twierdzenie 2. *Funkcja f jest całkowna względem funkcji rosnącej α na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π_ε odcinka $[a, b]$ tak, by zachodziła nierówność*

$$(2) \quad G(\Pi_\varepsilon, f, \alpha) - D(\Pi_\varepsilon, f, \alpha) < \varepsilon.$$

DOWÓD przebiega tak samo jak dowód twierdzenia 4 §5. □

Stosując podane kryterium otrzymujemy łatwo

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to jest całkowna na tym przedziale względem dowolnej rosnącej funkcji α i przy tym*

$$(3) \quad \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} G(\Pi, f, \alpha) = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} D(\Pi, f, \alpha) = \int_a^b f d\alpha.$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że jeżeli $\alpha(a) = \alpha(b)$, to funkcja α jest stała i wówczas każda funkcja f jest całkowna względem α . Mamy bowiem dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$

$$G(\Pi, f, \alpha) = D(\Pi, f, \alpha) = 0$$

i stąd

$$\int_a^b f d\alpha = \overline{\int_a^b f d\alpha} = 0.$$

Możemy więc przeprowadzić dowód zakładając, że $\alpha(a) < \alpha(b)$.

Całkowalność funkcji f otrzymujemy rozumując tak samo, jak w dowodzie twierdzenia 5 §5, należy tylko przyjąć

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

Stwierdzamy wówczas, że

$$(4) \quad G(\Pi, f, \alpha) - D(\Pi, f, \alpha) < \varepsilon,$$

o ile

$$(5) \quad d(\Pi) < \delta,$$

gdzie $\delta > 0$ jest liczbą dobraną do η , a więc pośrednio do ε . Zatem (2) zachodzi dla każdego podziału Π , którego średnica spełnia nierówność (5). Ponieważ z definicji całki

$$D(\Pi, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq G(\Pi, f, \alpha)$$

więc z (4) wynika, że

$$G(\Pi, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha < \varepsilon$$

oraz

$$\int_a^b f d\alpha - D(\Pi, f, \alpha) < \varepsilon$$

dla każdego podziału Π spełniającego warunek (5) - a to oznacza, że zachodzi (3). □

Stosując kryterium podane w twierdzeniu 2 udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 4. *Jeżeli α jest funkcją rosnącą ciągłą w przedziale $[a, b]$, to każda funkcja monotoniczna jest całkowalna względem α na tym przedziale.*

DOWÓD. Możemy przeprowadzić dowód zakładając, że $\alpha(a) < \alpha(b)$ (por. początek dowodu twierdzenia 3). Przy tym założeniu dowód przebiega podobnie, jak dla całki Riemanna (§5 twierdzenie 7), należy tylko zamiast odcinka $[a, b]$ podzielić na k równych części odcinek $[\alpha(a), \alpha(b)]$. Punkty podziału Π określonego nierównościami (1) otrzymujemy z warunków

$$(6) \quad \alpha(x_j) = \alpha(a) + jd_k \quad \text{gdzie} \quad d_k = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{k}.$$

Ponieważ dla ustalonego j

$$\alpha(x_{j-1}) < \alpha(a) + jd_k < \alpha(b),$$

z założenia ciągłości funkcji α wynika, że ma ona własność Darboux (twierdzenie 13 rozdz. III §3), istnieje zatem punkt $x_j \in (x_{j-1}, b)$ spełniający (6). Dla tak dobranego podziału Π mamy $\Delta\alpha_j = d_k$ ($j = 1, 2, \dots, k$), zatem przy założeniu monotoniczności f

$$G(\Pi, f, \alpha) - D(\Pi, f, \alpha) = d_k |f(b) - f(a)| < \varepsilon$$

jeżeli obierzemy k dostatecznie duże. □

Rozumując tak samo jak w dowodzie twierdzenia 8 §5 otrzymujemy w oparciu o kryterium całkowalności podane w twierdzeniu 2

Twierdzenie 5. *Jeżeli funkcje f_1, f_2 są całkowalne na przedziale $[a, b]$ względem funkcji rosnącej α i c jest dowolną stałą, to funkcja*

$$(i) \quad f_1 + f_2, \quad (ii) \quad cf_2$$

również jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ względem funkcji α . □

3. Całka Riemanna - Stieltjesa względem funkcji o wahanii skończonym. Niech g będzie funkcją o wahanii skończonym w przedziale $[a, b]$ i niech

$$(7) \quad g(x) = \alpha(x) - \beta(x)$$

będzie jej rozkładem kanonicznym Jordana (por. twierdzenie 6 §6). Mówimy, że funkcja ograniczona f jest całkowalna względem funkcji g na przedziale $[a, b]$, jeżeli istnieją obie całki

$$(8) \quad \int_a^b f d\alpha, \quad \int_a^b f d\beta.$$

Różnicę

$$(9) \quad \int_a^b f dg = \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\beta$$

nazywamy wówczas *całką Riemanna - Stieltjesa* (lub krócej: *całką Stieltjesa*) *funkcji f względem funkcji g w przedziale $[a, b]$* . W szczególności możemy rozważać całkę (9) funkcji f o skończonym wahanu w przedziale $[a, b]$, gdyż zgodnie z twierdzeniem 8 §6 funkcja taka jest ograniczona.

Uwaga. Łatwo wykazać, że w przypadku funkcji g rosnącej (a więc mającej skończone wahanie - por. twierdzenie 1 §6) podana definicja całki pokrywa się z poprzednio rozważaną w punkcie 2. Istotnie, dla funkcji g rosnącej

$$W_a^x(g) = g(x) - g(a),$$

zatem w rozkładzie (7) mamy (por. (21), (22) §6)

$$\alpha(x) = g(x) - \frac{1}{2}g(a), \quad \beta(x) = -\frac{1}{2}g(a).$$

Wobec tego dla dowolnego podziału Π odcinka $[a, b]$ określonego nierównościami (1)

$$\Delta\alpha_j = \Delta g_j, \quad \Delta\beta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

a więc

$$G(\Pi, f, \alpha) = G(\Pi, f, g), \quad D(\Pi, f, \alpha) = D(\Pi, f, g)$$

oraz

$$G(\Pi, f, \beta) = D(\Pi, f, \beta) = 0.$$

Wynika stąd, że druga z całek (8) istnieje zawsze (i jest równa zero), natomiast pierwsza z tych całek istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest całkowalna (w sensie podanym w punkcie 2) względem g i przy tym

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f d\alpha.$$

Jeżeli w szczególności $g(x) = x$, to całka (9) jest całką Riemanna omawianą w §5.

Niech Π będzie podziałem odcinka $[a, b]$ określonym nierównościami (1) i niech $\xi(\Pi) = \{\xi_j\}$ oznacza układ punktów pośrednich tzn. spełniających warunek

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Podobnie, jak dla całki Riemanna, wprowadzimy *sumę przybliżoną całki* (9)

$$S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta g_j,$$

gdzie

$$\Delta g_j = \Delta\alpha_j - \Delta\beta_j = g(x_j) - g(x_{j-1}).$$

Udowodnimy

Twierdzenie 6. Załóżmy, że spełniony jest jeden z warunków

(i) funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, funkcja g ma skończone wahanie na tym przedziale

lub

(ii) f, g są funkcjami o wahanii skończonym w przedziale $[a, b]$ i funkcja g jest ciągła. Wówczas funkcja f jest całkowna względem funkcji g na przedziale $[a, b]$.

Jeżeli $\{\Pi_n\}$ jest dowolnym ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$ zaś $\xi(\Pi_n)$ dowolnym układem punktów pośrednich, to oznaczając

$$S_n = S(f, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

mamy

$$(10) \quad \int_a^b f dg = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Uwaga. Wzór (10) zachodzi w szczególności dla funkcji $g(x) = x$, wówczas całka po lewej stronie (10) jest całką Riemanna (por. równość (44) §5).

DOWÓD. Załóżmy, że spełniony jest warunek (i), wówczas istnienie całek (8) wynika z twierdzenia 3, zatem całka (9) istnieje na mocy definicji. Dla każdego podziału Π i dowolnie obranego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi)$ zachodzą nierówności

$$(11) \quad D(\Pi, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq G(\Pi, f, \alpha)$$

oraz

$$(12) \quad D(\Pi, f, \alpha) \leq S(f, \alpha, \Pi, \xi(\Pi)) \leq G(\Pi, f, \alpha).$$

Jak wykazaliśmy w dowodzie twierdzenia 3, do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta_1 > 0$ tak, że dla każdego podziału Π spełniającego warunek

$$d(\Pi) < \delta_1$$

zachodzi nierówność

$$G(\Pi, f, \alpha) - D(\Pi, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

z której wobec (11), (12) wynika

$$(13) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f d\alpha - S(f, \alpha, \Pi, \xi(\Pi)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić zastępując funkcję α przez funkcję β , co daje

$$(14) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < S(f, \beta, \Pi, \xi(\Pi)) - \int_a^b f d\beta < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla każdego podziału Π spełniającego warunek

$$d(\Pi) < \delta_2,$$

gdzie liczba $\delta_2 > 0$ również jest dobrana do ε . Nierówności (13), (14) możemy dodać stronami zakładając, że w obu sumach przybliżonych mamy ten sam układ punktów pośrednich $\xi(\Pi)$. Otrzymujemy

$$(15) \quad -\varepsilon < \int_a^b f dg - S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) < \varepsilon,$$

o ile

$$(16) \quad d(\Pi) < \delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Ponieważ z założenia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Pi_n) = 0,$$

do liczby δ można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$d(\Pi_n) < \delta.$$

Wobec tego na mocy (15), (16) mamy

$$\left| \int_a^b f dg - S_n \right| < \varepsilon$$

dla $n > N$, przy czym liczba N jest dobrana do ε , co kończy dowód (10).

Przechodząc do dowodu drugiej części twierdzenia założymy, że spełniony jest warunek (ii). Zgodnie z twierdzeniem 6 §6 mamy rozkład kanoniczny Jordana

$$f(x) = p(x) - q(x), \quad g(x) = \alpha(x) - \beta(x),$$

przy czym funkcje α, β są ciągłe w przedziale $[a, b]$. Z twierdzenia 4 wynika, że każda z funkcji p, q jest całkowalna względem funkcji α i względem funkcji β , zaś wobec twierdzenia 5 tą samą własność ma funkcja f jako różnica funkcji całkowalnych. Istnieją więc całki (8), a więc i całka (9) na mocy definicji. Z twierdzenia 1 wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta_1 > 0$ tak, by zachodziły nierówności

$$G(\Pi, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_a^b f d\alpha - D(\Pi, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2},$$

jeżeli

$$(17) \quad d(\Pi) < \delta_1.$$

Wobec tego opierając się na (12) dostajemy

$$\int_a^b f d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, \alpha, \Pi, \xi(\Pi)) < \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

czyli

$$(18) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < S(f, \alpha, \Pi, \xi(\Pi)) - \int_a^b f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla wszystkich podziałów Π spełniających warunek (17) i dowolnie obranych punktów pośrednich $\xi(\Pi)$. Podobnie okazujemy, że do ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta_2 > 0$ tak, by z warunku

$$d(\Pi) < \delta_2$$

wynikała nierówność

$$(19) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f d\beta - S(f, \beta, \Pi, \xi(\Pi)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zakładając, że punkty pośrednie w sumach przybliżonych w (18), (19) są te same, otrzymujemy po dodaniu nierówności

$$-\varepsilon < S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) - \int_a^b f dg < \varepsilon$$

dla podziałów Π spełniających warunek

$$d(\Pi) < \delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Stąd, podobnie jak w dowodzie pierwszej części twierdzenia, wynika

$$\left| \int_a^b f dg - S_n \right| < \varepsilon$$

dla $n > N$, przy czym liczba N jest dobrana do ε - co kończy dowód (10). □

Przykład 1. Obliczymy całkę Riemanna - Stieltjesa

$$\int_0^1 x dx^2$$

jako granicę ciągu sum przybliżonych. W podanym przykładzie

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2$$

- wobec tego całka istnieje, gdyż funkcja f jest ciągła a funkcja g jest klasy C^1 w przedziale $[0, 1]$, zatem ma skończone wahanie na tym przedziale (por. Wniosek 1 §6). Podział Π_n określimy nierównościami

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1,$$

zaś jako punkt pośredni ξ_j przyjmujemy prawy koniec przedziału $[x_{j-1}, x_j]$. Mamy zatem

$$\xi_j = x_j = \frac{j}{n} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ponieważ

$$d(\Pi_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

ciąg $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[0, 1]$ i możemy stosować wzór (10). Mamy

$$\Delta g_j = x_j^2 - x_{j-1}^2 = \frac{2j-1}{n^2}$$

i wobec tego

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{j(2j-1)}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j(2j-1).$$

Granice ciągu $\{S_n\}$ obliczymy posługując się twierdzeniem Stolza (twierdzenie 11 rozdz. II §2). Oznaczając

$$x_n = \sum_{j=1}^n j(2j-1), \quad y_n = n^3$$

dostajemy na mocy tego twierdzenia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)}{n^3 - (n-1)^3}$$

co po prostych przekształceniach w liczniku i mianowniku daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{2}{3}.$$

Zatem

$$\int_0^1 x \, dx^2 = \frac{2}{3}.$$

4. Własności rachunkowe całki Riemanna - Stieltjesa. Podane dalej twierdzenia wynikają łatwo z przejścia granicznego (10).

Twierdzenie 7 (liniowość całki). *Jeżeli funkcje f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 określone na przedziale $[a, b]$ spełniają założenia (i) lub (ii) twierdzenia 6, to dla dowolnych stałych c_1, c_2*

$$(20) \quad \int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg$$

oraz

$$(21) \quad \int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.$$

DOWÓD. Zgodnie z twierdzeniem 9 §6 kombinacja liniowa funkcji o wahanu skończonym również ma skończone wahanie. Wobec tego wszystkie całki we wzorach (20), (21) istnieją i są granicami odpowiednich sum przybliżonych odpowiadających ciągowi normalnemu podziałów $\{\Pi_n\}$ odcinka $[a, b]$. Ponadto dla dowolnego podziału Π_n i układu punktów pośrednich $\xi(\Pi_n)$

$$S(c_1 f_1 + c_2 f_2, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = c_1 S(f_1, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) + c_2 S(f_2, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

oraz

$$S(f, c_1 g_1 + c_2 g_2, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = c_1 S(f, g_1, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) + c_2 S(f, g_2, \Pi_n, \xi(\Pi_n)).$$

Przejście do granicy przy $n \rightarrow \infty$ daje (20), (21). □

Twierdzenie 8 (o podziale przedziału całkowania). *Jeżeli funkcje f, g spełniają jedno z założeń (i) lub (ii) twierdzenia 6 oraz $a < c < b$, to*

$$(22) \quad \int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

DOWÓD. Zgodnie z wnioskiem 2 §6 funkcja o skończonym wahanu w przedziale $[a, b]$ ma skończone wahanie na każdym z przedziałów $[a, c]$, $[c, b]$ - zatem obie całki po prawej stronie (22) istnieją. Dowód (22) przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 3 §1 w oparciu o równość (10). □

Twierdzenie 9 (o całkowaniu przez części). *Załóżmy, że funkcje f, g mają skończone wahanie na przedziale $[a, b]$ i że jedna z nich jest ciągła. Wówczas*

$$(23) \quad \int_a^b f dg = [fg]_a^b - \int_a^b g df.$$

DOWÓD. Zgodnie z twierdzeniem 6 obie całki istnieją. Dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) otrzymujemy po redukcji

$$(24) \quad \sum_{j=1}^k f(x_j) \Delta g_j + \sum_{j=1}^k g(x_{j-1}) \Delta f_j = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Pierwsza suma jest sumą przybliżoną całki po lewej stronie (23), w której $\xi_j = x_j$ natomiast druga suma jest sumą przybliżoną całki po prawej stronie (23), w której przyjęto $\xi_j = x_{j-1}$. Jeżeli $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$, to stosując (24) do podziału Π_n przy dowolnie ustalonym n i przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ dostajemy w oparciu o (10)

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = [fg]_a^b$$

czyli (23). □

Twierdzenie 10 (o całkowaniu przez podstawienie). *Załóżmy, że φ jest funkcją ciągłą ściśle rosnącą w przedziale $[a, b]$ a funkcja f*

(i) jest ciągła

lub

(ii) ma skończone wahanie

na przedziale $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Wówczas

$$(25) \quad \int_a^b f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy.$$

DOWÓD. W przypadku (i) superpozycja $f(\varphi(x))$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ zaś w przypadku (ii) funkcja f ma rozkład Jordana

$$f(x) = p(x) - q(x),$$

gdzie p, q są funkcjami rosnącymi, zatem superpozycja

$$f(\varphi(x)) = p(\varphi(x)) - q(\varphi(x))$$

ma wahanie skończone jako różnica funkcji monotonicznych (por. twierdzenia 1, 9 §6). Wobec tego do całek występujących w równości (25) stosuje się twierdzenie 6. Dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) i dowolnego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi)$ przyjmijmy

$$(26) \quad y_j = \varphi(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, k)$$

oraz

$$(27) \quad \eta_j = \varphi(\xi_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

wówczas

$$\Pi^* : \varphi(a) = y_0 < y_1 < \dots < y_k = \varphi(b)$$

jest podziałem odcinka $[\varphi(a), \varphi(b)]$ zaś punkty η_j ($j = 1, \dots, k$) są punktami pośrednimi odpowiadającymi temu podziałowi, przy tym

$$f(\varphi(\xi_j))\Delta\varphi_j = f(\eta_j)\Delta y_j$$

a stąd

$$(28) \quad S(f(\varphi), \varphi, \Pi, \xi(\Pi)) = S(f, \Pi^*, \eta(\Pi^*)).$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji φ w przedziale $[a, b]$ (por. twierdzenie 9 rozdz. III §3) wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, że z warunku

$$d(\Pi) < \delta$$

wynika

$$d(\Pi^*) < \varepsilon.$$

Niech teraz $\{\Pi_n\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$, wówczas można do liczby δ dobrać N tak, by dla $n > N$ spełniona była nierówność

$$d(\Pi_n) < \delta.$$

Z nierówności tej wynika, że

$$d(\Pi_n^*) < \varepsilon,$$

jeżeli przy ustalonym n podział Π_n^* jest określony zgodnie z (26). Wobec tego $\{\Pi_n^*\}$ jest ciągiem normalnym podziałów odcinka $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Z równości (28) wynika, że obierając przy ustalonym n punkty pośrednie zgodnie z (27) mamy

$$S(f(\varphi), \varphi, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = S(f, \Pi_n^*, \eta(\Pi_n^*)).$$

Po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ w oparciu o (10) otrzymujemy (25). \square

5. Sprowadzanie całki Riemanna - Stieltjesa do całki Riemanna. Obliczanie całki Riemanna - Stieltjesa przy pomocy przejścia do granicy (10) (jak to zrobiliśmy w Przykładzie 1) byłoby bardzo niewygodne a nawet w większości przypadków niewykonalne. Mamy jednak twierdzenia pozwalające sprowadzić całkę Riemanna - Stieltjesa do całki Riemanna. Obliczanie tej ostatniej sprowadza się, jak to wynika z zasadniczego twierdzenia rachunku całkowego (twierdzenie 5 §1 i twierdzenia 18 §5), do znalezienia funkcji pierwotnej. Metody rachunkowe pozwalające wyznaczyć efektywnie funkcję pierwotną (czyli całkę nieoznaczoną) danej funkcji ciągłej zostały omówione w §2.

Twierdzenie 11. *Załóżmy, że funkcja f*

(i) *jest ciągła*

lub

(ii) *ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$, zaś funkcja g jest klasy C^1 w tym przedziale.*

Wówczas

$$(29) \quad \int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

DOWÓD. Z twierdzenia 2 §6 (por. Wniosek 1 §6) wynika, że g jest funkcją o wahanu skończonym, oprócz tego jest ciągła z założenia. Wobec tego Twierdzenie 6 zapewnia istnienie całki po lewej stronie i możliwość przejścia do granicy zgodnie ze wzorem (10). Po prawej stronie mamy całkę Riemanna, przy czym w przypadku (i) funkcja podcałkowa jest ciągła a więc całkowna (twierdzenie 5 §5). W przypadku (ii) funkcja f jest całkowna jako różnica funkcji rosnących (por. twierdzenie 6 §6 oraz twierdzenia 7, 8, §5), funkcja g' jest całkowna jako funkcja ciągła, zaś iloczyn funkcji całkownych jest całkowny (twierdzenie 10 §5). Zatem w obu przypadkach całka po prawej stronie istnieje i jest granicą ciągu sum przybliżonych zgodnie z twierdzeniem 13 §5. Dowód równości (29) oprzemy na wzorze (10) i wzorze (44) §5. Dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) i dowolnego $j = 1, 2, \dots, k$ mamy zgodnie z twierdzeniem o wartości średniej rachunku różniczkowego

$$(30) \quad \Delta g_j = g(x_j) - g(x_{j-1}) = g'(\bar{x}_j) \Delta x_j,$$

gdzie $\bar{x}_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Przyjmując

$$(31) \quad \xi_j = \bar{x}_j$$

w sumie przybliżonej całki po lewej stronie mamy zatem

$$(32) \quad \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta g_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) g'(\xi_j) \Delta x_j.$$

Niech teraz $\{\Pi_n\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$. Jeżeli przy ustalonym n obierzemy punkty pośrednie zgodnie z warunkiem (31), to z (32) wynika, że dla każdego n zachodzi równość

$$S(f, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) = S(fg', \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

która po przejściu do granicy daje (29). □

Uwaga. Jeżeli w twierdzeniu 10 funkcja f jest ciągła a funkcja φ jest klasy C^1 w przedziale $[a, b]$, to po zastosowaniu twierdzenia 11 równość (25) przyjmuje postać

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy.$$

Jest to znany wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych (por. (2) §3).

Przykład 2. Obliczymy całkę Riemanna - Stieltjesa

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d \sin x$$

stosując twierdzenie 10. Funkcja

$$\varphi(x) = \sin x$$

jest ściśle rosnąca w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$, zaś funkcja $f(y) = y^2$ jest ciągła. Wobec tego

$$K = \int_0^1 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Całkę tą można również sprowadzić do całki Riemanna opierając się na twierdzeniu 11. Mamy wówczas

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

czyli

$$K = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx.$$

Całka po prawej stronie była rozważana w §3 punkt 2. Przyjmując $n = 1$ we wzorze (8) §3 dostajemy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3},$$

zatem

$$K = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

podobnie jak poprzednio.

Przykład 3. W całce Riemanna Stieltjesa

$$A = \int_0^1 e^x d x^2$$

mamy

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2,$$

zatem założenia twierdzenia 11 są spełnione i możemy stosować wzór (29). Wobec tego

$$A = 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

Otrzymaliśmy całkę oznaczoną z funkcji ciągłej, do której możemy zastosować całkowanie przez części (por. twierdzenie 1 §3). Zatem

$$\frac{1}{2}A = \int_0^1 x(e^x)' dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx,$$

skąd

$$A = 2 \left[x e^x - e^x \right]_0^1 = 2.$$

Przykład 4. Obliczmy całkę Riemanna - Stieltjesa

$$B = \int_{-1}^3 x^2 d g(x),$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -1, \\ 1 & \text{dla } -1 < x < 2, \\ -1 & \text{dla } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

stosując całkowanie przez części. Funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła i ma ograniczoną pochodną w przedziale $[-1, 3]$ a funkcja g jest kawałkami stała, zatem z twierdzeń 2, 3 §6 wynika, że obie funkcje mają skończone wahanie. Wobec tego spełnione są założenia twierdzenia 9 i możemy stosować wzór (23), który daje

$$B = \left[x^2 g(x) \right]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 g(x) d f(x).$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie zastosujemy twierdzenie 11 a następnie podzielimy przedział całkowania (twierdzenie 8). Otrzymujemy

$$\int_{-1}^3 g(x) d f(x) = 2 \int_{-1}^3 x g(x) dx = 2(B_1 + B_2),$$

gdzie

$$B_1 = \int_{-1}^2 x g(x) dx, \quad B_2 = \int_2^3 x g(x) dx.$$

W całce B_1 możemy funkcję $g(x)$ zastąpić przez funkcję

$$g_1(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [-1, 2]$$

nie zmieniając wartości całki (por. twierdzenie 20 §5), zatem

$$B_1 = \int_{-1}^2 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{3}{2},$$

oprócz tego

$$B_2 = - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^3 = -\frac{5}{2}$$

i stąd

$$\int_{-1}^3 g(x) d f(x) = -2.$$

Ponieważ

$$\left[x^2 g(x) \right]_{-1}^3 = -9,$$

otrzymujemy ostatecznie

$$B = -9 + 2 = -7.$$

Twierdzenie 12. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą a g funkcją kawałkami gładką w przedziale $[a, b]$. Drugie założenie oznacza, że istnieje taki skończony ciąg liczb c_j ($j = 0, 1, \dots, p$) spełniających nierówność

$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$$

i taki układ funkcji h_j ($j = 1, \dots, p$), że

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & f(x) = h_j(x) \quad \text{dla} \quad c_{j-1} < x < c_j, \\ 2^0 \quad & \text{funkcja } h_j \text{ jest klasy } C^1 \text{ w przedziale domkniętym } [c_{j-1}, c_j]. \end{aligned}$$

Wówczas

$$(33) \quad \int_a^b f \, d g = \int_a^b f(x) g'(x) \, dx + \sum_{j=0}^p f(c_j) \sigma_g(c_j),$$

gdzie

$$(34) \quad \begin{aligned} \sigma_g(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) - g(a), \\ \sigma_g(c_j) &= \lim_{x \rightarrow c_j^+} g(x) - \lim_{x \rightarrow c_j^-} g(x) \quad (j = 1, \dots, p-1), \\ \sigma_g(b) &= g(b) - \lim_{x \rightarrow b^-} g(x). \end{aligned}$$

Uwaga 1. Liczbę $\sigma_g(c_j)$ nazywamy *skokiem funkcji g w punkcie c_j* ($j = 0, 1, \dots, p$). Możemy ją łatwo obliczyć znając funkcje h_j , mianowicie

$$\begin{aligned} \sigma_g(a) &= h_1(a) - g(a), \\ \sigma_g(c_j) &= h_{j+1}(c_j) - h_j(c_j) \quad (j = 1, \dots, p-1), \\ \sigma_g(b) &= g(b) - h_p(b). \end{aligned}$$

Uwaga 2. Całka po prawej stronie (33) jest całką Riemanna w której funkcja podcałkowa jest określona i ciągła poza skończoną ilością punktów c_j . Zgodnie z twierdzeniami 6 i 20 §5 całka ta istnieje i nie zależy od tego, jak określimy wartość funkcji g' w punktach skoku c_j .

DOWÓD. Dla uproszczenia dowodu założymy, że funkcja g ma tylko jeden skok w punkcie $c \in (a, b)$. Zatem

$$g(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{dla } a \leq x < c, \\ h_2(x) & \text{dla } c < x \leq b \end{cases}$$

przy czym h_1 jest klasy C^1 w przedziale $[a, c]$, zaś h_2 - klasy C^1 w przedziale $[c, b]$. Niech Π będzie podziałem określonym nierównościami (1) i niech $c \in \Pi$. Wówczas dla pewnego r

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = c < x_{r+1} < \dots < x_k = b,$$

przy czym punkty

$$x_0, x_1, \dots, x_r$$

wyznaczają podział odcinka $[a, c]$ a punkty

$$x_r, x_{r+1}, \dots, x_k$$

- podział odcinka $[c, b]$. Zauważmy, że

$$\Delta g_r = g(c) - g(x_{r-1}) = g(c) - h_1(c) + h_1(c) - g(x_{r-1})$$

i podobnie

$$\Delta g_{r+1} = g(x_{r+1}) - g(c) = h_2(c) - g(c) + h_2(x_{r+1}) - h_2(c).$$

Obierając punkty pośrednie w sumie przybliżonej odpowiadającej podziałowi Π w taki sposób, by

$$(35) \quad \xi_r = \xi_{r+1} = x_r = c,$$

mamy zatem

$$(36) \quad \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta g_j = \sum_{j=1}^r f(\xi_j) \Delta h_{1,j} + \sum_{j=r+1}^k f(\xi_j) \Delta h_{2,j} + f(c) (h_2(c) - h_1(c)).$$

Załóżmy teraz, że $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów odcinka $[a, b]$, z których każdy zawiera punkt c , obierzmy przy ustalonym n punkty pośrednie tak, by spełniony był warunek (35) i przekształćmy sumę przybliżoną zgodnie z (36). Z twierdzeń 2, 3 §6 wynika, że funkcje g, h_1, h_2 mają skończone wahanie odpowiednio w przedziałach $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ i wobec tego całkując funkcję ciągłą f względem tych funkcji możemy zastosować twierdzenie 6. Przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ dostajemy w wyniku (10)

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dh_1 + \int_c^b f dh_2 + f(c) \sigma_g(c).$$

Całki po prawej stronie możemy przekształcić stosując twierdzenie 11, co daje

$$(37) \quad \int_a^b f dg = \int_a^c f(x) h_1'(x) dx + \int_c^b f(x) h_2'(x) dx + f(c) \sigma_g(c).$$

Zauważmy, że zgodnie z twierdzeniem 15 §5 suma całek po prawej stronie jest równa całce

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx$$

(por. Uwaga 2), zatem (37) można zapisać w postaci

$$(38) \quad \int_a^b f dg = \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(c) \sigma_g(c).$$

Przeprowadzenie dowodu w przypadku dowolnego skończonego układu punktów skoku funkcji g pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Z twierdzenia 12 wynika

Wniosek 1. Jeżeli f jest funkcją ciągłą a g funkcją kawałkami stałą w przedziale $[a, b]$, to przy oznaczeniach twierdzenia 12

$$(39) \quad \int_a^b f dg = \sum_{j=0}^p f(c_j) \sigma_g(c_j).$$

DOWÓD. Ponieważ funkcje h_j są stałe, pochodna $g'(x)$ jest równa zero za wyjątkiem punktów c_j , w których nie jest określona i stąd całka po prawej stronie (38) jest równa zero. \square

Przykład 5. Całkę rozważaną w przykładzie 4 możemy obliczyć inaczej stosując wzór (39). W przedziale $[-1, 3]$ funkcja g jest kawałkami stała, ma punkty nieciągłości

$$c_0 = -1, \quad c_1 = 2$$

i skoki w tych punktach

$$\sigma_g(c_0) = 1, \quad \sigma_g(c_1) = -2.$$

Wobec tego

$$B = \int_{-1}^3 x^2 dg(x) = c_0^2 - 2c_1^2 = -7.$$

Przykład 6. Obliczymy całkę Riemanna - Stieltjesa

$$(40) \quad C = \int_{-2}^2 x dg(x),$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } -2 \leq x \leq -1, \\ 2 & \text{dla } -1 < x < 0, \\ x^2 + 3 & \text{dla } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Z twierdzeń 2, 3 §6 wynika, że obie funkcje $f(x) = x$ i $g(x)$ mają skończone wahanie, ponadto funkcja f jest ciągła - można zatem zastosować twierdzenie 9 o całkowaniu przez części. Otrzymujemy

$$C = \left[x g(x) \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 g(x) df(x).$$

Ponieważ funkcja f jest klasy C^1 , do całki po prawej stronie można zastosować twierdzenie 11, co daje

$$(41) \quad C = \left[x g(x) \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 g(x) dx.$$

Otrzymaną całkę obliczymy dzieląc przedział całkowania. Mamy

$$(42) \quad \int_{-2}^2 g(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x+2) dx + \int_{-1}^0 2 dx + \int_0^2 (x^2+3) dx$$

(w środkowej całce po prawej stronie można przyjąć, że funkcja podcałkowa jest $= 2$ w całym przedziale $[-1, 0]$ - por. twierdzenie 20 §5). Prosty rachunek daje

$$\begin{aligned} [xg(x)]_{-2}^2 &= 14, & \int_{-2}^{-1} (x+2) dx &= \frac{1}{2}, \\ \int_{-1}^0 2 dx &= 2, & \int_0^2 (x^2+3) dx &= \frac{26}{3}, \end{aligned}$$

wobec tego z (41), (42) otrzymujemy

$$C = \frac{17}{6}.$$

Całkę (40) można również obliczyć stosując twierdzenie 12. Funkcja $f(x) = x$ jest ciągła, natomiast g jest funkcją kawałkami gładką w przedziale $[-2, 2]$ mającą skok w punktach

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 0,$$

przy tym

$$\sigma_g(c_1) = \sigma_g(c_2) = 1.$$

Zgodnie ze wzorem (33)

$$C = \int_{-2}^2 xg'(x) dx - 1$$

przy czym pochodna $g'(x)$ nie jest określona w punktach skoku, a dla pozostałych x

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -2 \leq x < -1, \\ 0 & \text{dla } -1 < x < 0, \\ 2x & \text{dla } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Wobec tego

$$\int_{-2}^2 xg'(x) dx = \int_{-2}^{-1} x dx + 2 \int_0^2 x^2 dx = \frac{23}{6},$$

skąd po prostych rachunkach otrzymujemy poprzednio otrzymany wynik

$$C = \frac{17}{6}.$$

6. Monotoniczność całki Riemanna - Stieltjesa. W przypadku całki Riemanna monotoniczność całki oznacza, że z nierówności

$$(43) \quad f_1(x) \leq f_2(x) \quad (x \in [a, b])$$

wynika

$$(44) \quad \int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

(por. twierdzenie 4 §1 i twierdzenie 16 §5). Jeżeli obie funkcje są ciągłe i nieujemne w przedziale $[a, b]$, to nierówność (44) ma oczywisty sens geometryczny: pole zawarte między osią x -ów i wykresem większej funkcji jest większe. Udowodnimy, że przy pewnych założeniach całka Riemanna - Stieltjesa ma podobną własność.

Twierdzenie 13. *Zakładamy, że*

A.) *funkcje f_1, f_2 spełniają nierówność (43), funkcja g jest rosnąca w przedziale $[a, b]$,*

B.) *spełniony jest jeden z warunków:*

(i) *funkcje f_1, f_2 są ciągłe w $[a, b]$*

lub

(ii) *jedna z funkcji f_j ($j = 1, 2$) nie jest ciągła ale ma skończone wahanie, lub obie funkcje f_1, f_2 mają tę własność - wówczas założymy dodatkowo ciągłość funkcji g .*

Przy podanych założeniach zachodzi nierówność

$$(45) \quad \int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg.$$

DOWÓD. Obie całki istnieją i są granicami sum przybliżonych zgodnie z twierdzeniem 6. Ponieważ dla dowolnego podziału Π określonego nierównościami (1) mamy $\Delta g_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$), z nierówności (43) wynika

$$S(f_1, g, \Pi, \xi(\Pi)) \leq S(f_2, g, \Pi, \xi(\Pi)),$$

dla każdego układu punktów pośrednich $\xi(\Pi)$. Stąd, jeżeli $\{\Pi_n\}$ jest ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, to

$$S(f_1, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) \leq S(f_2, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n))$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Przejście do granicy przy $n \rightarrow \infty$ w oparciu o (10) daje nierówność (45). \square

Założenie, że całkujemy względem funkcji g rosnącej jest istotne, jak wskazuje

Przykład 7. Niech

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 1 & \text{dla } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

i niech

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 \quad (x \in [0, 1]).$$

Funkcja g jest kawałkami stała, więc obie całki wyrażają się jako sumy skończone zgodnie ze wzorem (39). Mamy

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad \sigma_g(c_1) = -1, \quad \sigma_g(c_2) = 1,$$

stąd

$$\int_0^1 f_1 dg = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 f_2 dg = -1 + 1 = 0.$$

Zatem

$$\int_0^1 f_1 dg > \int_0^1 f_2 dg$$

pomimo, że funkcje f_1, f_2 spełniają (43) w przedziale $[0, 1]$. Oczywiście funkcja g nie jest rosnąca w tym przedziale.

Z udowodnionego twierdzenia wynika łatwo

Twierdzenie 14. *Zakładamy, że funkcja g jest rosnąca w przedziale $[a, b]$ i że spełniony jest jeden z warunków*

(i) *f jest ciągła w $[a, b]$*

lub

(ii) *f ma skończone wahanie, g jest ciągła w $[a, b]$.*

Wówczas

$$(46) \quad \left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg.$$

DOWÓD. Z twierdzenia 7 §6 wynika, że jeżeli funkcja f ma skończone wahanie, to tą samą własność ma $|f|$. Ponieważ

$$f(x) \leq |f(x)|, \quad -f(x) \leq |f(x)| \quad (x \in [a, b])$$

przyjmując w twierdzeniu 13 $f_1 = f$ lub $f_1 = -f$, $f_2 = |f|$ otrzymujemy

$$(47) \quad \int_a^b f dg \leq \int_a^b |f| dg$$

oraz (w oparciu o twierdzenie 7)

$$(48) \quad \int_a^b (-f) dg = - \int_a^b f dg \leq \int_a^b |f| dg.$$

Nierówności (47), (48) dają (46). □

Bez założenia, że funkcja g jest rosnąca, możemy uzyskać jedynie słabsze

Twierdzenie 15. Załóżmy, że funkcje f, g spełniają jeden z warunków podanych w twierdzeniu 6. Wówczas z nierówności

$$(49) \quad |f(x)| \leq M \quad (x \in [a, b])$$

wynika

$$(50) \quad \left| \int_a^b f dg \right| \leq MW_a^b(g).$$

DOWÓD. Dla dowolnego podziału Π przedziału $[a, b]$ nierówność (49) pociąga za sobą

$$\left| S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) \right| \leq MV(\Pi, g)$$

skąd

$$(51) \quad \left| S(f, g, \Pi, \xi(\Pi)) \right| \leq MW_a^b(g).$$

Obierając ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i punkty $\xi(\Pi_n)$ dostajemy z (51)

$$\left| S(f, g, \Pi_n, \xi(\Pi_n)) \right| \leq MW_a^b(g)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd po przejściu do granicy zgodnie z (10) otrzymujemy (50). \square

Zadania.

1. Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa

$$A = \int_0^1 x^2 dx^2, \quad B = \int_0^1 x dx^3$$

dwoma sposobami:

a.) stosując twierdzenie 11,

b.) znajdując granicę ciągu sum przybliżonych i opierając się na twierdzeniu 6.

Wskazówka. W punkcie b.) skonstruować sumę przybliżoną S_n dzieląc przedział całkowania na n równych części. Następnie zastosować twierdzenie Stolz (twierdzenie 11 rozdz.II §2).

2. Obliczyć następujące całki Riemanna - Stieltjesa sprowadzając je do całki Riemanna:

$$(i) \int_0^2 x^2 d \log(1+x), \quad (ii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x, \quad (iii) \int_{-1}^1 x d \operatorname{arctg} x.$$

3. Niech

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x = -1, \\ 1 & \text{dla } -1 < x \leq 0, \\ 3 & \text{dla } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa

$$\int_{-1}^1 x dg(x), \quad \int_{-1}^1 x^3 dg(x)$$

dwoma sposobami:

a.) opierając się na twierdzeniu 12,

b.) stosując całkowanie przez części i sprowadzając przekształconą całkę do całki Riemanna. Sprawdzić, że obie całki spełniają nierówność (50).

4. Niech

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } -2 \leq x \leq -1, \\ 2 & \text{dla } -1 < x < 0, \\ x^2 + 3 & \text{dla } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{-2}^2 \sqrt{|x|} dg(x), & \text{(ii)} \quad & \int_{-2}^2 \sin \frac{\pi x}{2} dg(x), \\ \text{(iii)} \quad & \int_{-2}^2 f(x) dg(x) \quad \text{gdzie} \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } -2 \leq x \leq 0, \\ x^2 & \text{dla } 0 < x \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa stosując odpowiednie podstawienie (por. twierdzenie 10):

$$\begin{aligned} \text{a.)} \quad & \int_0^1 (1 + e^x) de^{3x}, & \text{b.)} \quad & \int_0^\pi \sin^2 x d \cos x, \\ \text{c.)} \quad & \int_{-1}^1 f(x) de^x \quad \text{gdzie} \quad f(x) = \begin{cases} 1 + e^{2x} & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - e^x & \text{dla } 0 < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Załóżmy, że

a.) f jest funkcją ograniczoną, g funkcją stałą

lub

b.) f jest funkcją ciągłą, $g(x) = c$ poza skończoną ilością punktów leżących w przedziale otwartym (a, b) . Udowodnić, że

$$\int_a^b f dg = 0.$$

7. Okazać, że dla dowolnej funkcji g o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$$

8. Załóżmy, że

(i) f jest funkcją ograniczoną w przedziale $[a, b]$, ciągłą w tym przedziale poza skończoną ilością punktów $c_j \in (a, b)$ ($j = 1, \dots, p$),

(ii) α jest funkcją rosnącą w przedziale $[a, b]$, ciągłą w punktach c_j .

Udowodnić, że f jest całkowna względem α na przedziale $[a, b]$.

Wskazówka. Zacząć od przypadku $p = 1$ i zmodyfikować dowód twierdzenia 6 §5.

9. Zbadać istnienie całki

$$\int_{-1}^1 f d\alpha,$$

jeżeli

$$\text{a.) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{b.) } f(x) \text{ jak w punkcie a.),} \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ x+1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{c.) } f(x) = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Wynik porównać z twierdzeniami 3,4. Czy w podanych przykładach całki górna i dolna spełniają relację sformułowaną w twierdzeniu 1?

10. Uogólnić twierdzenia 9 - 12 §5 na przypadek całki Riemanna - Stieltjesa względem dowolnej funkcji rosnącej α .

11. Niech

$$\text{a.) } g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

$$f_1(x) = 0 \leq f_2(x) = \sin x \leq f_3(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [0, \pi],$$

$$\text{b.) } g(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \\ -2\cos x - 1 & \text{dla } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

$$f_1(x) = 0 < f_2(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [0, \pi].$$

Jakie nierówności zachodzą między całkami $\int_0^\pi f_j dg$? Wynik porównać z twierdzeniem 13.

12. Niech g będzie funkcją klasy C^1 w przedziale $[0, 1]$ taką, że 1^0 pochodna g' jest funkcją liniową w każdym z przedziałów

$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad \left[\frac{3}{4}, 1\right],$$

$$2^0 \quad g'(0) = 0 = g'\left(\frac{1}{2}\right) = g'(1) = 0, \quad g'\left(\frac{1}{4}\right) = 2, \quad g'\left(\frac{3}{4}\right) = -4.$$

Przyjmując

$$f_1(x) = 0 < f_2(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [0, 1]$$

sprawdzić, że

$$(52) \quad \int_0^1 f_2 dg < \int_0^1 f_1 dg.$$

Dlaczego twierdzenie 13 nie zachodzi w tym przypadku?

Wskazówka. Całkę po lewej stronie (52) można obliczyć posługując się rysunkiem.

13. Przyjmijmy

$$f(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [0, 1]$$

i niech g będzie funkcją określoną w zadaniu 12. Sprawdzić, że nierówność (46) nie zachodzi. Które z założeń twierdzenia 14 nie jest spełnione?

14. Zakładając, że funkcje f, g spełniają jedno z założeń twierdzenia 6 udowodnić nierówność

$$(53) \quad \left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dv,$$

gdzie

$$v(x) = W_a^x(g).$$

Jaką postać przyjmuje nierówność (53) gdy $g(x) = x$?

Wskazówka. Najpierw udowodnić nierówność dla sum przybliżonych, następnie przejść do granicy opierając się na wzorze (10).

15. Okazać, że z nierówności (53) wynika nierówność (50).

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 13.

16. *Momentem statycznym* względem punktu q układu punktów materialnych p_1, \dots, p_s o masach m_1, \dots, m_s nazywamy sumę

$$M = \sum_{j=1}^s m_j r_j,$$

gdzie r_j jest odległością punktu p_j od q . Niech $F(x)$ oznacza masę rozłożoną na odcinku $[a, x]$ osi x -ów ($0 < a \leq x \leq b$), przy czym funkcja F ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$. Uzasadnić, że całkę Riemanna - Stieltjesa

$$M(F) = \int_a^b x dF$$

można uważać za moment statyczny względem początku układu współrzędnych masy rozłożonej na przedziale $[a, b]$.

Wskazówka. Rozważając podział Π określony nierównościami (1) potraktować odcinek $[a, b]$ jako układ punktów materialnych. Następnie wprowadzić ciąg normalny podziałów i przejść do granicy opierając się na twierdzeniu 6.

17. Przyjmując oznaczenia zadania 16 *momentem bezwładności* względem punktu q układu punktów materialnych p_1, \dots, p_s nazwiemy sumę

$$Q = \sum_{j=1}^s m_j r_j^2.$$

Uzasadnić, że w przypadku masy rozłożonej na odcinku $[a, b]$ osi x -ów całkę Riemanna - Stieltjesa

$$Q(F) = \int_a^b x^2 dF$$

można uważać za moment bezwładności tej masy względem początku układu współrzędnych.

Wskazówka - jak w zadaniu 16.

18. Znaleźć funkcję F (zadania 16, 17) i momenty statyczny oraz bezwładności względem początku układu masy rozłożonej na odcinku $[a, b]$ ($0 < a < b$), jeżeli

- (i) masa jest rozłożona w sposób ciągły ze stałą gęstością liniową,
- (ii) w punktach

$$a = c_0 < c_1 < c_2, \dots < c_s = b$$

skupione są masy m_0, m_1, \dots, m_s .

19. Niech f będzie funkcją ciągłą nieujemną zaś g funkcją ściśle rosnącą w przedziale $[a, b]$. Przez krzywą K rozumiemy zbiór punktów (x, y) spełniających warunki

- (i) $x = g(t_0), y = f(t_0)$, gdy g jest ciągła w t_0 ,
- (ii) $x \in (g_-(t_0), g_+(t_0))$, $y = f(t_0)$, gdy g nie jest ciągła w t_0

(oznaczamy

$$g_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} g(t), \quad g_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} g(t).)$$

Uzasadnić, że

- 1⁰ obie granice $g_-(t_0)$, $g_+(t_0)$ istnieją,
 2⁰ całka Riemanna - Stieltjesa

$$\int_a^b f(t) dg(t)$$

może być uważana za miarę pola zawartego między krzywą K a osią x -ów.

Wskazówka. W punkcie 1⁰ oprzeć się na twierdzeniu o zbieżności monotonicznej (rozd. III §2 punkt 6). W punkcie 2⁰ podać najpierw sens geometryczny sumy przybliżonej, następnie skorzystać z twierdzenia 6.

20. Obliczyć całki Riemanna - Stieltjesa i podać ich sens geometryczny opierając się na zadaniu 19:

- a.) $\int_0^2 t dg$ gdzie $g(t) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 \leq t \leq 1, \\ 2t & \text{dla } 1 < t \leq 2, \end{cases}$
- b.) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t d \sin t,$
- c.) $\int_{-1}^1 t^2 dg$ gdzie $g(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{dla } -1 \leq t < 0, \\ 1 & \text{dla } t = 0, \\ 2 + t^2 & \text{dla } 0 < t \leq 1. \end{cases}$

21. Zakładamy, że

- 1⁰ $\{c_0 = b, c_1, c_2, \dots\}$ jest ciągiem ściśle malejącym zbieżnym do a ($a < b$),
 2⁰ funkcja g jest określona w przedziale $[a, b]$, przy czym istnieją stałe h_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) takie, że

$$g(x) = h_n \quad \text{dla } x \in (c_{n+1}, c_n],$$

3⁰ funkcja f jest ciągła w $[a, b]$,

4⁰ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \quad \text{gdzie } \sigma_n = h_{n-1} - h_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Przyjmując

$$\sigma_0 = g(b) - g(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

okazać, że

$$(54) \quad \int_a^b f dg = f(a)\sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f(c_n)\sigma_n.$$

Wskazówka. Istnienie całki wynika z punktu (ii) zadania 12 §6. Aby udowodnić równość (54) przedstawiamy funkcję g w postaci

$$g = g_1 + g^*,$$

gdzie

$$g^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < x \leq b, \\ -\sigma_0 & \text{dla } x = a, \end{cases}$$

co daje

$$(55) \quad \int_a^b f dg = \int_a^{c_n} f dg_1 + \int_{c_n}^b f dg + \int_a^{c_n} f dg^*$$

przy dowolnie ustalonym n . Dwie ostatnie całki po prawej stronie (55) możemy obliczyć stosując twierdzenie 12, zaś pierwszą całkę szacujemy opierając się na twierdzeniu 15 i zadaniu 12 §6 punkt (ii). Po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy (54).

22. Załóżmy, że

- 1^o $\{c_0 = b, c_1, c_2, \dots\}$ jest ciągiem ściśle malejącym zbieżnym do a ($a < b$);
- 2^o funkcje f jest ciągła w przedziale $[a, b]$;
- 3^o funkcja g spełnia warunki

$$g(x) = h_n(x) \quad \text{dla } x \in (c_{n+1}, c_n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gdzie h_n jest funkcją klasy C^1 w przedziale $[c_{n+1}, c_n]$;

4^o pochodne h'_n są wspólnie ograniczone tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$|h'_n(x)| \leq M \quad \text{dla } x \in (c_{n+1}, c_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

5^o szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \quad \text{gdzie } \sigma_n = h_{n-1}(c_n) - h_n(c_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Wówczas

$$(56) \quad \int_a^b f dg = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{c_{n+1}}^{c_n} f(x) h'_n(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} f(c_n) \sigma_n.$$

Wskazówka. Niech

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Przyjmując

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \rho(x - c_j) \quad \text{dla } a < x \leq b, \quad g_1(a) = 0$$

okazać najpierw, że funkcja g_1 spełnia warunki nałożone na funkcję g w zadaniu 21 zaś funkcja

$$g_2(x) = g(x) - g_1(x)$$

jest ciągła. Z zadań 12, 13 §6 wynika, że obie funkcje g_1 , g_2 (a więc i funkcja g) mają skończone wahanie na przedziale $[a, b]$. Zgodnie z twierdzeniem 7

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2.$$

Do obliczenia pierwszej całki po prawej stronie stosujemy wzór (54). Przedstawiając drugą całkę w postaci

$$\int_a^b f dg_2 = I_\alpha + K_\alpha,$$

gdzie

$$I_\alpha = \int_a^{a+\alpha} dg_2, \quad K_\alpha = \int_{a+\alpha}^b f dg_2 \quad (0 < \alpha < b - a)$$

dowodzimy w oparciu o zadanie 13 §6 i oszacowanie (5), że

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_\alpha = 0,$$

skąd wynika istnienie granicy

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} K_\alpha$$

oraz równość

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} K_\alpha = \int_a^b f dg_2.$$

Pozostaje do wykazania, że granica ta daje się przedstawić jako suma pierwszego z szeregów po prawej stronie (56).

§8. Całki zależne od parametru.

1. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych. W poprzednich rozdziałach rozważaliśmy wyłącznie funkcje jednej zmiennej, określone zazwyczaj na pewnym przedziale osi x -ów (por. rozdz. II §1 punkt 1). Sytuację tą łatwo przenieść na przypadek funkcji dwóch, trzech lub większej ilości zmiennych.

Jak wiemy (por. rozdz. III §1 punkt 1), układ dwóch liczb (x, y) możemy utożsamiać z punktem płaszczyzny \mathbb{R}^2 tj. płaszczyzny, w której wprowadzono prostokątny układ współrzędnych. Będziemy mówili, że na zbiorze $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ została określona funkcja dwóch zmiennych f , jeżeli każdemu punktowi $(x, y) \in \mathbb{D}$ została przyporządkowana liczba rzeczywista $z = f(x, y)$.

Rozumując podobnie, jak w punkcie 1 rozdz. III §1, łatwo wykazać, że po wprowadzeniu w przestrzeni prostokątnego układu współrzędnych możemy każdy punkt P przestrzeni utożsamiać z trójką liczb (x, y, z) - liczby te nazywamy *współrzędnymi prostokątnymi* punktu P . Przestrzeń z wprowadzonym prostokątnym układem współrzędnych oznaczamy przez \mathbb{R}^3 . Mówimy, że na zbiorze $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ została określona funkcja trzech zmiennych f , jeżeli każdemu punktowi $(x, y, z) \in \mathbb{D}$ została przyporządkowana liczba rzeczywista $u = f(x, y, z)$.

Uogólniając nasze rozważania możemy wprowadzić zbiór wszystkich układów n liczb rzeczywistych (x_1, x_2, \dots, x_n) , który oznaczmy przez \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) - przypadek $n > 3$ nie jest niestety dostępny naszej wyobraźni przestrzennej. Mówimy, że na zbiorze $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ została określona funkcja n zmiennych f , jeżeli każdemu punktowi $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{D}$ została przyporządkowana liczba rzeczywista $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dla ustalenia uwagi będziemy rozważali funkcję dwóch zmiennych $f(x, y)$. Załóżmy, że jest ona określona w prostokącie płaszczyzny \mathbb{R}^2 zdefiniowanym nierównościami

$$|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \beta.$$

Mówimy, że *funkcja f ma granicę g przy $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$* , jeżeli dla dowolnego ciągu punktów płaszczyzny \mathbb{R}^2 spełniającego warunki

- (i) $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ dla $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$

zachodzi

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = g.$$

Zapisujemy

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = g.$$

Jak Czytelnik na pewno zauważył, definicja ta jest podobna do podanej w §2 rozdz. II definicji granicy funkcji jednej zmiennej. Łatwo udowodnić jej równoważną postać, zachodzi mianowicie

Twierdzenie 1. *Równość (1) jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, że dla x, y spełniających warunek*

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

mamy

$$|f(x, y) - g| < \varepsilon.$$

DOWÓD przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 4 §2 rozdz.III i pozostawiamy go Czytelnikowi. \square

Mówimy, że *funkcja f jest ciągła w punkcie (x_0, y_0)* , jeżeli spełnione są warunki 1^o istnieje granica

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = g$$

oraz

2^o zachodzi równość

$$f(x_0, y_0) = g.$$

Z podanych definicji wynika natychmiast

Twierdzenie 2. *Funkcja f jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych ciągów $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$$

\square

W oparciu o twierdzenie 1 otrzymujemy

Twierdzenie 3. *Funkcja f jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla x, y spełniających nierówności*

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

było

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

\square

Niech teraz f będzie funkcją określoną w prostokącie

$$(2) \quad \mathbb{P} : \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Mówimy, że *f jest ciągła w prostokącie \mathbb{P}* jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $(x_0, y_0) \in \mathbb{P}$ (w przypadku, gdy punkt (x_0, y_0) leży na brzegu prostokąta, zakładamy, że liczby x_n, y_n, x, y o których mowa w twierdzeniach 2, 3 spełniają nierówności (2)). Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, dowodzi się, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz o mianowniku różnym od zera funkcji ciągłych dwóch zmiennych jest również funkcją

ciągłą. Z podanych definicji łatwo wynika, że jeżeli $g(t)$ jest funkcją jednej zmiennej ciągłą w punkcie t_0 , to funkcja

$$f_1(x, y) = g(x)$$

jest ciągłą w każdym punkcie (t_0, y) zaś funkcja

$$f_2(x, y) = g(y)$$

ciągłą w każdym punkcie (x, t_0) .

Przykład 1. Zbadamy ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \sin x + \sin y \quad \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 1.$$

Poza początkiem układu współrzędnych funkcja f jest ciągłą jako suma funkcji ciągłych jednej zmiennej. Natomiast

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \neq f(0, 0)$$

więc funkcja f nie jest ciągłą w punkcie $(0, 0)$.

Przykład 2. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Poza punktem $(0, 0)$ funkcja f jest ciągłą jako iloraz wielomianów o mianowniku różnym od zera. Aby zbadać jej zachowanie w początku układu zauważmy, że funkcja f jest stała na każdej prostej o równaniu $y = kx$, bowiem

$$f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2}.$$

Wobec tego przyjmując

$$y_n = kx_n,$$

gdzie $\{x_n\}$ jest dowolnym ciągiem zbieżnym do zera o wyrazach różnych od zera, dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{k}{1+k^2},$$

a więc wartość zależną od sposobu w jaki obieramy ciąg (x_n, y_n) . Widać stąd, że nie istnieje granica

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y),$$

zatem funkcja f nie może być ciągłą w punkcie $(0, 0)$ niezależnie od tego, jak określimy jej wartość w tym punkcie.

Sformułujemy teraz

Twierdzenie 4. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w prostokącie \mathbb{P} określonym nierównościami (2), to do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla dowolnych x', x'', y', y'' spełniających (2) z warunków*

$$|x' - x''| < \delta, \quad |y' - y''| < \delta$$

wynikało, że

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Twierdzenie to mówi, że jeżeli punkty (x', y') i (x'', y'') leżą blisko siebie, to niezależnie od ich położenia w prostokącie \mathbb{P} wartości funkcji w tych punktach mało się różnią. Taką własność funkcji ciągłej nazywamy *jednostajną ciągłością* (liczba δ jest dobrana tylko do ε , nie zależy zaś od punktów (x', y') , (x'', y'')).

DOWÓD przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 9 rozdz. III §3. Proponujemy by Czytelnik przeprowadził go samodzielnie jako ćwiczenie. \square

Opierając się na twierdzeniu 4 udowodnimy

Twierdzenie 5. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w prostokącie \mathbb{P} określonym nierównościami (2), to jest ona ograniczona w tym prostokącie tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że*

$$(3) \quad |f(x, y)| \leq M \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \mathbb{P}.$$

DOWÓD. Przyjmując $\varepsilon = 1$ w twierdzeniu 4 możemy dobrać $\delta > 0$ tak, by dla

$$|x' - x''| < \delta, \quad |y' - y''| < \delta$$

zachodziła nierówność

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < 1.$$

Obierzmy liczbę naturalną n tak dużą, by

$$\max\left(\frac{b-a}{n}, \frac{d-c}{n}\right) < \delta$$

i podzielmy przedziały $[a, b]$ i $[c, d]$ na n równych części przy pomocy punktów

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Prowadząc przez punkty podziału proste równoległe do osi układu dzielimy prostokąt \mathbb{P} na n^2 prostokątów o długości boku $< \delta$. Niech $\mathbb{P}_{r,s}$ oznacza prostokąt określony nierównościami

$$x_{r-1} \leq x \leq x_r, \quad y_{s-1} \leq y \leq y_s \quad (r, s = 1, \dots, n),$$

wówczas

$$(4) \quad |f(x, y) - f(x_r, y_s)| < 1 \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \mathbb{P}_{r,s}$$

i stąd

$$|f(x, y)| < 1 + |f(x_r, y_r)| \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \mathbb{P}_{r,s}, \quad (r, s = 1, \dots, n).$$

Zatem nierówność (3) będzie spełniona w całym prostokącie \mathbb{P} , jeżeli przyjmiemy

$$M = \max_{r,s} |f(x_r, y_s)|.$$

□

Wszystkie rozważania tego punktu przenoszą się łatwo na przypadek funkcji trzech lub większej ilości zmiennych.

2. Ciągłość całki oznaczonej względem parametru. Będziemy rozważać funkcję $f(x, y)$ ciągłą w prostokącie \mathbb{P} określonym nierównościami (2) i całkę oznaczoną

$$(5) \quad g(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (c \leq y \leq d)$$

Z twierzeń 2, 3 wynika natychmiast, że przy dowolnie ustalonym $y = \bar{y} \in [c, d]$ funkcja jednej zmiennej $f(x, \bar{y})$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$. Zatem całka (5) istnieje, przy czym oczywiście jej wartość zależy od parametru y . Udowodnimy

Twierdzenie 6. *Funkcja g jest ciągła w przedziale $[c, d]$.*

DOWÓD. Ustalając $y_0 \in [c, d]$ mamy

$$(6) \quad |g(y) - g(y_0)| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx.$$

Na podstawie twierdzenia 4 można do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla wszystkich $x \in [a, b]$ i wszystkich y spełniających warunek

$$(7) \quad |y - y_0| < \delta$$

zachodziła nierówność

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Wówczas z (6) otrzymujemy dla y spełniających (7) (por. Wniosek 1 §1)

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

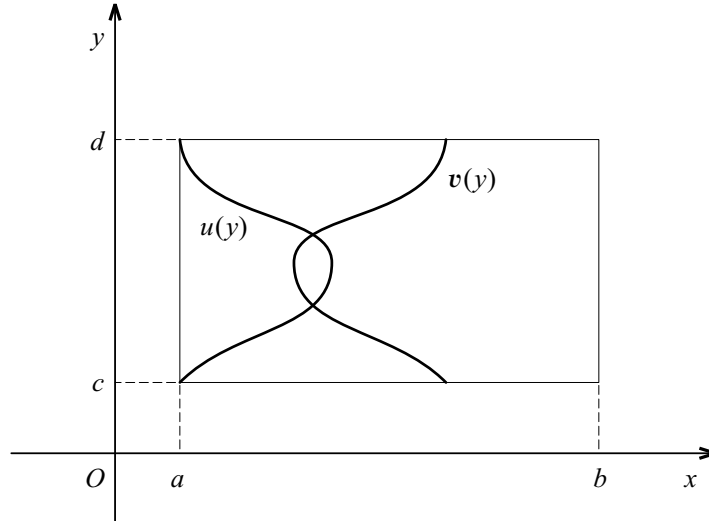
a to oznacza ciągłość funkcji g w punkcie y_0 . □

Twierdzenie to można uogólnić na przypadek, gdy również granice całkowania zależą od parametru. Niech $u(y)$, $v(y)$ będą funkcjami spełniającymi warunki

$$a \leq u(y) \leq b, \quad a \leq v(y) \leq b \quad \text{dla} \quad y \in [c, d]$$

(por. rys. 85) i niech

$$h(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx.$$



[rys. 85]

Zachodzi

Twierdzenie 7. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w prostokącie \mathbb{P} i funkcje u, v są ciągłe w przedziale $[c, d]$, to funkcja h też jest ciągła w przedziale $[c, d]$.*

DOWÓD. Dla dowolnie ustalonego $y_0 \in [c, d]$ mamy

$$h(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x, y) dx + \int_{u(y)}^{u(y_0)} f(x, y) dx + \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y) dx$$

oraz

$$h(y_0) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x, y_0) dx,$$

skąd

$$(8) \quad h(y) - h(y_0) = A(y) + B(y) + C(y),$$

gdzie

$$A(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx,$$

$$B(y) = \int_{u(y)}^{u(y_0)} f(x, y) dx, \quad C(y) = \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y) dx.$$

Całki $B(y)$, $C(y)$ szacujemy w oparciu o twierdzenie 5, co daje

$$(9) \quad |B(y)| \leq M|u(y) - u(y_0)|, \quad |C(y)| \leq M|v(y) - v(y_0)|.$$

Wobec ciągłości funkcji u , v możemy do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ dobrać liczbę $\delta_1 > 0$ tak, by zachodziły nierówności

$$(10) \quad |u(y) - u(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad |v(y) - v(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

dla $|y - y_0| < \delta_1$. Stosując do całki $A(y)$ rozumowanie przeprowadzone w dowodzie twierdzenia 6 dostajemy

$$(11) \quad |A(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

dla $|y - y_0| < \delta_2$. Wobec tego z (8) - (11) wynika, że

$$|h(y) - h(y_0)| < \varepsilon$$

dla $|y - y_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ - a to oznacza ciągłość funkcji h w punkcie y_0 . \square

Przykład 3. Niech

$$g(y) = \int_0^\pi \cos(x + y) dx.$$

Funkcja podcałkowa jest ciągłą funkcją zmiennych x , y w prostokącie

$$0 \leq x \leq \pi, \quad c \leq y \leq d$$

przy dowolnych c, d , zatem zgodnie z twierdzeniem 6 funkcja g jest ciągła w przedziale $[c, d]$. Zauważmy, że całka daje się wyrazić przez funkcje elementarne, mianowicie

$$g(y) = \left[\sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=\pi} = \sin(\pi + y) - \sin y,$$

czyli po zastosowaniu znanego wzoru trygonometrycznego

$$g(y) = -2 \sin y.$$

Ciągłość funkcji g możemy więc również stwierdzić bezpośrednio, nie korzystając z ogólnego twierdzenia.

Przykład 4. Niech

$$h(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} (2xy) dx$$

i niech

$$\mathbb{P} : -1 \leq x \leq 1, \quad c \leq y \leq d,$$

gdzie c, d są dowolnie obrane. Ponieważ

$$-1 \leq \sin y \leq 1, \quad -1 \leq \cos y \leq 1$$

i przy tym funkcja podcałkowa jest ciągła w prostokącie \mathbb{P} a granice całkowania są funkcjami ciągłymi w przedziale $[c, d]$, spełnione są założenia twierdzenia 7, zatem funkcja h jest ciągła w przedziale $[c, d]$. Całkę określającą funkcję h można łatwo wyrazić przez funkcje elementarne. po scałkowaniu mamy

$$h(y) = \left[x^2 y \right]_{x=\sin y}^{x=\cos y} = y(\cos^2 y - \sin^2 y),$$

czyli

$$h(y) = y \cos 2y.$$

Oczywiście jest to funkcja ciągła w każdym przedziale $[c, d]$ na osi y -ów.

3. Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych. Niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną w prostokącie

$$|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \beta.$$

Pochodną cząstkową względem x funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy granicę

$$(12) \quad f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Analogicznie *pochodną cząstkową względem y funkcji f w punkcie (x_0, y_0) definiujemy jako granicę*

$$(13) \quad f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Używane są oznaczenia

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

lub krócej

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Jeżeli funkcja f jest określona w prostokącie \mathbb{P} określonym nierównościami (2) i punkt (x_0, y_0) leży na brzegu tego prostokąta, to definicje (12), (13) pozostają w mocy; zakładamy jedynie, że punkty $(x_0 + h, y_0)$ oraz $(x_0, y_0 + k)$ należą do \mathbb{P} .

Z podanych definicji widać, że pochodna cząstkowa jest pochodną w sensie określonym w rozdz. III §4 z tym, że drugiej zmiennej nadajemy ustaloną wartość.

Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, można wprowadzić dla funkcji dwóch zmiennych pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Przyjmujemy

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right),$$

(oczywiście w podanych wzorach można zamienić role zmiennych x, y). Używane są oznaczenia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Analogicznie określamy pochodne cząstkowe funkcji trzech i większej ilości zmiennych. Do obliczania pochodnych cząstkowych stosują się wzory rachunkowe podane w rozdz. III §4, przy czym pozostałe zmienne traktujemy jako stałe.

Przykład 5. Niech

$$f(x, y) = \sin(x - y).$$

Aby znaleźć pochodną f_x traktujemy y jako stałą i stosujemy regułę różniczkowania funkcji złożonej jednej zmiennej. Otrzymujemy

$$f_x(x, y) = \cos(x - y).$$

Analogicznie, dla obliczenia pochodnej f_y traktujemy x jako stałą i również stosujemy regułę różniczkowania funkcji złożonej jednej zmiennej. Dostajemy

$$f_y(x, y) = -\cos(x - y).$$

Przykład 6. Przyjmując

$$g(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

znaleźć pochodne funkcji g w punkcie $(0, \pi)$. Zaczniemy od obliczenia pochodnych cząstkowych w dowolnym punkcie (x, y) . Stosując znane reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej dostajemy

$$g_x(x, y) = \frac{1}{y \cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$$

(y traktujemy jako stałą) oraz

$$g_y(x, y) = \frac{-x}{y^2 \cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$$

(x traktujemy jako stałą). Stąd podstawiając otrzymujemy

$$g_x(0, \pi) = \frac{1}{\pi}, \quad g_y(0, \pi) = 0.$$

Przykład 7. Wróćmy do funkcji f rozważanej w Przykładzie 2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } x = y = 0. \end{cases}$$

Znajdziemy jej pochodne cząstkowe. Poza początkiem układu współrzędnych stosujemy znane reguły różniczkowania traktując drugą zmienną jako stałą. Otrzymujemy

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

oraz

$$f_y(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

- zauważmy, że

$$f(x, y) = f(y, x),$$

wobec tego pochodną f_y można otrzymać zamieniając role zmiennych x, y w wyrażeniu f_x .

Aby obliczyć pochodne w początku układu posłużymy się definicją. Mamy

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 = \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k},$$

skąd po przejściu do granicy przy $h \rightarrow 0$ względnie $k \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

Zauważmy, że funkcja f ma w początku układu obie pochodne cząstkowe, ale nie jest w tym punkcie ciągła - sytuacja odmienna niż w przypadku funkcji jednej zmiennej!

W dalszym ciągu będzie nam potrzebne twierdzenie o różniczkowaniu funkcji złożonej.

Twierdzenie 8. Załóżmy, że

(i) funkcja $F(u, v)$ jest określona w prostokącie

$$Q: \quad A \leq u \leq B, \quad C \leq v \leq D$$

i ma w każdym punkcie $(u_0, v_0) \in Q$ pochodne cząstkowe $F_u(u_0, v_0)$, $F_v(u_0, v_0)$;

(ii) pochodne F_u, F_v są ciągłe w Q ;

(iii) funkcje $u(y)$, $v(y)$ są różniczkowalne w przedziale $[c, d]$ i spełniają nierówności

$$A \leq u(y) \leq B, \quad C \leq v(y) \leq D \quad \text{dla } y \in [c, d].$$

Wówczas funkcja złożona

$$G(y) = F(u(y), v(y))$$

jest różniczkowalna w przedziale $[c, d]$ i dla dowolnego $y_0 \in [c, d]$ zachodzi równość

$$(14) \quad G'(y_0) = F_u(u(y_0), v(y_0))u'(y_0) + F_v(u(y_0), v(y_0))v'(y_0).$$

DOWÓD. Dla ustalonego $y_0 \in [c, d]$ mamy

$$\begin{aligned} G(y_0 + h) - G(y_0) = & \\ & \left[F(u(y_0 + h), v(y_0 + h)) - F(u(y_0 + h), v(y_0)) \right] + \\ & \left[F(u(y_0 + h), v(y_0)) - F(u(y_0), v(y_0)) \right]. \end{aligned}$$

Do każdej z różnic po prawej stronie można zastosować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (twierdzenie 11 rozdz. III §4), zatem iloraz różnicowy funkcji G daje się przedstawić w postaci

$$(15) \quad \frac{G(y_0 + h) - G(y_0)}{h} = \frac{v(y_0 + h) - v(y_0)}{h} F_v(u(y_0 + h), \bar{v}(h)) + \frac{u(y_0 + h) - u(y_0)}{h} F_u(\bar{u}(h), v(y_0)),$$

gdzie

$\bar{v}(h)$ leży między liczbami $v(y_0)$, $v(y_0 + h)$

oraz

$\bar{u}(h)$ leży między liczbami $u(y_0)$, $u(y_0 + h)$.

Z ciągłości funkcji $u(y)$, $v(y)$ wynika, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{u}(h) = u(y_0), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \bar{v}(h) = v(y_0),$$

wobec tego przechodząc w (15) do granicy przy $h \rightarrow 0$ i korzystając z ciągłości pochodnych cząstkowych funkcji F dostajemy (14). \square

Wzór (14) można zapisać w postaci

$$(14') \quad \frac{dG}{dy} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{dy}$$

lub krócej

$$(14'') \quad G' = F_u u' + F_v v'.$$

Czytelnik na pewno zauważy analogię ze wzorem na pochodną funkcji złożonej jednej zmiennej (rozd. III §4). Udowodnione twierdzenie daje się łatwo przenieść na przypadek, gdy F jest funkcją trzech lub więcej zmiennych.

Przykład 8. Niech

$$F(u, v) = u^2 + v^2, \quad u(y) = \sin y, \quad v(y) = \cos y.$$

Mamy

$$F_u = 2u, \quad F_v = 2v,$$

zatem założenia (i), (ii) twierdzenia 8 są spełnione w dowolnym prostokącie Q . Ze względu na nierówność

$$-1 \leq u(y) \leq 1, \quad -1 \leq v(y) \leq 1$$

wystarczy założyć, że

$$B, D \geq 1 \quad \text{oraz} \quad A, C \leq -1.$$

Założenie (iii) jest spełnione przy dowolnie obranych c, d . Zgodnie ze wzorem (14'')

$$g' = F_u u' + F_v v' = (2u) \cos y - (2v) \sin y,$$

czyli po przejściu do zmiennej y

$$G'(y) = 2 \sin y \cos y - 2 \cos y \sin y = 0.$$

Zauważmy, że funkcję $G(y)$ łatwo wyznaczyć efektywnie, bowiem

$$G(y) = \sin^2 y + \cos^2 y = 1.$$

Ponieważ G jest funkcją stałą, jej pochodna jest tożsamościowo równa zeru.

4. Różniczkowanie całki względem parametru. Będziemy rozważać całkę postaci

$$p(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$

gdzie funkcja $f(x, y)$ jest określona w prostokącie \mathbb{P} danym nierównościami (2) zaś funkcje u, v spełniają nierówności

$$a \leq u(y) \leq b, \quad a \leq v(y) \leq b \quad \text{dla} \quad y \in [c, d].$$

Zacniemy od przypadku, gdy obie granice całkowania są stałe tzn. gdy całka ma postać

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Twierdzenie 9. Załóżmy, że

- (i) funkcja f jest ciągła w \mathbb{P} i ma w każdym punkcie $(x_0, y_0) \in \mathbb{P}$ pochodną cząstkową $f_y(x_0, y_0)$;
- (ii) pochodna f_y jest ciągła w \mathbb{P} .

Wówczas funkcja g jest różniczkowalna w przedziale $[c, d]$ i zachodzi równość

$$(16) \quad g'(y_0) = \int_a^b f_y(x, y_0) dx$$

dla dowolnego $y_0 \in [c, d]$.

DOWÓD. Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (twierdzenie 11 rozdz. III §4) możemy iloraz różnicowy zapisać w postaci

$$(17) \quad \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \int_a^b f_y(x, \bar{y}(h)) dx,$$

gdzie $\bar{y}(h)$ leży między liczbami y_0 , $y_0 + h$. Z założenia (ii) wynika na podstawie twierdzenia 6, że całka

$$\int_a^b f_y(x, y) dx$$

jest ciągłą funkcją parametru y , a więc

$$(18) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f_y(x, \bar{y}(h)) dx = \int_a^b f_y(x, y_0) dx.$$

Z równości (17), (18) wynika (16). □

Wzór (16) można zapisać inaczej w postaci

$$(16') \quad g'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx.$$

Mówimy, że przy założeniach twierdzenia 9 można w przypadku stałych granic całkowania wykonać różniczkowanie pod znakiem całki.

Przejdźmy teraz do całki $p(y)$ o zmiennych granicach całkowania.

Twierdzenie 10. Załóżmy, że

- (i) funkcja f spełnia założenia twierdzenia 9,
- (ii) funkcje $u(y)$, $v(y)$ są różniczkowalne w przedziale $[c, d]$.

Wówczas całka $p(y)$ jest różniczkowalna w przedziale $[c, d]$ i zachodzi równość

$$(19) \quad \frac{dp}{dy} = \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x, y) dx + f(v(y), y) \frac{dv}{dy} - f(u(y), y) \frac{du}{dy} \quad \text{dla } y \in [c, d].$$

Uwaga. Wzór (19) nosi nazwę *reguły Leibniza*. Dla stałych funkcji $u(y), v(y)$ daje on udowodniony poprzednio wzór (16').

DOWÓD. Ustalając $y_0 \in (c, d)$ mamy

$$p(y) = P(y) + Q(y) + R(y),$$

gdzie

$$P(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x, y) dx,$$

$$Q(y) = \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y) dx, \quad R(y) = \int_{u(y)}^{u(y_0)} f(x, y) dx.$$

Całka $P(y)$ ma stałe granice i spełnia założenia twierdzenia 9, zatem na podstawie (16')

$$(20) \quad \frac{dP}{dy} = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f_y(x, y) dx.$$

Pochodne całek $Q(y)$ i $R(y)$ obliczymy opierając się na twierdzeniu 8. Przyjmując

$$T(v, y) = \int_{\alpha}^v f(x, y) dx, \quad S(u, y) = \int_u^{\beta} f(x, y) dx,$$

gdzie

$$\alpha = v(y_0), \quad \beta = u(y_0)$$

mamy zgodnie z twierdzeniem 6 §1 i wzorem (29) §1

$$\frac{\partial T}{\partial v} = f(v, y), \quad \frac{\partial S}{\partial u} = -f(u, y).$$

Ponadto na podstawie twierdzenia 9

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \int_{\alpha}^v f_y(x, y) dx, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \int_u^{\beta} f_y(x, y) dx$$

- przypominamy, że pochodną cząstkową względem y obliczamy traktując drugą zmienną v względnie u jako stałą. Ostatecznie stosując wzór (14') otrzymujemy

$$(21) \quad \frac{dQ}{dy} = f(v(y), y) \frac{dv}{dy} + \int_{v(y_0)}^{v(y)} f_y(x, y) dx$$

oraz

$$(22) \quad \frac{dR}{dy} = -f(u(y), y) \frac{du}{dy} + \int_{u(y)}^{u(y_0)} f_y(x, y) dx.$$

Dodanie (20), (21), (22) daje żądany wzór (19).

Pozostaje do wykazania, że zastosowanie wzoru (14') dla pochodnej funkcji złożonej było uprawnione tzn. że funkcje T, S spełniają założenia twierdzenia 8. Ciągłość pochodnych T_v, S_u wynika z przyjętego założenia (i) twierdzenia 9, natomiast ciągłość pochodnych T_y, S_y wynika z założenia (ii) twierdzenia 9, jeżeli udowodnimy następujący

Lemat. Niech $g(x, y)$ będzie funkcją ciągłą w prostokącie \mathbb{P} określonym nierównościami (2). Wówczas funkcje

$$G_1(v, y) = \int_{\alpha}^v g(x, y) dx, \quad G_2(u, y) = \int_u^{\beta} g(x, y) dx \quad (a \leq \alpha, \beta \leq b)$$

są również ciągłe w \mathbb{P} .

DOWÓD LEMATU. Dla ustalenia uwagi udowodnimy ciągłość funkcji G_1 , ciągłość funkcji G_2 dowodzi się tak samo. Ustalając dowolnie punkt $(v_0, y_0) \in \mathbb{P}$ mamy

$$(23) \quad G_1(v, y) - G_1(v_0, y_0) = \left[G_1(v, y) - G_1(v_0, y) \right] + \left[G_1(v_0, y) - G_1(v_0, y_0) \right] = \\ \int_{v_0}^v g(x, y) dx + \int_{\alpha}^{v_0} \left[g(x, y) - g(x, y_0) \right] dx.$$

Z założonej ciągłości funkcji g wynika:

1^o istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$(24) \quad |g(x, y)| \leq M \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \mathbb{P}$$

- na mocy twierdzenia 5,

2^o ustalając dowolnie $\varepsilon > 0$ można dobrać $\eta > 0$ tak, aby dla $|y - y_0| < \eta$ zachodziła nierówność

$$(25) \quad |g(x, y) - g(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{dla} \quad x \in [a, b]$$

- na mocy twierdzenia 4.

Z (24) dostajemy oszacowanie

$$(26) \quad \left| \int_{v_0}^v g(x, y) dx \right| < M|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

o ile

$$|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

natomiast dla $|y - y_0| < \eta$ mamy wobec (25)

$$(27) \quad \left| \int_{\alpha}^{v_0} \left[g(x, y) - g(x, y_0) \right] dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dodając (26), (27) otrzymujemy w oparciu o (23)

$$|G_1(v, y) - G_1(v_0, y_0)| < \varepsilon$$

jeżeli

$$|v - v_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

gdzie $\delta = \min(\eta, \frac{\varepsilon}{2M})$ - a to oznacza ciągłość funkcji G_1 w punkcie (v_0, y_0) zgodnie z twierdzeniem 3. Dowód lematu, a zatem i dowód twierdzenia jest zakończony. \square

Przykład 9. Niech

$$g(y) = \int_0^1 (x^2 + y^2) dx.$$

Ponieważ

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad f_y(x, y) = 2y,$$

założenia twierdzenia 9 są spełnione w każdym prostokącie

$$0 \leq x \leq 1, \quad c \leq y \leq d$$

i zgodnie ze wzorem (16') mamy

$$g'(y) = \int_0^1 (2y) dx = 2y.$$

Zauważmy, że funkcję g łatwo wyrazić bezpośrednio przez zmienne x, y , bowiem po scałkowaniu otrzymujemy

$$g(y) = \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + y^2$$

i stąd

$$g'(y) = 2y$$

zgodnie z wynikiem otrzymanym przez zastosowanie reguły Leibniza.

Przykład 10. Niech

$$p(y) = \int_y^{y^2} (x + y) dx,$$

wówczas

$$f(x, y) = x + y, \quad u(y) = y, \quad v(y) = y^2, \quad f_y(x, y) = 1.$$

Założenia twierdzenia 10 są spełnione, jeżeli prostokąt \mathbb{P} zawiera wykresy funkcji u, v (przedział $[c, d]$ może być obrany dowolnie). Stosując regułę Leibniza (19) dostajemy

$$\frac{dp}{dy} = \int_y^{y^2} dx + 2(y^2 + y)y - 2y,$$

czyli po wykonaniu całkowania i redukcji

$$(28) \quad \frac{dp}{dy} = 2y^3 + 3y^2 - 3y.$$

Ten sam wynik otrzymamy obliczając najpierw całkę wyrażającą funkcję p . Mamy mianowicie

$$p(y) = \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=y}^{x=y^2},$$

czyli po podstawieniu i redukcji

$$p(y) = \frac{1}{2}y^4 + y^3 - \frac{3}{2}y^2,$$

co po zróżniczkowaniu daje (28).

5. Całkowanie całki względem parametru. Udowodnimy

Twierdzenie 11. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w prostokącie \mathbb{P} określonym nierównościami (2), to*

$$(29) \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

DOWÓD. Udowodnimy nieco ogólniejszą równość

$$(30) \quad \int_c^t \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx \quad \text{dla } t \in [c, d].$$

Oznaczmy lewą stronę (30) przez $G(t)$. Z twierdzenia 6 wynika, że wewnętrzna całka jest funkcją ciągłą parametru y w przedziale $[c, d]$, wobec tego funkcja G jest różniczkowalna i przy tym

$$(31) \quad G'(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

zgodnie z twierdzeniem 6 §1. Po wprowadzeniu oznaczenia

$$h(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$$

prawa strona (30) może być zapisana w postaci

$$H(t) = \int_a^b h(x, t) dx.$$

Z twierdzenia 6 §1 wynika, że przy ustalonym x funkcja h ma pochodną względem t i przy tym

$$(32) \quad h_t(x, t) = f(x, t).$$

Zgodnie z lematem podanym w dowodzie twierdzenia 10 funkcja $h(x, t)$ jest ciągła w \mathbb{P} , natomiast ciągłość pochodnej cząstkowej h_t wynika z (32) i z założeń twierdzenia. Wobec tego możemy zastosować twierdzenie 9, które zapewnia różniczkowalność funkcji H i równość

$$H'(t) = \int_a^b h_t(x, t) dx$$

czyli zgodnie z (32)

$$(33) \quad H'(t) = \int_a^b f(x, t) dx.$$

Z (31), (33) widać, że funkcje $G(t)$ i $H(t)$ mają w przedziale $[c, d]$ równe pochodne, zatem różnią się o stałą w tym przedziale. Stała ta jest zerem, gdyż obie funkcje mają tę samą wartość (równą zeru) dla $t = c$. Wobec tego funkcje $G(t)$, $H(t)$ są identyczne w całym przedziale $[c, d]$, a to oznacza równość (30). W szczególności dla $t = d$ dostajemy (29). \square

Uwaga. Wzór (29) bywa zapisywany w postaci

$$(29') \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Całki występujące po obu stronach noszą nazwę *całek iterowanych*. Twierdzenie 11 mówi więc, że całki iterowane funkcji ciągłej dwóch zmiennych są równe.

Przykład 11. Rozważmy całkę iterowaną

$$(34) \quad \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx \quad (0 < a < b).$$

Funkcja podcałkowa

$$f(x, y) = x^y$$

jest określona dla $x > 0$ i może być przedstawiona w postaci

$$f(x, y) = e^{y \log x}$$

z której widać, że jest ciągła dla $x > 0$. Jak łatwo sprawdzić,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} e^{y \log x} = 0 \quad \text{dla } y_0 > 0$$

wobec tego przyjmując

$$(35) \quad f(0, y) = 0 \quad \text{dla } a \leq y \leq b$$

otrzymujemy funkcję podcałkową ciągłą w prostokącie

$$\mathbb{P} : 0 \leq x \leq 1, \quad a \leq y \leq b$$

i możemy zastosować do całki (34) twierdzenie 11, z którego wynika, że

$$(36) \quad \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy$$

Całka po lewej stronie daje się łatwo obliczyć, bowiem

$$\int_0^1 x^y dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y+1},$$

a stąd

$$(37) \quad \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log \frac{1+b}{1+a}$$

-ponieważ dla $y > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{y \log x} = 0,$$

przyjmujemy

$$x^{y+1}|_{x=0} = 0.$$

Natomiast w całce po prawej stronie (36) daje się obliczyć tylko całka wewnętrzna, mianowicie dla $0 < x < 1$

$$(38) \quad \int_a^b x^y dy = \left[\frac{x^y}{\log x} \right]_{y=a}^{y=b} = \frac{x^b - x^a}{\log x}.$$

Ostatecznie równości (36) - (38) dają

$$(39) \quad \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{1+b}{1+a}$$

(ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\log x} = 0,$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^b - x^a}{\log x} = b - a,$$

co stwierdzamy stosując regułę de l'Hospitala, funkcja podcałkowa po lewej stronie jest ciągła w przedziale $[0, 1]$, jeżeli nadamy jej wartość zero dla $x = 0$ oraz wartość $b - a$ dla $x = 1$).

Zauważmy, że całki (39) nie moglibyśmy obliczyć bezpośrednio stosując zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego, gdyż nie znamy funkcji pierwotnej. Twierdzenie o równości całek iterowanych pozwoliło znaleźć jej wartość przy pomocy dwóch łatwych całkowań.

Zadania.

1. Zbadać istnienie granic

$$\text{a.) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{b.) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{c.) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Wskazówka. W punkcie b.) udowodnić najpierw nierówność

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x| \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0).$$

2. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 1.$$

Wskazówka. Badanie granicy przy $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ zacząć od udowodnienia nierówności

$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0).$$

3. W jakim zbiorze punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ określone są funkcje

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, \quad g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} ?$$

Zbadać ich ciągłość.

4. Sprawdzić, czy istnieje granica

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

jeżeli

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

Wskazówka. Zbadać zachowanie się funkcji f na prostej $y = x$ i na paraboli $y = x^2$.

5. Znaleźć pochodne cząstkowe f_x , f_y , jeżeli

$$\text{(i) } f(x, y) = \frac{\cos(x^2)}{y} \quad (y \neq 0),$$

$$\text{(ii) } f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y} \quad (y \neq 0),$$

$$(iii) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \log(xy) \quad (x > 0, y > 0).$$

6. Znaleźć pochodne cząstkowe $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$, jeżeli

$$a.) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{xy},$$

$$b.) \quad f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

7. Niech

$$f(x, y) = g(x) \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right).$$

Znaleźć pochodne cząstkowe $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ w dowolnie ustalonym punkcie (x_0, y_0) .
Co trzeba założyć o funkcji g , aby te pochodne istniały?

8. Zbadać ciągłość funkcji f i znaleźć jej pochodne cząstkowe względem x i względem y , jeżeli

$$a.) \quad f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0,$$

$$b.) \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^3 + y^3} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

9. Niech

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

(i) Udowodnić ciągłość funkcji f ,

(ii) Znaleźć pochodne cząstkowe f_x , f_y i udowodnić ich ciągłość.

10. Niech

$$F(u, v) = 2uv, \quad u(y) = \cos y, \quad v(y) = \sin y.$$

Znaleźć pochodną funkcji

$$G(y) = F(u(y), v(y))$$

a.) bezpośrednio,

b.) stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej.

11. Udowodnić ciągłość funkcji

$$g(y) = \int_0^1 \cos(xy) \, dx, \quad h(y) = \int_{e^y}^{e^{-y}} (x + y) \, dx \quad (y \in \mathbb{R})$$

- a.) opierając się na twierdzeniu,
b.) obliczając całkę.

12. Znaleźć pochodną funkcji $g(y)$ dwoma sposobami:

- a.) obliczając całkę określającą funkcję i następnie różniczkując,
b.) stosując regułę Leibniza, jeżeli

$$(i) \quad g(y) = \int_0^\pi \sin(xy) \, dx, \quad (ii) \quad g(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \, dx \quad (y \neq 0),$$

$$(iii) \quad g(y) = \int_0^1 \log(x^2 + y^2) \, dx \quad (y \neq 0).$$

Wskazówka. W punktach (ii), (iii) przy obliczaniu całki zastosować całkowanie przez części.

13. Udowodnić różniczkowalność i obliczyć pochodną funkcji

$$p(y) = \int_{ey}^{e^{-y}} (x^2 + y^2) \, dx \quad (y \in \mathbb{R})$$

- a.) obliczając całkę określającą funkcję i następnie różniczkując,
b.) stosując regułę Leibniza.

14. Udowodnić różniczkowalność i znaleźć pochodną funkcji

$$a.) \quad p(y) = \int_y^{y^2} x \sin\left(\frac{\pi y}{x}\right) \, dx \quad (y > 0), \quad b.) \quad p(y) = \int_{-y}^y e^{x^2+y^2} \, dx,$$

$$c.) \quad p(y) = \int_{\sin(xy)}^{\cos(xy)} \log(x^2 + y^2) \, dx \quad (y \neq 0).$$

15. Niech

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Zbadać ciągłość funkcji f i obliczyć jej całki iterowane w prostokącie

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Wynik porównać z twierdzeniem 11.

Wskazówka. Przy obliczaniu całek

$$(40) \quad g(x) = \int_0^1 f(x, y) \, dy, \quad h(y) = \int_0^1 f(x, y) \, dx$$

można łatwo odgadnąć funkcję pierwotną. Czy (40) określa funkcje g, h w całym przedziale $[0, 1]$?

Ciągi i szeregi funkcyjne.

§1. Ogólne własności ciągów i szeregów funkcyjnych.

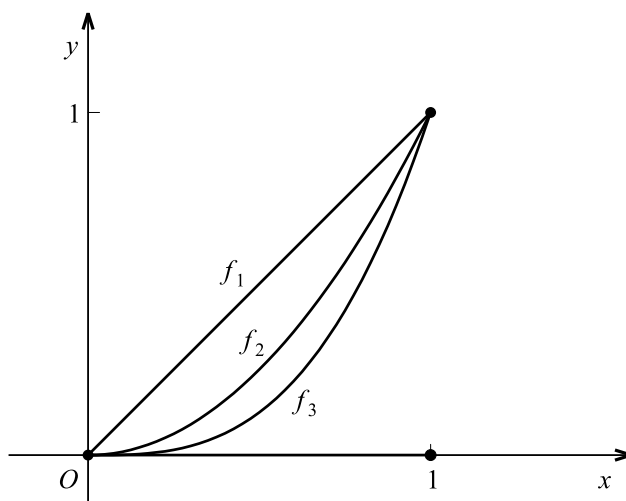
1. Zbieżność punktowa i zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego. Niech \mathbb{IP} będzie ustalonym przedziałem (ograniczonym lub nie) na osi liczbowej. Ciąg nieskończony, którego n -ty wyraz f_n jest funkcją określoną w przedziale \mathbb{IP} nazywamy *ciągami funkcyjnym*. Mówimy, że ciąg $\{f_n\}$ jest *zbieżny punktowo do funkcji f w przedziale \mathbb{IP}* lub że f jest *granica punktową ciągu $\{f_n\}$* , jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{IP}$ ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny do $f(x)$. Zapisujemy

$$f_n \rightarrow f \quad \text{w } \mathbb{IP}$$

lub

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{w } \mathbb{IP}.$$

Oznaczenie przedziału \mathbb{IP} można opuścić, jeżeli wiadomo o jaki przedział chodzi. W dalszym ciągu przez *granice ciągu funkcyjnego* będziemy zawsze rozumieli jego granicę punktową.



[rys. 86]

Przykład 1. Niech

$$f_n(x) = x^n, \quad \mathbb{IP} = [0, 1],$$

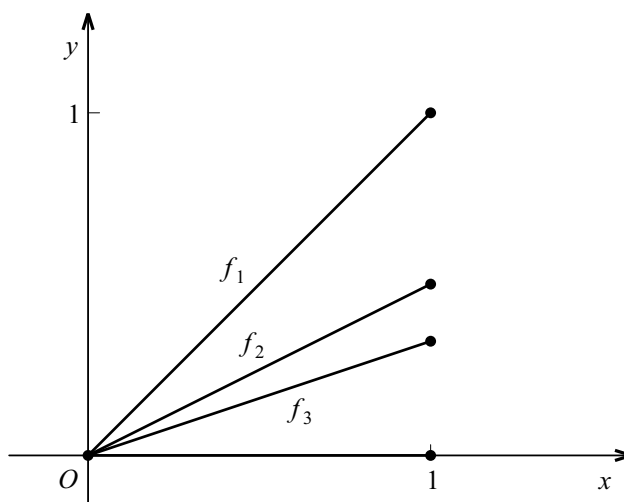
wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

zatem funkcja graniczna ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Na rys. 86 podajemy wykresy funkcji f_n dla $n = 1, 2, 3$ i wykres funkcji f (narysowany grubszą linią).



[rys. 87]

Przykład 2. Niech

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x, \quad \mathbb{I} = [0, 1],$$

wówczas dla dowolnie ustalonego x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

zatem $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{I}$ (rys. 87).

Z podanych przykładów widać, że granica punktowa ciągu funkcji ciągłych może być funkcją ciągłą (jak w Przykładzie 2) lub nie mieć tej własności (jak w Przykładzie 1). Powstaje pytanie, jakie warunki winien spełniać ciąg funkcji ciągłych na to, aby jego granica również była ciągła. Zanim odpowiemy na to pytanie wprowadzimy pojęcie jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego.

Mówimy, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f w przedziale \mathbb{I} , jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, że dla $n > N$ zachodzi nierówność epsilonowa

$$(1) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{I}\mathbb{P}$ (podkreślamy, że liczba N jest dobrana do ε i nie zależy od zmiennej x występującej w nierówności (1)). Zapisujemy

$$(2) \quad f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale } \mathbb{I}\mathbb{P}$$

albo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{jednostajnie w } \mathbb{I}\mathbb{P}.$$

W zapisie (2) można opuścić oznaczenie przedziału $\mathbb{I}\mathbb{P}$, jeżeli nie ma wątpliwości, o jaki przedział chodzi.

Wróćmy do podanych przykładów. Łatwo okazać, że w Przykładzie 2 zbieżność jest jednostajna. Istotnie, ponieważ

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}x \leq \frac{1}{n} \quad \text{dla } x \in [0, 1],$$

nierówność epsilonowa (1) zachodzi w całym przedziale $\mathbb{I}\mathbb{P}$ dla $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$ - jak widać, liczba N zależy tylko od ε . Natomiast zbieżność w Przykładzie 1 nie jest jednostajna. Aby to udowodnić wystarczy wykazać istnienie takiej liczby $\varepsilon_0 > 0$, że jakkolwiek obierzemy N , zawsze dla pewnego $n > N$ i pewnego $x_n \in \mathbb{I}\mathbb{P}$ zachodzi nierówność przeciwna do (1) tzn. mamy

$$(3) \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Obierzmy $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, wówczas dla $0 < x < 1$ nierówność (3) ma postać

$$x_n^n \geq \frac{1}{3}.$$

Wystarczy zatem przyjąć

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}},$$

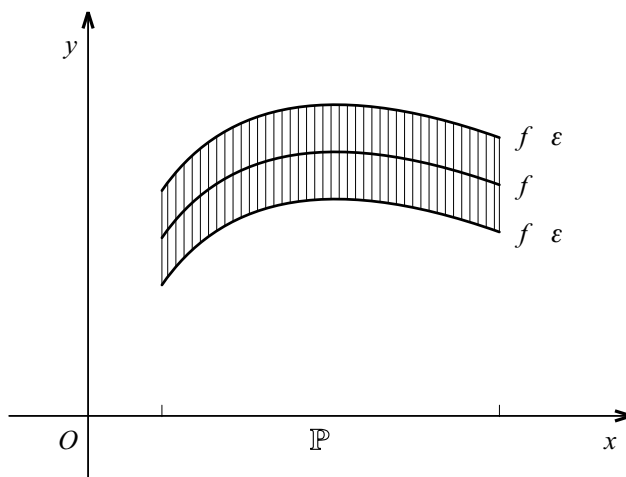
wówczas

$$0 < x_n < 1 \quad \text{oraz} \quad x_n^n = \frac{1}{2} > \frac{1}{3},$$

przy czym n może tu być dowolnie ustaloną liczbą naturalną.

Warunek podany w definicji jednostajnej zbieżności ma prostą interpretację geometryczną. Nierówność (1) można zapisać w równoważnej postaci jako nierówność podwójną

$$(4) \quad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon.$$



[rys. 88]

Zbiór punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunki

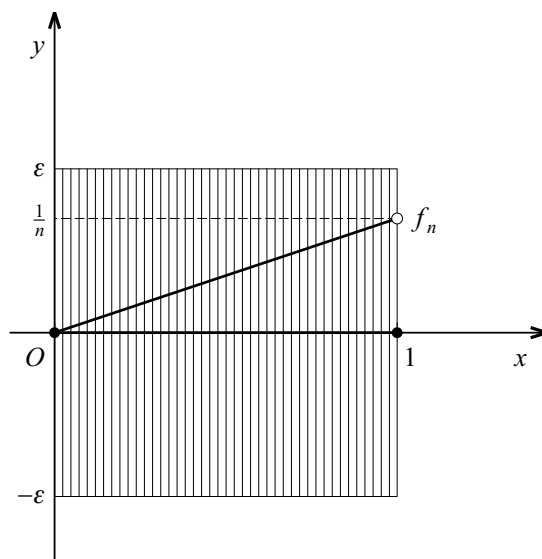
$$x \in \mathbb{I}, \quad f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$$

nazwijmy *pasem epsilonowym* (obszar zakreskowany na rys. 88). Wówczas nierówność (4) orzeka, że wykres funkcji f_n leży w pasie epsilonowym. Wobec tego mamy równoważne geometryczne sformułowanie definicji jednostajnej zbieżności: Ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f w przedziale \mathbb{I} , jeżeli do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, że dla $n > N$ wykresy funkcji f_n leżą w pasie epsilonowym.

W Przykładzie 2 mieliśmy ciąg zbieżny jednostajnie w przedziale $\mathbb{I} = [0, 1]$. Ponieważ $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{I}$, pas epsilonowy jest określony nierównościami

$$0 \leq x \leq 1, \quad -\varepsilon < y < \varepsilon.$$

Wykres funkcji f_n leży w pasie epsilonowym jeżeli $\frac{1}{n} < \varepsilon$ czyli $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$ (rys. 89).



[rys. 89]

Natomiast ciąg rozważany w Przykładzie 1 jest zbieżny ale nie jednostajnie. Pas epsilonowy jest sumą prostokąta A_ε określonego nierównościami

$$0 \leq x < 1, \quad -\varepsilon < y < \varepsilon$$

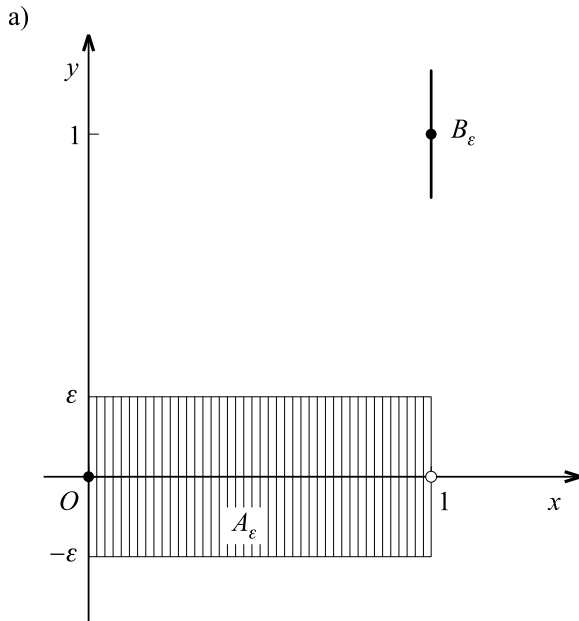
i odcinka B_ε równoległego do osi y -ów

$$x = 1, \quad 1 - \varepsilon < y < 1 + \varepsilon$$

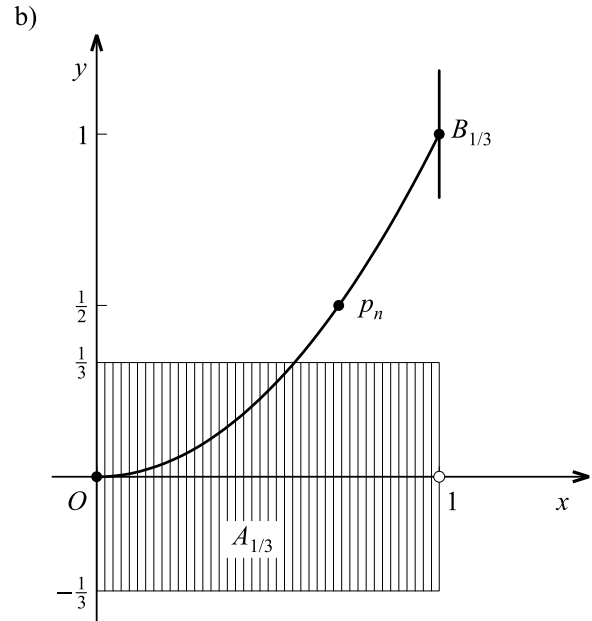
(rys. 90a). Przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{3}$ i ustalając dowolnie n znaleźliśmy punkt

$$p_n = (x_n, f_n(x_n)) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \frac{1}{2} \right)$$

należący do wykresu funkcji f_n ale nie należący do pasa epsilonowego (rys. 90b).



[rys. 90a]



[rys. 90b]

2. Ciągłość granicy. W prosty sposób można udowodnić

Twierdzenie 1. Jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja f_n jest ciągła w \mathbb{P} oraz

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w } \mathbb{P}$$

to funkcja graniczna f też jest ciągła w \mathbb{P} .

DOWÓD. Mamy dla $x_0, x_0 + h \in \mathbb{P}$ i dowolnego n

$$(5) \quad |f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq |f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)| + |f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Z założenia jednostajnej zbieżności ciągu $\{f_n\}$ wynika, że do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, aby dla $n > N$ zachodziły nierówności

$$|f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

przy dowolnie obranym przyroście h . Ustalając $n = n_0 > N$ mamy więc

$$(6) \quad |f(x_0 + h) - f_{n_0}(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ponieważ z założenia funkcja f_{n_0} jest ciągła w punkcie x_0 , możemy do ε dobrać liczbę dodatnią δ tak, by zachodziła nierówność

$$(7) \quad |f_{n_0}(x_0 + h) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla $|h| < \delta$. Dodając (6), (7) otrzymujemy wobec (5)

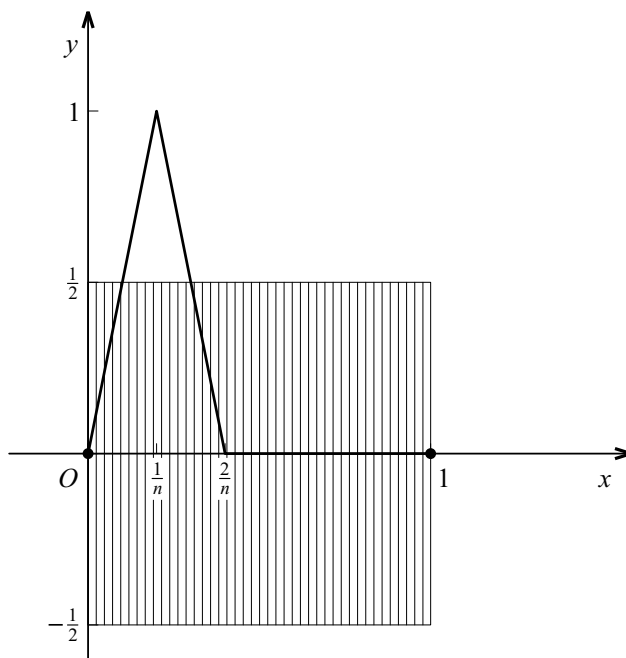
$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dla $|h| < \delta$ - a to oznacza ciągłość funkcji f w punkcie x_0 . □

Udowodnione twierdzenie można krócej sformułować następująco:

Twierdzenie 1'. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.*

Wyrazy ciągów funkcyjnych rozważanych w Przykładach 1, 2 były funkcjami ciągłymi. W Przykładzie 1 zbieżność nie była jednostajna i granica była funkcją nieciągłą, natomiast w Przykładzie 2 mieliśmy zbieżność jednostajną i, zgodnie z udowodnionym twierdzeniem, funkcja graniczna była ciągła.



[rys. 91]

Przykład 3. Niech f_n (rys. 91) będzie funkcją liniową w każdym z przedziałów $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ i spełniającą warunki

$$f_n(0) = 0, \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad \frac{2}{n} \leq x \leq 1.$$

Ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo w przedziale $\mathbb{I}P = [0, 1]$ do funkcji $f(x) = 0$, bowiem mamy

$$f_n(0) = 0 \quad \text{dla dowolnego } n$$

oraz przy ustalonym $x \in (0, 1]$

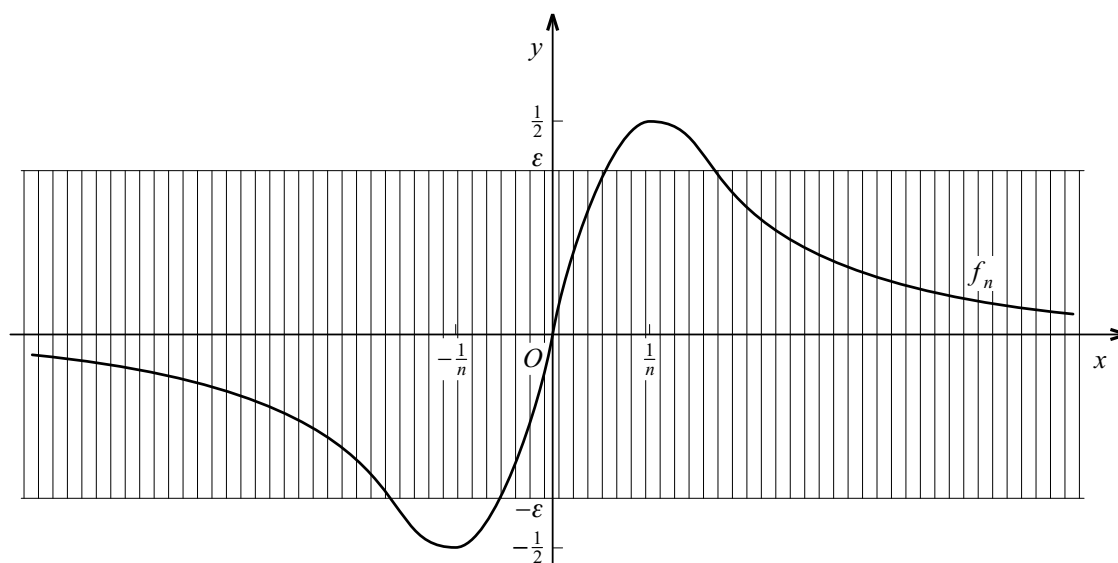
$$f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq \frac{2}{x}.$$

Pas epsilonowy jest prostokątem określonym nierównościami

$$0 \leq x \leq 1, \quad -\varepsilon < y < \varepsilon.$$

Ponieważ $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{2}$ stwierdzamy, że wykres żadnej funkcji f_n nie leży całkowicie w pasie epsilonowym (por. rys 91). Wobec tego ciąg $\{f_n\}$ nie jest zbieżny jednostajnie - mimo to jego granica jest funkcją ciągłą!

Podamy jeszcze jeden przykład ciągu funkcyjnego.



[rys. 92]

Przykład 4. Niech

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad \mathbb{P} = \mathbb{R}.$$

Mamy

$$f_n(0) = 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

oraz dla ustalonego $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2} = 0,$$

zatem ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo na całej osi rzeczywistej i przy tym

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aby zbadać charakter tej zbieżności narysujemy wykres funkcji f_n dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Jest to funkcja nieparzysta, zatem jej wykres jest symetryczny względem początku układu i wobec tego wystarczy zbadać funkcję dla $x > 0$. Ponieważ

$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2},$$

funkcja f_n jest ściśle rosnąca w przedziale $[0, \frac{1}{n}]$, ściśle malejąca w przedziale $[\frac{1}{n}, \infty)$ i osiąga maksimum właściwe w punkcie $x = \frac{1}{n}$, przy tym

$$(9) \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + n^2} = 0$$

oraz

$$f'_n(0) = n.$$

Wykres funkcji f_n podany jest na rys. 92, na rysunku tym zakreślono również pas epsilonowy który zgodnie z (8) określony jest przez warunki

$$x \in \mathbb{R}, \quad -\varepsilon < y < \varepsilon.$$

Z rysunku widać, że zbieżność ciągu $\{f_n\}$ nie jest jednostajna na całej osi rzeczywistej, przyjmując bowiem $\varepsilon = \frac{1}{3}$ stwierdzamy, że dla dowolnie obranego n zgodnie z (9) wykres funkcji f_n wykracza poza pas epsilonowy. Łatwo jednak wykazać, że zbieżność jest jednostajna w każdym przedziale $[a, \infty)$ oraz $(-\infty, -a]$, gdzie $a > 0$. Ze względu na symetrię wykresu funkcji f_n wystarczy rozważyć przedział $\mathbb{I}P_a = [a, \infty)$. Ponieważ dla $n \geq \frac{1}{a}$ funkcja f_n jest w przedziale $\mathbb{I}P_a$ ściśle malejąca, mamy dla $x \geq a$

$$f_n(x) \leq f_n(a) < \frac{1}{na},$$

zatem nierówność epsilonowa (1) jest spełniona w całym przedziale $\mathbb{I}P_a$ jeżeli zachodzi

$$\frac{1}{na} < \varepsilon$$

co ma miejsce dla $n > N = \frac{1}{a\varepsilon}$. Innymi słowy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę

$$N = \frac{1}{a\varepsilon}$$

tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|f_n(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{I}P_a$ - a to oznacza, że

$$f_n \rightrightarrows 0$$

w przedziale $\mathbb{I}P_a$. Zauważmy, że liczba N jest wprawdzie niezależna od $x \in \mathbb{I}P_a$ ale zależy od liczby a określającej przedział $\mathbb{I}P_a$. \square

Zbieżność jednostajna

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w } \mathbb{I}P$$

pociąga za sobą zbieżność punktową

$$f_n \rightarrow f \quad \text{w } \mathbb{I}P$$

- wynika to natychmiast z definicji. Z podanych przykładów widać, że wynikanie odwrotne nie zachodzi.

3. Jednostajny warunek Cauchy'ego. Dla ciągów liczbowych rozważanych w rozdz. II wprowadziliśmy warunek Cauchy'ego (§2 punkt 6) pozwalający rozstrzygnąć zagadnienie zbieżności ciągu, gdy nie znamy jego granicy. Podobny warunek można wprowadzić dla ciągów funkcyjnych.

Twierdzenie 2. Ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, by dla $n, k > N$ zachodziła nierówność

$$(10) \quad |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{P}$.

Uwaga. Warunek podany w twierdzeniu nazywamy *jednostajnym warunkiem Cauchy'ego*.

DOWÓD. Załóżmy, że

$$f_n \Rightarrow f \quad \text{w przedziale } \mathbb{P}.$$

Mamy

$$(11) \quad |f_n(x) - f_k(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_k(x)|$$

dla dowolnych n, k oraz $x \in \mathbb{P}$. Z definicji jednostajnej zbieżności wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n, k > N$ zachodziły nierówności

$$(12) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $x \in \mathbb{P}$, wobec tego z (11), (12) dostajemy nierówność (10) dla $n, k > N$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$. Zatem jednostajny warunek Cauchy'ego jest warunkiem koniecznym jednostajnej zbieżności.

Udowodnimy teraz, że jest on dostateczny. Zauważmy najpierw, że jeżeli ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ spełnia w przedziale \mathbb{P} jednostajny warunek Cauchy'ego, to dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{P}$ ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego i wobec tego jest zbieżny na mocy twierdzenia 6 rozdz. II §2. Zatem ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo w przedziale \mathbb{P} do pewnej funkcji f . Zastępując w nierówności (10) liczbę ε przez $\varepsilon/2$ i przechodząc do granicy przy $k \rightarrow \infty$ dostajemy

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

dla $n > N$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$, przy czym liczba N jest dobrana do ε . Oznacza to, że

$$f_n \Rightarrow f$$

w przedziale \mathbb{P} . □

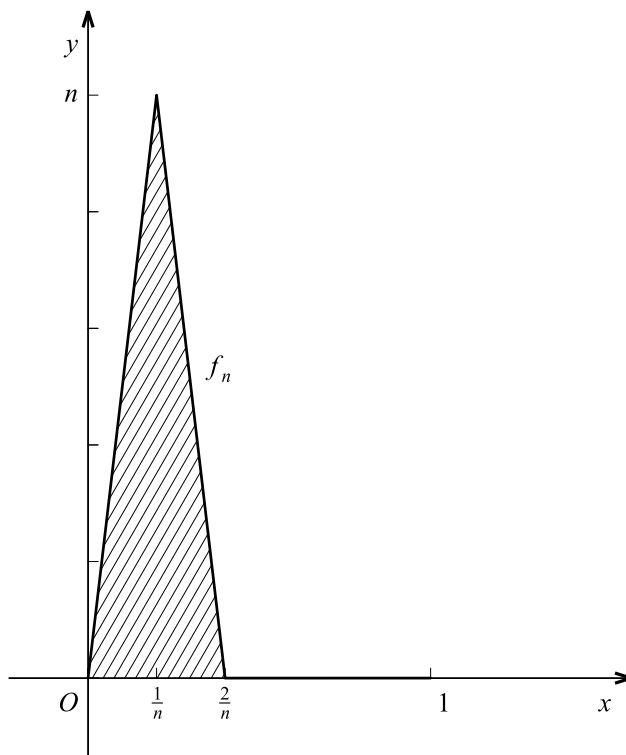
4. Przejście do granicy pod znakiem całki. Przyjmijmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{P} = [a, b]$$

przy czym funkcje f, f_n ($n \in \mathbb{N}$) są ciągłe w \mathbb{P} . Czy zachodzi równość

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

tzn. czy można przechodzić do granicy pod znakiem całki? Łatwo pokazać na przykładzie, że równość (13) może być fałszywa.



[rys. 93]

Przykład 5. Niech f_n będzie funkcją liniową w każdym z przedziałów $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ i spełniająca warunki

$$f_n(0) = 0, \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n, \quad f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \quad (n \geq 2)$$

(rys. 93). Ustalając $x \in (0, 1)$ mamy

$$f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq \frac{2}{x},$$

natomiast

$$f_n(0) = f_n(1) = 0$$

dla wszystkich $n \geq 2$. Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$$

w przedziale $\mathbb{P} = [0, 1]$ w sensie zbieżności punktowej i całka po prawej stronie (13) jest równa zero. Natomiast całka po lewej stronie jest równa polu trójkąta zakreskowanego na rys. 93 czyli

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad (n \geq 2),$$

a więc granica po lewej stronie (13) jest równa jedności.

Bez trudu można zauważyć, że ciąg $\{f_n\}$ nie jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[0, 1]$. Dla danego $\varepsilon > 0$ pas epsilonowy jest bowiem określony nierównościami

$$0 \leq x \leq 1, \quad -\varepsilon < y < \varepsilon$$

i przyjmując $\varepsilon = 1$ widzimy, że wykres żadnej funkcji f_n nie leży całkowicie w pasie epsilonowym. W tym tkwi przyczyna dla której rozważany w Przykładzie 5 ciąg $\{f_n\}$ nie spełnia równości (13). Mamy mianowicie

Twierdzenie 3. *Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych jednostajnie zbieżnym w przedziale $\mathbb{P} = [a, b]$. Wówczas zachodzi (13).*

DOWÓD. Zgodnie z twierdzeniem 1 funkcja graniczna f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, zatem obie całki w (13) mają sens. Z założenia jednostajnej zbieżności wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

w całym przedziale \mathbb{P} . Wobec tego dla $n > N$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon,$$

a to oznacza, że przy założeniach twierdzenia równość (13) jest prawdziwa. \square

A oto inne, krótsze sformułowanie udowodnionego twierdzenia:

Twierdzenie 3'. *Jeżeli ciąg funkcji ciągłych jest jednostajnie zbieżny, to można przejść do granicy pod znakiem całki.*

5. Różniczkowanie ciągów funkcyjnych. Wiemy już, że ciąg funkcyjny jednostajnie zbieżny można całkować wyraz za wyrazem tzn. prawdziwa jest równość (13). W przypadku różniczkowania sprawa jest nieco bardziej skomplikowana, jak wskazuje następujący

Przykład 6. Łatwo zauważyć, że funkcje

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(2\pi nx) \quad (n \in \mathbb{N})$$

mają ciągłą pochodną w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i tworzą ciąg jednostajnie zbieżny na całej osi rzeczywistej. Mamy bowiem oszacowanie

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

z którego wynika, że

$$1^0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0,$$

2^0 zbieżność ta jest jednostajna, gdyż przy dowolnie obranym $\varepsilon > 0$ nierówność epsilonowa (1) zachodzi dla $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$.

Różniczkując otrzymujemy ciąg

$$(14) \quad f'_n(x) = 2\pi \cos(2\pi nx)$$

w pewnych punktach rozbieżny, np. dla $x = \frac{1}{2}$ ciąg ten rozpada się na dwa podciągi

$$f'_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -2\pi, \quad f'_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi$$

zbieżne do różnych granic (dokładniejsze badanie ciągu (14) por. zadanie 23).

Udowodnimy

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że*

(i) *funkcje f_n ($n \in \mathbb{N}$) są klasy C^1 w przedziale $\mathbb{P} = [a, b]$ oraz*

$$f'_n \Rightarrow g$$

w tym przedziale,

(ii) *istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{P}$ taki, że ciąg liczbowy $\{f_n(x_0)\}$ jest zbieżny.*

Wówczas ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie w \mathbb{P} i przy oznaczeniu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

zachodzi równość

$$(15) \quad f' = g.$$

Uwaga. Równość (15) można zapisać w postaci

$$(15') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

Twierdzenie 4 podaje więc warunki dostateczne do tego, by można było przestawiać operacje różniczkowania i przejścia do granicy czyli, jak mówimy, różniczkować ciąg funkcyjny wyraz za wyrazem.

DOWÓD. Zauważmy, że dla ustalonego $x \in \mathbb{P}$

$$(16) \quad f_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0),$$

zatem z założenia (i) wynika w oparciu o twierdzenie 3, że ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny i jego granica $f(x)$ spełnia równość

$$(17) \quad f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + c,$$

gdzie

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0).$$

Funkcja g jest ciągła jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych (Twierdzenie 1), zatem z (17) wynika, że funkcja f jest różniczkowalna i spełnia (15). Aby udowodnić jednostajną zbieżność ciągu $\{f_n\}$ oprzemy się na twierdzeniu 2. Zastępując w (16) n przez k i odejmując stronami dostajemy

$$(18) \quad f_n(x) - f_k(x) = \int_{x_0}^x (f'_n(t) - f'_k(t)) dt + f_n(x_0) - f_k(x_0) \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Na mocy założenia (i) ciąg $\{f'_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{I} , spełnia więc jednostajny warunek Cauchy'ego. Oznacza to, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N_1 tak, by dla $n, k > N_1$ i dowolnego $t \in \mathbb{I}$ zachodziła nierówność

$$(19) \quad |f'_n(t) - f'_k(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Ponadto z założenia (ii) wynika, że ciąg liczbowy $\{f_n(x_0)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego (por. rozdz. II §2 punkt 6), zatem do $\varepsilon > 0$ można dobrać N_2 tak, by dla $n, k > N_2$ zachodziła nierówność

$$(20) \quad |f_n(x_0) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z (18), (19), (20) dostajemy

$$|f_n(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$$

dla $n, k > N = \max(N_1, N_2)$ i dowolnego $x \in \mathbb{I}$. Ciąg $\{f_n\}$ spełnia więc jednostajny warunek Cauchy'ego w przedziale \mathbb{I} , zatem jest jednostajnie zbieżny w tym przedziale na mocy twierdzenia 2. \square

6. Twierdzenie Diniego. Wiemy już, że

1^o granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą,
ale

2^o istnieją ciągi funkcji ciągłych zbieżne do funkcji ciągłej w sposób niejednostajny (Przykłady 3, 4, 5).

Jeżeli jednak założymy dodatkowo monotoniczność ciągu funkcyjnego, to z ciągłości granicy wynika, że zbieżność jest jednostajna. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 5 (Dinięgo).¹ Załóźmy, że ciąg funkcji ciągłych $\{f_n\}$ jest zbieźny punktowo w przedziale $[a, b]$ do funkcji ciągłej f , przy czym spełniony jest jeden z warunków

(i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ dla kaźdego $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$

lub

(ii) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ dla kaźdego $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale } [a, b].$$

DOWÓD. Udowodnimy twierdzenie przy założeniu (i). Oznaczając

$$\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) \quad (x \in [a, b])$$

widzimy, że

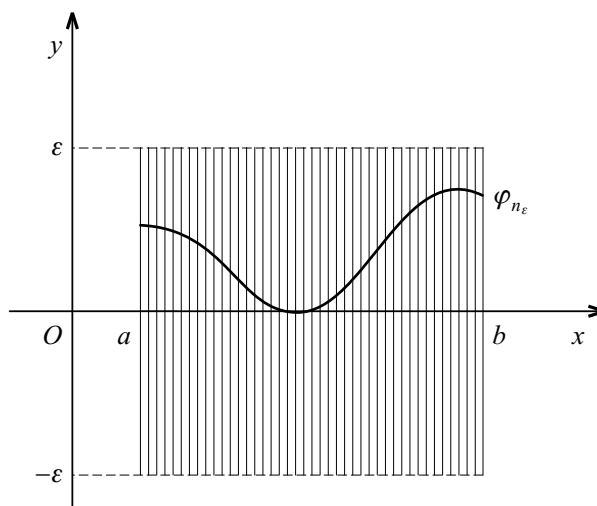
$$(21) \quad \varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \geq 0 \quad \text{dla } x \in [a, b], n \in \mathbb{N}$$

oraz że

$$(22) \quad \varphi_n \rightarrow 0 \quad \text{w przedziale } [a, b].$$

Należy udowodnić, że zbieźność (22) jest jednostajna, przy czym z uwagi na (21) dowód sprowadza się do wykazania, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, by dla wszystkich $x \in [a, b]$ zachodziła nierówność

$$0 \leq \varphi_{n_\varepsilon}(x) < \varepsilon.$$



[rys. 94]

¹Ulisses Dini (1845 - 1918), matematyk włoski, profesor uniwersytetu w Pizie. Autor prac z teorii funkcji rzeczywistych, funkcji analitycznych, teorii powierzchni i równań różniczkowych cząstkowych.

Sformułowany warunek oznacza geometrycznie, że przy dowolnie danym $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja φ_{n_ε} której wykres zawarty jest w pasie epsilonowym (dokładniej - w jego górnej połowie, por. rys.94).

Przeprowadzimy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że podany warunek nie jest spełniony, co oznacza, że przy pewnym $\varepsilon_0 > 0$ wykres żadnej funkcji φ_n nie leży całkowicie w pasie epsilonowym dla $\varepsilon = \varepsilon_0$. Innymi słowy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją funkcja φ_n oraz punkt $x_n \in [a, b]$ takie, że

$$(23) \quad \varphi_n(x_n) \geq \varepsilon_0.$$

Zgodnie z twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa (twierdzenie 4 rozdz. II §2) z ciągu $\{x_n\}$ można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$ taki, że

$$(24) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b].$$

Ponieważ funkcje φ_n są ciągłe, z (24) wynika, że przy dowolnie ustalonym m

$$(25) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0).$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych k mamy

$$n_k \geq m,$$

a zatem na mocy (21)

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k})$$

czyli zgodnie z (23)

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0.$$

Przechodząc do granicy przy $k \rightarrow \infty$ i korzystając z (25) stwierdzamy, że

$$\varphi_m(x_0) \geq \varepsilon_0 > 0$$

przy dowolnie ustalonym m , co przeczy warunkowi (22).

Dowód jednostajnej zbieżności przy założeniu (i) został w ten sposób zakończony. Dowód przy założeniu (ii) przebiega podobnie i proponujemy, by Czytelnik przeprowadził go samodzielnie jako ćwiczenie. \square

7*. Przejście do granicy w całce Riemanna - Stieltjesa. Twierdzenie 3 o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki przenosi się bez istotnych zmian na przypadek całki Riemanna -Stieltjesa względem ustalonej funkcji g . Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 6. *Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[a, b]$ do funkcji f zaś g jest funkcją o wahanii skończonym w tym przedziale, to*

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg.$$

DOWÓD. Z twierdzenia 1 wynika, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, zatem całki po obu stronach (26) istnieją. Możemy również założyć, że $W_a^b(g) \neq 0$ gdyż w przeciwnym wypadku funkcja g jest stała i obie całki znikają (por. zadanie 18 rozdz. V §6 i zadanie 6 rozdz. V §7), zatem równość (26) jest spełniona w sposób oczywisty. Ponieważ

$$f_n \Rightarrow f,$$

do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$(27) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{W_a^b(g)}$$

dla wszystkich $x \in [a, b]$. Opierając się na twierdzeniu 15 rozdz. V §7 dostajemy oszacowanie

$$\left| \int_a^b f_n dg - \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f_n - f| dg < \varepsilon$$

dla $n > N$ co kończy dowód. □

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że*

- (i) *funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$,*
- (ii) *funkcje g_n ($n \in \mathbb{N}$) mają wspólnie ograniczone wanie na przedziale $[a, b]$ tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że*

$$(28) \quad W_a^b(g_n) \leq M \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \text{ dla } x \in [a, b].$$

Wówczas g ma skończone wanie na przedziale $[a, b]$ i zachodzi równość

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg.$$

DOWÓD. Dla dowolnie ustalonego podziału

$$(30) \quad \Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

i dowolnie ustalonego n mamy

$$V(\Pi, g_n) = \sum_{j=1}^k |g_n(x_j) - g_n(x_{j-1})| \leq M$$

co po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ daje

$$V(\Pi, g) \leq M.$$

Ponieważ podział Π był dowolnie obrany, ostatnia nierówność oznacza, że

$$(31) \quad \sup_{\Pi} V(\Pi, g) = W_a^b(g) \leq M.$$

Zatem g jest funkcją o wahanu skończonym w przedziale $[a, b]$ i wobec tego całka po prawej stronie (29) istnieje.

Przejdziemy teraz do oszacowania różnicy

$$A_n = \int_a^b f dg - \int_a^b f dg_n.$$

Dla ustalonego podziału Π określonego nierównościami (30) mamy

$$(32) \quad \int_a^b f dg = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(x_j)) dg(x) + \sum_{j=1}^k f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} dg(x)$$

i podobnie

$$(33) \quad \int_a^b f dg_n = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(x_j)) dg_n(x) + \sum_{j=1}^k f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} dg_n(x).$$

Ponieważ (por. zadanie 7 rozdz. V §7)

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} dg(x) = g(x_j) - g(x_{j-1}), \quad \int_{x_{j-1}}^{x_j} dg_n(x) = g_n(x_j) - g_n(x_{j-1}),$$

dostajemy po uwzględnieniu (32), (33)

$$(34) \quad A_n = B + C_n + D_n,$$

gdzie

$$B = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(x_j)) dg(x),$$

$$C_n = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x_j) - f(x)) dg_n(x),$$

$$D_n = \sum_{j=1}^k f(x_j) (g(x_j) - g(x_{j-1}) - g_n(x_j) + g_n(x_{j-1})).$$

Z założenia ciągłości funkcji f w przedziale domkniętym $[a, b]$ wynika, że jest ona w tym przedziale jednostajnie ciągła (por. rozdz. III §3 punkt 5), zatem do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by z warunku

$$(35) \quad d(\Pi) < \delta$$

wynikała nierówność

$$(36) \quad |f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

dla $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Ustalmy teraz podział Π w taki sposób, by spełniony był warunek (35). Opierając się na twierdzeniu 15 rozdz. V §7 dostajemy wobec (36)

$$|B| \leq \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{j=1}^k W_{x_{j-1}}^{x_j}(g), \quad |C_n| \leq \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{j=1}^k W_{x_{j-1}}^{x_j}(g_n),$$

skąd po zastosowaniu twierdzenia 4 rozdz. V §6 oraz nierówności (28), (31) wynika, że

$$(37) \quad |B| \leq \frac{\varepsilon}{3M} W_a^b(g) \leq \frac{1}{3}\varepsilon, \quad |C_n| \leq \frac{\varepsilon}{3M} W_a^b(g_n) \leq \frac{1}{3}\varepsilon$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Natomiast z założenia (iii) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0,$$

zatem do ε można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(38) \quad |D_n| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Równość (34) łącznie z nierównościami (37), (38) zapewnia oszacowanie

$$|A_n| < \varepsilon$$

dla $n > N$, a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0.$$

Ostatnia równość daje tezę (29). □

Opierając się na ostatnim twierdzeniu można łatwo udowodnić

Twierdzenie 8. Załóżmy, że

- (i) funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$,
- (ii) funkcje g_n są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalne w przedziale otwartym (a, b) ,
- (iii) pochodne g'_n są wspólnie ograniczone tzn. istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$|g'_n(x)| \leq A \quad \text{dla } x \in (a, b), n \in \mathbb{N}.$$

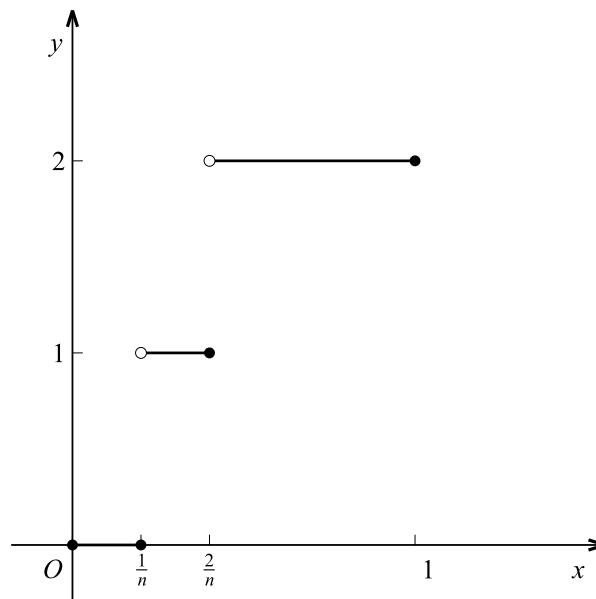
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ dla $x \in [a, b]$.

Wówczas funkcje g_n, g mają skończone wahanie na przedziale $[a, b]$ i zachodzi równość (29).

DOWÓD. Rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2 rozdz. V §6 stwierdzamy, że

$$W_a^b(g_n) \leq A(b - a).$$

Wobec tego funkcje g_n mają skończone wahanie i spełniają założenie (ii) twierdzenia 7, przy czym $M = A(b - a)$. Pozostałe założenia twierdzenia 7 są również spełnione i stąd wynika (29). \square



[rys. 95]

Przykład 7. Niech (rys. 95) dla $n > 2$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{dla } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}, \\ 2 & \text{dla } \frac{2}{n} < x \leq 1, \end{cases}$$

wówczas dla dowolnie ustalonego $x \in (0, 1]$

$$g_n(x) = 2 \quad \text{dla} \quad n > \frac{2}{x}$$

i stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Ponadto

$$W_0^1(g_n) = 2 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

a więc funkcje g_n mają wspólnie ograniczone wahanie na przedziale $[0, 1]$, zatem zgodnie z twierdzeniem 12 rozdz. V §7 (por. również Wniosek 1 z tego twierdzenia) mamy dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[0, 1]$

$$\int_0^1 f dg_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right),$$

skąd po przejściu do granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f dg_n = 2f(0),$$

ponadto

$$\int_0^1 f dg = 2f(0).$$

Jak widać, równość (29) jest spełniona.

8*. Przejście do granicy w całce Riemanna z funkcji ograniczonej. Twierdzenie 3 o całkowaniu jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych przenosi się bez zmian na przypadek gdy funkcje f_n są, być może, nieciągłe a jedynie ograniczone i całkwalne w sensie Riemanna. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 9. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji całkwalnych na przedziale $[a, b]$ i niech

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale} \quad [a, b].$$

Wówczas funkcja f jest całkwalna na przedziale $[a, b]$ i zachodzi równość

$$(39) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

DOWÓD. Z założenia jednostajnej zbieżności wynika, że do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$(40) \quad |f(x) - f_n(x)| < \eta$$

dla wszystkich $x \in [a, b]$. Ustalmy liczbę n i zapiszmy nierówność (40) w równoważnej postaci

$$(41) \quad f_n(x) - \eta < f(x) < f_n(x) + \eta \quad (x \in [a, b]).$$

Z założenia funkcja f_n jest ograniczona, z nierówności (41) wynika zatem, że tą samą własność ma funkcja f - możemy więc badać jej całkowalność w sensie Riemanna.

Ponieważ rozważana funkcja f_n jest całkowalna, zgodnie z twierdzeniem 4 rozdz.V §5 do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać podział Π odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

tak, by zachodziło oszacowanie

$$(42) \quad G(\Pi, f_n) - D(\Pi, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad M_{n,j} = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f_n,$$

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad m_{n,j} = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f_n,$$

wówczas na mocy twierdzeń 16 -18 rozdz. III §3 dostajemy z nierówności (41)

$$M_j \leq M_{n,j} + \eta, \quad m_j \geq m_{n,j} - \eta \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

a stąd

$$(43) \quad G(\Pi, f) \leq G(\Pi, f_n) + \eta(b - a), \quad D(\Pi, f) \geq D(\Pi, f_n) - \eta(b - a).$$

Z nierówności (43) wynika, że

$$(44) \quad G(\Pi, f) - D(\Pi, f) \leq G(\Pi, f_n) - D(\Pi, f_n) + 2\eta(b - a).$$

Przyjmując

$$\eta = \frac{\varepsilon}{3(b - a)}$$

z nierówności (42), (44) otrzymujemy

$$G(\Pi, f) - D(\Pi, f) < \varepsilon,$$

a to oznacza, że funkcja f jest całkowalna. Dowód równości (39) przebiega tak samo jak dowód twierdzenia 3 i pozostawiamy go Czytelnikowi. \square

9. Szeregi funkcyjne - zbieżność punktowa i jednostajna. Szeregiem funkcyjnym nazywamy szereg

$$(45) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

którego wyrazy są funkcjami określonymi w pewnym ustalonym przedziale \mathbb{I} (ograniczonym lub nie). Niech

$$S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) \quad (x \in \mathbb{I}; \quad n \in \mathbb{N})$$

będzie n -tą sumą częściową szeregu (45). Mówimy, że szereg (45)

1^o jest *zbieżny punktowo w przedziale \mathbb{I}* , jeżeli ciąg funkcyjny $\{S_n\}$ jest zbieżny punktowo w tym przedziale;

2^o jest *zbieżny jednostajnie w przedziale \mathbb{I}* , jeżeli ciąg funkcyjny $\{S_n\}$ jest zbieżny jednostajnie w tym przedziale.

Z twierdzenia 2 wynika natychmiast

Twierdzenie 10. Szereg funkcyjny (45) jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{I} wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ i dowolnego $p \in \mathbb{N}$ zachodziła nierówność

$$(46) \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{I}$.

DOWÓD. Wystarczy w nierówności (10) przyjąć

$$f_n(x) = S_n(x), \quad f_k(x) = S_k(x), \quad k = p + n.$$

□

Warunek konieczny i dostateczny jednostajnej zbieżności sformułowany w twierdzeniu 10 nazywamy *jednostajnym warunkiem Cauchy'ego dla szeregów*.

Przyjmując $p = 1$ w nierówności (46) otrzymujemy jako wniosek warunek konieczny jednostajnej zbieżności szeregu:

Twierdzenie 11. Jeżeli szereg (45) jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{I} to

$$u_n \Rightarrow 0 \quad \text{w przedziale } \mathbb{I}.$$

□

Z udowodnionych poprzednio twierdzeń dla ciągów funkcyjnych wynikają odpowiednie twierdzenia dla szeregów funkcyjnych. Mamy mianowicie

Twierdzenie 12. Załóżmy, że szereg jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{I} i że jego wyrazy u_n ($n \in \mathbb{N}$) są funkcjami ciągłymi w \mathbb{I} i niech

$$(47) \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Wówczas funkcja u jest ciągła w przedziale \mathbb{I} .

Twierdzenie 13. Niech \mathbb{P} będzie przedziałem domkniętym $[a, b]$. Wówczas przy założeniach twierdzenia 12

$$(48) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b u(x) dx.$$

Twierdzenie 14. Załóżmy, że

- (i) wyrazy $u_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) szeregu (45) są klasy C^1 w przedziale $\mathbb{P} = [a, b]$,
- (ii) szereg zrózniczkowany

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny w \mathbb{P} ,

- (iii) istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{P}$ taki, że szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

jest zbieżny.

Wówczas szereg (45) jest jednostajnie zbieżny w \mathbb{P} i przy oznaczeniach

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = v(x) \quad (x \in \mathbb{P})$$

zachodzi równość

$$(49) \quad u'(x) = v(x) \quad (x \in \mathbb{P}).$$

Dowody twierdzeń 12 - 14 otrzymujemy stosując odpowiednio twierdzenia 1, 3, 4 do ciągu funkcyjnego $\{S_n\}$. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi. \square

Uwaga. Równości (48), (49) można zapisać inaczej w postaci

$$(48') \quad \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx,$$

$$(49') \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Twierdzenia 13, 14 podają więc warunki dostateczne do tego, by szereg funkcyjny można było całkować względnie różniczkować wyraz za wyrazem.

10. Kryteria jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych. Jak widzimy, stwierdzenie jednostajnej zbieżności szeregu jest ważne ze względów rachunkowych. Podamy teraz warunki dostateczne (czyli kryteria) jednostajnej zbieżności.

Twierdzenie 15 (kryterium Weierstrassa). *Jeżeli*

$$(50) \quad |u_n(x)| \leq a_n \quad \text{dla } x \in \mathbb{P} \quad (n \in \mathbb{N})$$

i szereg o stałych wyrazach

$$(51) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to szereg (45) jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} .

DOWÓD. Zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

przy ustalonym $x \in \mathbb{P}$ (czyli bezwzględna zbieżność szeregu (45)) wynika z nierówności (50) na podstawie kryterium porównawczego zbieżności szeregów o wyrazach stałych (twierdzenie 7 rozdz. IV §1). Udowodnimy jednostajną zbieżność szeregu (45). Z nierówności (50) wynika, że

$$(52) \quad |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$$

dla dowolnych $n, p \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{P}$. Szereg (51) jest zbieżny, spełnia więc warunek Cauchy'ego (twierdzenie 6 rozdz. IV §1), zatem do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, że dla $n > N$ suma po prawej stronie (52) jest mniejsza od ε . Wobec tego szereg (45) spełnia w przedziale \mathbb{P} jednostajny warunek Cauchy'ego a więc jest jednostajnie zbieżny zgodnie z twierdzeniem 10. \square

Uwaga. Podobne rozumowanie pozwala stwierdzić, że przy założeniach twierdzenia 15 również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} .

Przykład 8. Jeżeli przyjmiemy

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

to szereg (45) jest zbieżny przy dowolnie ustalonym $x > 1$ (por. Przykład 1 rozdz. IV §2) czyli punktowo zbieżny w przedziale $(1, \infty)$. Jego sumę oznaczamy

$$(53) \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (x > 1)$$

- jest to funkcja ζ (dzeta) Riemanna. Ponieważ

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a} \quad \text{dla } x \geq a$$

na podstawie kryterium Wierstrassa wnioskujemy, że szereg (53) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $\mathbb{P}_a = [a, \infty)$ gdzie $a > 1$. Zgodnie z twierdzeniem 12 funkcja ζ jest zatem ciągła w każdym punkcie $x_0 > a$. Ponieważ do dowolnie ustalonego $x_0 > 1$ można dobrać liczbę a tak, by zachodziła nierówność

$$x_0 > a > 1,$$

funkcja ζ jest ciągła w całym przedziale $(1, \infty)$.

Dowód dalszych kryteriów będzie oparty na *przekształceniu Abela* (por. rozdz. IV §3 punkt 1) które polega na zapisaniu sumy

$$S = \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j$$

w postaci

$$(54) \quad S = \alpha_m B_m + \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) B_j,$$

gdzie

$$B_r = \beta_1 + \dots + \beta_r \quad (1 \leq r \leq m).$$

Udowodnimy najpierw

Lemat. Załóżmy, że

- (i) ciąg skończony $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ jest monotoniczny,
- (ii) zachodzi nierówność

$$|B_r| \leq M \quad \text{dla } r = 1, 2, \dots, m.$$

Wówczas

$$(55) \quad |S| \leq M \left(|\alpha_1| + 2|\alpha_m| \right).$$

DOWÓD. Z przedstawienia sumy S w postaci (54) wynika, że

$$|S| \leq M \left(\sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j - \alpha_{j+1}| + |\alpha_m| \right).$$

Oznaczając przez A wyrażenie w nawiasie po prawej stronie mamy

$$A = \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) + |\alpha_m| = \alpha_m - \alpha_1 + |\alpha_m|,$$

gdy ciąg $\{\alpha_j\}$ jest rosnący oraz

$$A = \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) + |\alpha_m| = \alpha_1 - \alpha_m + |\alpha_m|,$$

gdy ciąg $\{\alpha_j\}$ jest malejący. W obu przypadkach

$$A \leq |\alpha_1| + 2|\alpha_m|$$

skąd wynika (55). □

Przejdźmy teraz do sformułowania i dowodu dalszych kryteriów jednostajnej zbieżności.

Twierdzenie 16 (kryterium Abela). *Założmy, że*

- (i) *ciąg $\{a_n(x)\}$ jest monotoniczny przy dowolnie ustalonym $x \in \mathbb{P}$,*
- (ii) *istnieje stała $K > 0$ taka, że*

$$|a_n(x)| \leq K \quad \text{dla } x \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N},$$

- (iii) *szereg*

$$(56) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} .

Wówczas szereg

$$(57) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

jest również jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} .

DOWÓD. Jako sumę podlegającą przekształceniu Abela obierzemy odcinek szeregu (57)

$$S_{n,m}(x) = \sum_{j=1}^m a_{n+j}(x)b_{n+j}(x).$$

Przyjmując

$$\alpha_j(x) = a_{n+j}(x), \quad \beta_j(x) = b_{n+1}(x)$$

mamy

$$B_r(x) = b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+r}(x).$$

Z założenia (iii) wynika zgodnie z twierdzeniem 10, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$, dowolnego $r \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$ zachodziła nierówność

$$|B_r(x)| < \frac{\varepsilon}{3K} = M.$$

Z udowodnionego lematu i założenia (ii) wynika zatem, że

$$|S_{n,m}| < \frac{\varepsilon}{3K} (|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+m}(x)|) \leq \varepsilon$$

dla $n > N$, dowolnego $m \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$, przy czym liczba N jest dobrana tylko do ε i nie zależy od x . Oznacza to, że szereg (57) spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego a więc jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} . \square

Przykład 9. Zbadamy jednostajną zbieżność szeregu

$$(58) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{x}{n}}{n^{x+\pi}}$$

w przedziale $\mathbb{P} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ponieważ dla $x \in \mathbb{P}$

$$x + \pi \geq \frac{\pi}{2} > 1,$$

szereg o wyrazie ogólnym

$$b_n(x) = \frac{1}{n^{x+\pi}}$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} (por. Przykład 8). Natomiast ciąg

$$a_n(x) = \cos \frac{x}{n}$$

jest rosnący dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{P}$ i przy tym

$$\left| \cos \frac{x}{n} \right| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{P}, \quad n \in \mathbb{N}).$$

Na podstawie kryterium Abela wnioskujemy, że szereg (58) jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} .

Twierdzenie 17 (kryterium Dirichleta). Załóżmy, że

- (i) $a_n \rightrightarrows 0$ w przedziale \mathbb{P} ,
- (ii) przy dowolnie ustalonym $x \in \mathbb{P}$ ciąg $\{a_n(x)\}$ jest monotoniczny,
- (iii) ciąg sum częściowych szeregu (56) jest ograniczony w przedziale \mathbb{P} tzn. istnieje stała $K > 0$ taka, że

$$|S_n(x)| \leq K \quad \text{dla } x \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N},$$

gdzie

$$S_n(x) = b_1(x) + \cdots + b_n(x).$$

Wówczas szereg (57) jest jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} .

DOWÓD. Przy oznaczeniach wprowadzonych w dowodzie twierdzenia 16 mamy

$$B_r(x) = S_{n+r}(x) - S_n(x),$$

zatem z założenia (iii)

$$|B_r(x)| \leq 2K = M \quad (r = 1, \dots, m),$$

ponadto z założenia (i) wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$ zachodziła nierówność

$$|\alpha_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3K} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Stosując lemat otrzymujemy zatem

$$|S_{n,m}(x)| \leq 2K(|\alpha_1(x)| + 2|\alpha_m(x)|) < 2K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

dla $n > N$, dowolnego $m \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in \mathbb{P}$, przy czym liczba N jest dobrana tylko do ε i nie zależy od x . Oznacza to, że szereg (57) spełnia w przedziale \mathbb{P} jednostajny warunek Cauchy'ego, jest więc jednostajnie zbieżny w tym przedziale. \square

W przypadku, gdy $\{a_n\}$ jest ciągiem o stałych wyrazach, kryterium Dirichleta przybiera prostszą postać:

Twierdzenie 18. Załóżmy, że

- 1^o ciąg $\{a_n\}$ jest monotoniczny i zbieżny do zera,
- 2^o spełnione jest założenie (iii) twierdzenia 17.

Wówczas szereg (57) jest jednostajnie zbieżny.

DOWÓD wynika natychmiast z twierdzenia 17, wystarczy zauważyć, że ciąg zbieżny o stałych wyrazach jest jednostajnie zbieżny (por. zadanie 3). \square

Przykład 10. Opierając się na kryterium Dirichleta udowodnimy jednostajną zbieżność szeregów

$$(59) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gdzie $\{a_n\}$ jest ciągiem monotonicznym i zbieżnym do zera. Niech

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k \sin nx, \quad T_k(x) = \sum_{n=1}^k \cos nx.$$

Jak wykazaliśmy w Przykładzie 1 rozdz. IV §3, zachodzą nierówności

$$|S_k| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad |T_k| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

dla $x \neq 2r\pi$ (r całkowite), wobec tego założenie (iii) twierdzenia 17 jest spełnione w każdym przedziale

$$\mathbb{P}_r = [2\pi r + \alpha, 2\pi(r+1) - \alpha] \quad (\alpha > 0, \quad r \text{ całkowite}).$$

Zgodnie z twierdzeniem 18 w każdym z tych przedziałów oba szeregi (59) są jednostajnie zbieżne.

Zadania.

1. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych zbieżnym do zera i niech

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{P}.$$

Udowodnić, że

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{w przedziale } \mathbb{P}.$$

2. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem jednostajnie zbieżnym w przedziale \mathbb{P} a g funkcją ograniczoną w tym przedziale. Udowodnić, że ciąg $\{g f_n\}$ jest również jednostajnie zbieżny.

3. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji określonych w przedziale \mathbb{P} takim, że

$$f_n(x) = b_n \quad (x \in \mathbb{P})$$

począwszy od pewnego $n = n_0$. Udowodnić, że

1^o ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo w \mathbb{P} wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny;
2^o jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g,$$

to ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie w \mathbb{P} do funkcji stałej

$$f(x) = g \quad (x \in \mathbb{P}).$$

4. Udowodnić, że ciąg jednostajnie zbieżny w każdym z przedziałów $[a, b]$, $[b, c]$ jest również jednostajnie zbieżny w przedziale $[a, c]$. Uogólnić na przypadek dowolnej skończonej ilości przedziałów.

5. Udowodnić, że ciąg jednostajnie zbieżny w przedziale \mathbb{P} jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}$.

6. Zbadać zbieżność ciągu

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$$

(punktową i jednostajną) w następujących przedziałach:

$$\mathbb{P}_1 = [0, \infty), \quad \mathbb{P}_2 = [a, \infty), \quad \mathbb{P}_3 = (-\infty, -a], \quad \mathbb{P}_4 = (-\infty, 0] \quad (a > 0).$$

Wskazówka. Zacząć od naszkicowania wykresu funkcji f_n . W dowodzie jednostajnej zbieżności oprzeć się na zadaniu 1.

7. Zbadać zbieżność punktową ciągu

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

w przedziale

$$\text{a.) } \mathbb{P} = [0, 2], \quad \text{b.) } \mathbb{P} = (-\infty, 0), \quad \text{c.) } \mathbb{P} = (2, \infty).$$

W jakich przedziałach zbieżność ta jest jednostajna?

Wskazówka. W punkcie a.) zbadać najpierw zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

W celu zbadania jednostajnej zbieżności naszkicować wykres funkcji f_n przy ustalonym n , następnie skorzystać z zadań 1 i 3.

8. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu

$$\begin{aligned} \text{a.) } f_n(x) &= (1 - x^2)^n, & \text{b.) } f_n(x) &= x^n(1 - x^n), \\ \text{c.) } f_n(x) &= x^n(1 - x) & (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wskazówka. W celu zbadania jednostajnej zbieżności naszkicować wykres funkcji f_n przy ustalonym n , następnie skorzystać z zadań 1, 3.

9. Znaleźć granicę punktową dla $x \in \mathbb{R}$ ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

i wykazać, że zbieżność jest jednostajna na całej osi rzeczywistej.

Wskazówka. Zacząć od narysowania wykresu funkcji f_n przy ustalonym n . W dowodzie jednostajnej zbieżności oprzeć się na zadaniu 1.

10. Znaleźć granicę punktową f ciągu funkcyjnego

$$\text{a.) } f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad \text{b.) } f_n(x) = \arctg nx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Wykazać, że zbieżność nie jest jednostajna na całej osi rzeczywistej, natomiast jest jednostajna w każdym przedziale (ograniczonym lub nie) nie zawierającym zera. W punkcie a.) obliczyć dla dowolnego $c > 0$

$$\int_0^c f(x) dx \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c f_n(x) dx$$

i porównać wynik z twierdzeniem 3.

Wskazówka. Zacząć od narysowania wykresu funkcji f_n przy ustalonym n . W dowodzie jednostajnej zbieżności oprzeć się na zadaniu 1.

11. Rozważmy ciągi funkcyjne

$$\text{(i) } f_n(x) = \begin{cases} nx(\frac{1}{n} - x) & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{n} < x \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{(ii) } f_n(x) = \begin{cases} n^2x(\frac{1}{n} - x) & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{n} < x \leq 1; \end{cases}$$

(iii) f_n jest funkcją liniową w każdym z przedziałów

$$[0, \frac{1}{2^{n+1}}], \quad [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}], \quad [\frac{1}{2^n}, 1]$$

spełniającą warunki

$$f_n(0) = f_n(\frac{1}{2^n}) = f_n(1) = 0, \quad f_n(\frac{1}{2^{n+1}}) = 1;$$

(iv) $f_n(\frac{1}{2^{n+1}}) = 2^{n+1}$, poza tym jak w punkcie (iii).

Obliczyć granicę punktową

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

i granicę całek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Sprawdzić

- a.) czy zbieżność jest jednostajna,
b.) czy zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Porównać z twierdzeniem 3.

Wskazówka. Punkt a.) zacząć od sporządzenia wykresu funkcji f_n przy ustalonym n .

12. Rozważmy ciąg funkcyjny

$$(i) \quad f_n(x) = \begin{cases} 2nx^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ -2nx^2 + 4x - \frac{1}{n} & \text{dla } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{n} & \text{dla } \frac{1}{n} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$(ii) \quad f_n(x) = \begin{cases} n(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}nx^3) & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{6n} & \text{dla } \frac{1}{n} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$(iii) \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2nx - \frac{1}{2}n^2x^2 - 1 & \text{dla } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 1 & \text{dla } \frac{2}{n} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$(n \geq 2).$$

Sprawdzić, że

- a.) przy ustalonym n funkcja f_n jest klasy C^1 w przedziale $[0, 1]$,
b.) istnieją granice punktowe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

Następnie zbadać, czy ciągi $\{f_n\}$, $\{f'_n\}$ są zbieżne jednostajnie oraz czy zachodzi równość

$$f'(x) = g(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

Porównać z twierdzeniem 4.

13. Ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ nazywamy *niemal jednostajnie zbieżnym* w przedziale \mathbb{I} , jeżeli jest on jednostajnie zbieżny w każdym przedziale domkniętym i ograniczonym $[a, b] \subset \mathbb{I}$. Udowodnić, że granica ciągu funkcji ciągłych niemal jednostajnie zbieżnego w przedziale \mathbb{I} jest również ciągła w \mathbb{I} .

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 1.

14. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Oznaczmy przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kd_n \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

i niech f_n będzie funkcją liniową w każdym z przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ spełniającą warunki

$$f_n(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Podać sens geometryczny funkcji f_n i udowodnić, że

$$f_n \Rightarrow f$$

w przedziale $[a, b]$. Narysować wykres f_n dla $n = 1, 2, 3$.

Wskazówka. Wykorzystać jednostajną ciągłość funkcji f (por. rozdz. III §3 punkt 5, w szczególności twierdzenie 9).

15. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym punktowo do funkcji f w przedziale $[a, b]$. Zakładamy, że

- 1^o funkcje f_n, f są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalne wewnątrz tego przedziału,
2^o istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$|f'_n(x)| \leq A, \quad |f'(x)| \leq A \quad \text{dla } x \in (a, b), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$f_n \Rightarrow f \quad \text{w przedziale } [a, b].$$

Wskazówka. Zacząć od przypadku

$$f(x) = 0 \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

i zauważyć, że funkcje f_n są jednakowo ciągłe tzn. do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, że z warunku

$$x_1, x_2 \in [a, b], \quad |x_1 - x_2| < \delta$$

wynika nierówność

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

16*. Mówimy, że $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji o wahaniu wspólnie ograniczonym w przedziale $[a, b]$ jeżeli istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$W_a^b(f_n) \leq A \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Podać przykład ciągu $\{f_n\}$ funkcji kawałkami gładkich o wahaniu wspólnie ograniczonym w przedziale $[0, 1]$ zbieżnego punktowo ale nie jednostajnie do funkcji stałej. Porównać z zadaniem 14.

17*. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$ takim, że dla pewnego $x_0 \in [a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0.$$

a.) Udowodnić, że z warunku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_a^b(f_n) = 0$$

wynika

$$f_n \rightrightarrows 0 \quad \text{w przedziale } [a, b].$$

b.) Na przykładzie ciągu

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx \quad (x \in [0, \pi])$$

pokazać, że wynikanie odwrotne nie zachodzi.

Wskazówka. W punkcie b.) oszacować z dołu wahanie $W_0^\pi(f_n)$ dobierając odpowiednio podział odcinka $[0, \pi]$. W dowodzie jednostajnej zbieżności oprzeć się na zadaniu 1.

18*. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym punktowo do funkcji ciągłej f w przedziale $[a, b]$. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji g kawałkami stałej w przedziale $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg.$$

Wskazówka. Oprzeć się na wniosku 1 rozdz. V §7.

19*. Niech $\{g_n\}$ będzie ciągiem funkcji o wahaniu wspólnie ograniczonym (por. zadanie 16) zbieżnym punktowo w przedziale $[a, b]$ do funkcji stałej. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_n = 0.$$

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 7, następnie skorzystać z zadania 6 rozdz. V §7.

20*. Niech g będzie funkcją o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$ i niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych względem funkcji g na tym przedziale (por. rozdz. V §7) zbieżnym jednostajnie do funkcji f . Udowodnić, że

- 1^o funkcja f również jest całkowalna względem funkcji g na przedziale $[a, b]$,
- 2^o zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg.$$

Wskazówka. Zacząć od przypadku gdy g jest funkcją rosnącą i zmodyfikować dowód twierdzenia 9.

21*. Niech

$$\text{a.) } f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{x}(1-nx) & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = x\sqrt{x};$$

$$\text{b.) } f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ 1-nx & \text{dla } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = 2x + 1;$$

c.) f_n jak w punkcie b.), $g(x) = x^2$.

Opierając się na twierdzeniu 11 rozdz. V §7 obliczyć całkę

$$K_n = \int_0^1 f_n dg$$

i znaleźć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n.$$

Następnie znaleźć granice ciągów funkcyjnych $\{f_n\}$ oraz $\{f_n g'\}$ i zbadać rodzaj zbieżności. Wynik porównać z twierdzeniem 6.

Wskazówka. Naszkicować wykres funkcji f_n i $h_n = f_n g'$ przy ustalonym n .

22. Niech

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

Dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{R}$ znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

i wykazać, że zbieżność ta nie jest jednostajna w żadnym przedziale $[0, a]$, natomiast jest jednostajna w każdym przedziale $(-\infty, -a]$ oraz $[a, \infty)$ (gdzie $a > 0$). Następnie obliczyć całki

$$K_n = \int_0^1 f_n dx, \quad K = \int_0^1 f dx$$

i sprawdzić, że zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K.$$

Porównać z twierdzeniem 9.

Wskazówka. Zacząć od narysowania wykresu funkcji f_n przy ustalonym n . W dowodzie jednostajnej zbieżności skorzystać z zadania 1. Przy obliczaniu całki K oprzeć się na twierdzeniu 20 rozdz. V §5

23*. Zbadać zachowanie się ciągów

$$f_n(x) = \cos(2\pi nx), \quad g_n(x) = \sin(2\pi nx)$$

w zależności od $x \in \mathbb{R}$ i wykazać, że

a.) ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny tylko wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą,

b.) ciąg $\{g_n(x)\}$ jest zbieżny tylko wtedy, gdy $x = \frac{p}{2}$ gdzie p jest liczbą całkowitą.

Wskazówka. Oprzeć się na własnościach ciągu $a_n = \{nx\}$ omówionych w rozdz. II §2 punkt 8 i na wzorach redukcyjnych

$$\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha), \quad \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha), \quad \sin(2\pi - \alpha) = \sin(\pi + \alpha).$$

24. Znaleźć sumy szeregów

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Wskazówka. Wprowadzając pomocnicze funkcje

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k, \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k,$$

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^n k^2 x^k, \quad j_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^k$$

zauważyć najpierw, że wyrażenia

$$g_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad h_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad j_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

stanowią sumy częściowe podanych szeregów - zadanie sprowadza się zatem do obliczenia granicy ciągów funkcyjnych $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, $\{j_n\}$ w punkcie $x = \frac{1}{2}$. Następnie zauważyć, że związki

$$g_n(x) = x f_n'(x), \quad h_n(x) = x g_n'(x), \quad j_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt + x$$

pozwalają obliczyć sumy $g_n(x)$, $h_n(x)$, $j_n(x)$. Przy obliczaniu granic ciągów $\{g_n(\frac{1}{2})\}$, $\{h_n(\frac{1}{2})\}$ wykorzystać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

dla $x = \frac{1}{2}$, natomiast przy obliczaniu granicy ciągu $\{j_n(\frac{1}{2})\}$ oprzeć się na twierdzeniu 3 i skorzystać z zadania 1.

25. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

W jakich przedziałach jest on zbieżny jednostajnie?

26. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+2x^2)\cdots(1+nx^2)}$$

jest

- a.) bezwzględnie zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- b.) jednostajnie zbieżny w każdym przedziale ograniczonym nie zawierającym zera.

27. Niech

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{x^2} + n \right) n(n+1)(n+2) \right]^{-\frac{1}{3}}.$$

Okazać, że

- a.) funkcja g jest określona dla wszystkich $x \neq 0$ (tzn. szereg jest zbieżny dla tych wartości x),

- b.) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Wskazówka. Zauważyć, że po odpowiednim przekształceniu n -tego wyrazu otrzymujemy szereg jednostajnie zbieżny na całej osi rzeczywistej, następnie oprzeć się na twierdzeniu 12.

28. Udowodnić, że funkcja

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+(nx)^2}$$

jest

- a.) określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- b.) ciągła dla $x \neq 0$, nieciągła w punkcie $x = 0$.

Wskazówka. Udowodnić jednostajną zbieżność szeregu w każdym przedziale nie zawierającym zera, następnie wykazać nierówność

$$g\left(\frac{1}{m}\right) > \frac{1}{2} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

29. Opierając się na równości

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} = \frac{x}{1+x} \quad (x > 1)$$

(uzasadnić ją!) okazać, że

$$\log \frac{b(1+a)}{a(1+b)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n} \right)$$

dla dowolnych $1 < a < b$.

Wskazówka. Okazać najpierw, że szereg jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[a, b]$.

30. Udowodnić bezwzględną i jednostajną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right) \sin(nx)}{n^2}$$

na całej osi rzeczywistej.

31. Udowodnić jednostajną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{x}{n}}{n!}$$

w każdym przedziale ograniczonym, stosując

- a.) kryterium Weierstrassa,
- b.) kryterium Abela.

32. Udowodnić jednostajną zbieżność szeregu

$$\text{a.) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{1+nx} \quad \text{w przedziale } [0, 1],$$

$$\text{b.) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n} \quad \text{w przedziale } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{c.) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x+n}{n^2} \quad \text{w każdym przedziale } [0, a], a > 0.$$

33. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin x}{n} \quad x \in \mathbb{IP} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

jest w przedziale \mathbb{IP} zbieżny jednostajnie ale nie jest w tym przedziale bezwzględnie zbieżny.

§2. Szeregi potęgowe.



1. Zbieżność szeregu potęgowego. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Liczby a_n nazywamy *współczynnikami szeregu* (1) zaś liczbę x_0 jego *środkiem* (ten geometryczny termin stanie się zrozumiały w dalszym ciągu wykładu). Zauważmy, że szereg (1) jest zawsze zbieżny dla $x = x_0$, gdyż wtedy redukuje się on do jednego wyrazu a_0 .

Aby zbadać zbieżność szeregu (1) przy ustalonym $x \neq x_0$ spróbujemy zastosować kryterium Cauchy'ego dla szeregów o wyrazach stałych (rozd. IV §2 twierdzenie 4) do szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|,$$

gdzie

$$u_n(x) = a_n (x - x_0)^n.$$

Mamy

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|} |x - x_0|,$$

zatem jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

to

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lambda |x - x_0|$$

i, przy założeniu że $\lambda \neq 0$, na mocy kryterium Cauchy'ego szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla x spełniających nierówność

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lambda} = R,$$

czyli leżących w przedziale otwartym

$$\mathbb{P}_R = (x_0 - R, x_0 + R)$$

(jest to przedział o długości $2R$ i środku x_0).

Dla x leżących poza przedziałem domkniętym $[x_0 - R, x_0 + R]$ mamy z uwagi na (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} > 1,$$

skąd wynika, że dla dużych n zachodzi nierówność

$$|u_n(x)| > 1,$$

szereg (1) nie może być zatem zbieżny, gdyż jego ogólny wyraz nie dąży do 0 (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1). Natomiast na końcach przedziału \mathbb{P}_R kryterium Cauchy'ego nie pozwala rozstrzygnąć zbieżności szeregu (1), gdyż w tych punktach granica (2) jest równa 1. Dokładniejszy opis własności szeregu (1) daje następujące twierdzenie (por. rys. 96):

Twierdzenie 1. Załóżmy, że istnieje granica (skończona lub niewłaściwa)

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda.$$

Wówczas

- (i) gdy $\lambda = \infty$, szereg (1) jest rozbieżny dla każdego $x \neq x_0$;
- (ii) gdy $\lambda = 0$, szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich x i jednostajnie zbieżny w każdym przedziale ograniczonym $[a, b]$;
- (iii) gdy $0 < \lambda < \infty$, szereg (1) jest
 - a.) bezwzględnie zbieżny w przedziale otwartym

$$\mathbb{P} = (x_0 - R, x_0 + R),$$

gdzie

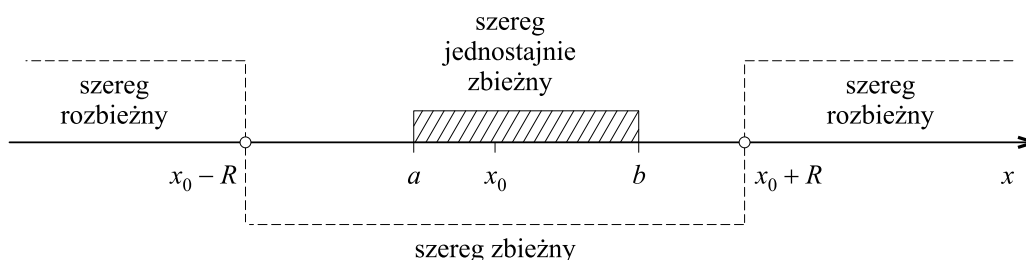
$$(4) \quad R = \frac{1}{\lambda},$$

- b.) rozbieżny poza przedziałem domkniętym

$$[x_0 - R, x_0 + R],$$

- c.) jednostajnie zbieżny w każdym przedziale

$$[a, b] \subset \mathbb{P}.$$



[rys. 96]

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że w przypadku (i) z równości (2) wynika dla $x \neq x_0$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \infty,$$

a stąd

$$|u_n(x)| > 1$$

dla dostatecznie dużych n . Szereg (1) nie może więc być zbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (por. rozdz. IV §1 twierdzenie 8). Natomiast w przypadku (ii) z równości (2) otrzymujemy dla dowolnego x

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = 0,$$

a to na mocy kryterium Cauchy'ego zapewnia bezwzględną zbieżność szeregu (1).

Przejdźmy do przypadku (iii). Jak już zauważyliśmy, z równości (2) wynika, że 1^0 szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla $x \in \mathbb{P}$ - co daje punkt a.) tezy oraz

2^0 szereg (1) jest rozbieżny w każdym punkcie x należącym do zbioru

$$D = \mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R],$$

co daje punkt b.) tezy.

Pozostaje do udowodnienia jednostajna zbieżność szeregu (1). Wystarczy założyć (por. zadanie 5 §1), że przedział $[a, b]$ jest postaci

$$\mathbb{P}_d = [x_0 - d, x_0 + d],$$

gdzie d jest dowolną liczbą w przypadku (ii) lub $0 < d < R$ w przypadku (iii). Mamy wówczas dla $x \in \mathbb{P}_d$ oszacowanie

$$(7) \quad |u_n(x)| \leq |a_n|d^n = |u_n(x_0 + d)|.$$

Ponieważ, jak już wykazaliśmy, szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla $x = x_0 + d$, nierówność (7) zapewnia jednostajną zbieżność szeregu (1) w przedziale \mathbb{P}_d na mocy kryterium Weierstrassa (twierdzenie 15 §1). \square

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego (1) nazywamy

1^0 przedział

$$\mathbb{P} = (x_0 - R, x_0 + R) \quad (R > 0),$$

jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $x \in \mathbb{P}$ i rozbieżny dla x leżących poza przedziałem domkniętym $[x_0 - R, x_0 + R]$;

2^0 przedział $(-\infty, \infty)$, jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Powtarzając rozumowanie przeprowadzone w dowodzie twierdzenia 1 stwierdzamy łatwo, że szereg (1) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale domkniętym $[a, b]$ zawartym w przedziale zbieżności.

W przypadku 1^0 liczbę R nazywamy *promieniem zbieżności szeregu potęgowego* (1), w przypadku 2^0 mówimy, że *promień zbieżności* $R = \infty$. Jeżeli szereg (1) jest rozbieżny dla każdego $x \neq x_0$, to przyjmujemy, że *promień zbieżności* $R = 0$, przedział zbieżności redukuje się wówczas do jednego punktu x_0 .

Z twierdzenia 1 wynika, że przy założeniu istnienia granicy (3) promień zbieżności szeregu (1) można obliczać posługując się wzorem (4) przy dodatkowej umowie, że

$$(8) \quad R = \infty, \quad \text{gdy} \quad \lambda = 0, \quad R = 0, \quad \text{gdy} \quad \lambda = \infty.$$

Jeżeli wszystkie współczynniki a_n są różne od zera oraz istnieje granica

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \infty,$$

to (por. rozdz. IV §2) jest ona równa granicy (3). Promień zbieżności można wówczas obliczać ze wzoru (4) względnie (8), przyjmując

$$(9) \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

co może być wygodniejsze ze względów rachunkowych.

W dalszym ciągu (punkt 5) okażemy, że każdy szereg potęgowy ma promień zbieżności $0 \leq R \leq \infty$ oraz przedział zbieżności spełniający (przy $R > 0$) jeden z warunków 1^0 , 2^0 , również gdy nie istnieje granica (3.)

Przykład 1. Rozważmy szeregi potęgowe o środku $x_0 = 0$

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad (\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad (\gamma) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

ponieważ

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

wszystkie trzy szeregi mają ten sam promień zbieżności $R = 1$, zatem ich przedziałem zbieżności jest przedział otwarty

$$\mathbb{P} = (-1, 1).$$

Zbadamy zachowanie się szeregów na końcach tego przedziału. Dla $x = 1$ ogólny wyraz szeregu (α) przyjmuje postać $b_n = n$ zaś dla $x = -1$ jest równy $c_n = (-1)^n n$. Ciąg $\{b_n\}$ jest rozbieżny do ∞ zaś ciąg $\{c_n\}$ nie ma granicy (nawet niewłaściwej), zatem szereg (α) w obu punktach końcowych jest rozbieżny gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1). Szereg (β) dla $x = -1$ ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

a więc jest zbieżny (por. Przykład 2 rozdz. IV §3) natomiast dla $x = 1$ staje się szeregiem harmonicznym a więc rozbieżnym (por. Przykład 4 rozdz. IV §1). Wreszcie szereg (γ) jest zbieżny w obu punktach końcowych przedziału \mathbb{P} . Dla $x = 1$ staje się on szeregiem

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

którego zbieżność udowodniliśmy w Przykładzie 6 rozdz. IV §1, natomiast dla $x = -1$ przyjmuje postać szeregu

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

którego zbieżność otrzymujemy natychmiast z nierówności

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

stosując kryterium porównawcze (twierdzenie 7 rozdz. IV §1) i korzystając ze zbieżności szeregu (10) (zbieżność szeregu (11) wynika również z twierdzenia Leibniza (twierdzenie 2 rozdz. IV §3).) \square

2. Regularność sumy szeregu potęgowego. Suma $u(x)$ szeregu potęgowego (1) o dodatnim promieniu zbieżności jest funkcją określoną w przedziale zbieżności i ewentualnie na jego końcach. Zauważmy, że wyrazy szeregu są funkcjami ciągłymi w całym zbiorze liczb rzeczywistych i że szereg jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[a, b]$ zawartym w przedziale zbieżności. Z twierdzenia o ciągłości sumy szeregu jednostajnie zbieżnego (twierdzenie 12 §1) wynika zatem, że *suma szeregu (1) jest funkcją ciągłą w całym przedziale zbieżności*, gdyż do każdego punktu $\bar{x} \in \mathbb{P}$ można dobrać przedział $[a, b]$ tak, by zachodziła relacja

$$\bar{x} \in [a, b] \subset \mathbb{P}.$$

Powstaje pytanie, czy można powiedzieć coś więcej o regularności funkcji $u(x)$ - na przykład, czy jest ona różniczkowalna. Aby zastosować twierdzenie o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego (twierdzenie 14 §1) musimy zbadać szereg utworzony z szeregu (1) przez formalne zróżniczkowanie, czyli szereg

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

który dla $x \neq x_0$ można zapisać w postaci

$$(13) \quad \frac{1}{x - x_0} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n.$$

Zakładając, że istnieje granica (3) możemy łatwo znaleźć promień zbieżności R_1 szeregu (13). Mamy mianowicie

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

i stąd

$$R_1 = R.$$

Wiemy, że szereg (12) jest zbieżny dla $x = x_0$ (gdyż wtedy redukuje się do jednego wyrazu a_1), zaś dla $x \neq x_0$ jego zbieżność jest równoważna zbieżności szeregu (13). Stąd wniosek, że promień zbieżności i przedział zbieżności szeregu (1) i szeregu (12) powstającego przez zróżniczkowanie go wyraz za wyrazem są takie same. Z przeprowadzonych rozważań wynika łatwo

Twierdzenie 2. Załóżmy, że istnieje granica (3) i że szereg potęgowy (1) ma dodatni promień zbieżności ($0 < R \leq \infty$). Wówczas jego suma

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

jest funkcją klasy C^∞ w przedziale zbieżności \mathbb{I} i jej pochodne dowolnego rzędu dla $x \in \mathbb{I}$ obliczamy różniczkując szereg wyraz za wyrazem.

DOWÓD. Szereg zróżniczkowany (12) jest szeregiem potęgowym, można więc do niego zastosować twierdzenie 1. Ponieważ, jak już zauważyliśmy, przedział zbieżności \mathbb{I} jest ten sam dla obu szeregów, z twierdzenia 1 wynika, że w dowolnym przedziale $[a, b] \subset \mathbb{I}$ spełnione są założenia twierdzenia 14 §1. Wobec tego

$$u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad (x \in \mathbb{I}).$$

To samo rozumowanie możemy zastosować do szeregu (12), otrzymujemy

$$u''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u''_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Drogą indukcji łatwo stwierdzić, że po k -krotnym zróżniczkowaniu szeregu (1) otrzymujemy szereg potęgowy o tym samym przedziale zbieżności \mathbb{I} , którego suma jest równa $u^{(k)}$ dla $x \in \mathbb{I}$. Mamy zatem dla dowolnie ustalonego $k \in \mathbb{N}$

$$u^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Na mocy twierdzenia 1 szereg potęgowy po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[a, b] \subset \mathbb{I}$, jego suma $u^{(k)}(x)$ jest więc ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{I}$ czyli ciągła w całym przedziale \mathbb{I} . \square

Uwaga. Nie zakładając istnienia granicy (3) łatwo okazać, że szereg (1) można w przedziale zbieżności różniczkować wyraz za wyrazem - zatem twierdzenie 2 pozostaje prawdziwe bez tego założenia (por. również punkt 5). Wynika to z następującego lematu:

Lemat. Jeżeli szereg (1) jest zbieżny w punkcie $c \neq x_0$, to szereg (12) jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $|x - x_0| \leq a$, gdzie $0 < a < |c - x_0|$.

DOWÓD. Na mocy założenia ogólny wyraz szeregu (1) dla $x = c$ dąży do zera (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1), istnieje zatem liczba $M > 0$ taka, że

$$|a_n(c - x_0)^n| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mamy

$$n a_n (x - x_0)^n = n a_n (c - x_0)^n \frac{(x - x_0)^n}{(c - x_0)^n},$$

skąd przy oznaczeniu

$$\frac{a}{|c - x_0|} = q$$

wynika, że

$$|na_n(x - x_0)^n| \leq nMq^n.$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$$

jest zbieżny dla $0 < q < 1$, co stwierdzamy łatwo, stosując kryterium d'Alemberta lub kryterium Cauchy'ego - por. rozdz. IV §2. Zatem ostatnia nierówność zapewnia bezwzględną i jednostajną zbieżność szeregu (13), a więc i szeregu (12), w przedziale $|x - x_0| \leq a$. \square

O zachowaniu się sumy szeregu potęgowego na końcach przedziału zbieżności mówi następujące

Twierdzenie 3 (Abela). *Załóżmy, że promień zbieżności R szeregu (1) spełnia nierówność $0 < R < \infty$. Wówczas w przypadku zbieżności szeregu (1) w punkcie końcowym przedziału zbieżności jego suma $u(x)$ jest funkcją jednostronnie ciągłą w tym punkcie tzn.*

a.) *jeżeli szereg (1) jest zbieżny dla $x = x_0 + R$, to*

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 + R)^-} u(x) = u(x_0 + R),$$

b.) *jeżeli szereg (1) jest zbieżny dla $x = x_0 - R$, to*

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 - R)^+} u(x) = u(x_0 - R).$$

DOWÓD. Aby udowodnić a.) zauważmy, że

$$(14) \quad a_n(x - x_0)^n = (a_n R^n) v_n(x),$$

gdzie

$$v_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{R^n}.$$

Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

jest z założenia zbieżny, zatem jako szereg o wyrazach stałych jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale (por zadanie 3 §1), natomiast ciąg $\{v_n(x)\}$ jest malejący przy dowolnie ustalonym $x \in B = [x_0, x_0 + R]$ i przy tym

$$|v_n(x)| \leq 1$$

dla $x \in B$, $n \in \mathbb{N}$. Korzystając z przedstawienia (14) możemy więc do szeregu (1) zastosować kryterium Abela (twierdzenie 16 §1), które zapewnia jego jednostajną zbieżność w przedziale B . Zgodnie z twierdzeniem o ciągłości sumy jednostajnie zbieżnego szeregu o wyrazach ciągłych (twierdzenie 12 §1) funkcja $u(x)$ jest ciągła w przedziale B , w szczególności lewostronnie ciągła w punkcie $x_0 + R$.

Dowód punktu b.) przebiega podobnie i pozostawiamy go Czytelnikowi. \square

Przykład 2. Zbadajmy szereg potęgowy o środku $x_0 = 1$

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^\alpha} \quad (\alpha \geq 0).$$

Ponieważ

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 0, \\ \frac{1}{n^\alpha} & \text{dla } \alpha > 0, \end{cases}$$

mamy dla $\alpha = 0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

oraz dla $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = 1.$$

Zatem $\lambda = R = 1$ zgodnie ze wzorami (3), (4) i przedziałem zbieżności jest przedział

$$\mathbb{P} = (0, 2)$$

dla wszystkich $\alpha \geq 0$.

Zbadamy zachowanie się szeregu (15) na końcach przedziału \mathbb{P} . Dla $x = 0$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

Szereg ten jest

zbieżny dla $\alpha > 0$ jako szereg naprzemienny spełniający założenia twierdzenia Leibniza (twierdzenie 2 rozdz. IV §3),

rozbieżny dla $\alpha = 0$, gdyż wtedy ogólny wyraz nie dąży do zera, nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności (twierdzenie 8 rozdz. IV §1).

Natomiast dla $x = 2$ szereg (15) ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest więc (por. Przykład 1 rozdz. IV §2)

zbieżny dla $\alpha > 1$,

rozbieżny dla $0 \leq \alpha \leq 1$.

Przykład 3. Znajdziemy przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$(16) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

o środku $x_0 = -1$. Do obliczenia liczby λ wygodniej będzie zastosować wzór (9). Otrzymujemy

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

zatem wobec (8) $R = \infty$ i przedziałem zbieżności jest cała prosta rzeczywista.

3. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy. Przypuśćmy, że funkcja f jest sumą szeregu potęgowego o środku x_0 i dodatnim promieniu zbieżności $0 < R \leq \infty$, zatem

$$(17) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dla $x \in \mathbb{P}$, gdzie \mathbb{P} jest przedziałem zbieżności. Mówimy wówczas, że funkcja f została *rozwinęta w szereg potęgowy*. Na mocy twierdzenia 2 z przedstawienia (17) wynika, że f jest klasy C^∞ w przedziale \mathbb{P} - zatem rozwijać w szereg potęgowy można tylko takie funkcje. Przedstawienie (17) pozwala wyrazić współczynniki a_n przez pochodne funkcji f w punkcie x_0 . Różniczkując bowiem obustronnie otrzymujemy zgodnie z twierdzeniem 2

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2},$$

i ogólnie

$$(18) \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{P}$. Z równości (17), (18) wynika po podstawieniu $x = x_0$

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k,$$

czyli (po zamianie wskaźnika k na n)

$$(19) \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(przypominamy, że $f^{(0)}(x) = f(x)$). Szereg potęgowy o środku x_0 i współczynnikach a_n określonych wzorem (19) nazywamy *szeregiem Taylora funkcji f* , w szczególności dla $x_0 = 0$ szereg ten nosi nazwę *szeregu Maclaurina funkcji f* .

Z przeprowadzonych rozważań wynika natychmiast

Twierdzenie 4 (o jednoznaczności rozwinięcia). Jeżeli funkcja f rozwija się w pewnym otoczeniu punktu x_0 w szereg potęgowy (17), to ten szereg jest jej szeregiem Taylora tzn. współczynniki a_n są określone wzorem (19).

DOWÓD. Z założenia funkcja f spełnia (17) dla $x \in (a, b)$, gdzie

$$a < x_0 < b,$$

zatem przedział (a, b) jest zawarty w przedziale zbieżności szeregu potęgowego i rachunek prowadzący do wzoru (19) pozostaje w mocy. \square

♡ ♡ ♡

Szereg Taylora można utworzyć dla każdej funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0 i mającej w tym punkcie pochodne wszystkich rzędów. Może się jednak zdarzyć, że nie przedstawia on funkcji f tzn. że w przedziale zbieżności szeregu o współczynnikach a_n określonych wzorem (19) nie zachodzi równość (17). Dowodzi tego następujący

Przykład 4. Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Okażemy, że $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ i przy tym

$$(20) \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zacznijmy od obliczenia pochodnych funkcji f . Dla $x \neq 0$ możemy zastosować znane reguły różniczkowania funkcji elementarnych i ich superpozycji, co daje

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

i ogólnie

$$(21) \quad f^{(n)}(x) = w_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n \in \mathbb{N}, x \neq 0),$$

gdzie w_n jest wielomianem - łatwy dowód indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi. Pochodne w punkcie $x = 0$ obliczymy opierając się na definicji, przy czym wygodnie będzie znaleźć najpierw lewostronną i prawostronną granicę ilorazu różnicowego. Mamy zatem

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}},$$

skąd po podstawieniu

$$(22) \quad t = \frac{1}{h}$$

dostajemy

$$(23) \quad f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}}$$

i podobnie

$$(24) \quad f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{t^2}}.$$

Obie granice (23), (24) stanowią nieoznaczoności typu $\frac{\infty}{\infty}$ i obliczamy je stosując regułę de l'Hospitala (twierdzenie 19 rozdz. III §4), co daje

$$f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Ponieważ pochodne jednostronne są równe, pochodna $f'(0)$ istnieje i przy tym

$$(25) \quad f'(0) = 0$$

(por. twierdzenie 1 rozdz. III §4). Równość (20) udowodnimy metodą indukcji. Przyjmując (20) jako założenie indukcyjne mamy

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(h)}{h}, \quad f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(h)}{h}$$

skąd, uwzględniając (21) i stosując podstawienie (22), dostajemy

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tw_n(t)}{e^{t^2}}, \quad f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{tw_n(t)}{e^{t^2}}.$$

Do obliczenia ostatnich granic zastosujemy p -krotnie stosowaną przed chwilą regułę de l'Hospitala (gdzie p jest stopniem wielomianu $tw_n(t)$). Daje to

$$(26) \quad f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c}{(e^{t^2})^{(p)}}, \quad f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c}{(e^{t^2})^{(p)}}$$

przy czym, jak łatwo zauważyć,

$$(e^{t^2})^{(p)} = v_p(t)e^{t^2},$$

gdzie c jest stałą a v_p wielomianem. Ponieważ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_p(t) = \pm\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} v_p(t)$$

(znak zależy od stopnia wielomianu i znaku współczynnika przy najwyższej potędze - por. zadanie 17 rozdz. III §2), równości (26) dają ostatecznie

$$f_+^{(n+1)}(0) = f_-^{(n+1)}(0) = 0,$$

czyli

$$f^{(n+1)}(0) = 0,$$

co kończy dowód indukcyjny (20). Okazaliśmy jednocześnie, że funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ czyli jest klasy $C^\infty(\mathbb{R})$. Z definicji funkcji f i równości (20) wynika, że wszystkie współczynniki a_n jej szeregu Taylora o środku $x_0 = 0$ (określone wzorem (19)) są równe zeru. Przedziałem zbieżności takiego szeregu jest cała oś rzeczywista, ale w żadnym punkcie $x \neq 0$ nie może zachodzić równość (17). \square

Mówimy, że funkcja f jest *analityczna* w punkcie x_0 , jeżeli daje się w pewnym otoczeniu tego punktu przedstawić jako suma szeregu potęgowego (z twierdzenia 4 wynika, że szereg ten jest jej szeregiem Taylora). W Przykładzie 4 mamy przykład funkcji klasy C^∞ która nie jest analityczna w punkcie $x_0 = 0$.

♡ ♡ ♡

4. Rozwinięcia w szereg pewnych funkcji. Jeżeli funkcja f daje się w pewnym otoczeniu (a, b) punktu x_0 rozwinąć w szereg potęgowy, to z twierdzenia 1 wynika, że szereg ten jest jednostajnie zbieżny do f w każdym przedziale domkniętym $[c, d] \subset (a, b)$. Inaczej mówiąc, do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $n > N$ zachodzi dla wszystkich $x \in [c, d]$ nierówność

$$\left| f(x) - g_n(x) \right| < \varepsilon,$$

gdzie

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k.$$

Zatem przedstawienie funkcji f w postaci (17) implikuje możliwość aproksymowania jej w całym przedziale $[c, d]$ ze z góry określoną dokładnością przez wielomian g_n .

Zajmiemy się teraz rozwinięciem w szereg potęgowy pewnych poznanych wcześniej funkcji.

Jeżeli f jest funkcją klasy C^∞ w otoczeniu punktu x_0 , to dla dowolnego n prawdziwy jest wzór Taylora

$$(27) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k + R_n(x),$$

gdzie

$$(28) \quad R_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\bar{x})$$

jest resztą w postaci Lagrange'a zaś \bar{x} punktem leżącym między punktami x_0 , x (por. twierdzenie 2 rozdz.III §5). Suma po prawej stronie (27) jest sumą częściową szeregu Taylora funkcji f . Zatem rozwinięcie (17) jest prawdziwe w przedziale \mathbb{P}_d określonym nierównością

$$|x - x_0| \leq d$$

jeżeli spełniony jest warunek

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P}_d,$$

do tego zaś wystarczy, by pochodne funkcji f były *wspólnie ograniczone* w przedziale \mathbb{P}_d tzn. by istniała stała $M > 0$ taka, że

$$(30) \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P}_d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas bowiem

$$(31) \quad |R_n(x)| \leq M \frac{d^n}{n!}.$$

Jak łatwo sprawdzić, stosując kryterium d'Alemberta, szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{n!}$$

jest zbieżny i wobec tego jego ogólny wyraz dąży do zera. Oszacowanie (30), które implikuje (31), zapewnia więc warunek (29) rozwijalności funkcji f w szereg Taylora.

Przykład 5. Przyjmijmy $x_0 = 0$ i niech

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = e^x.$$

Ustalając dowolnie $d > 0$ mamy dla $|x| \leq d$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq 1, \quad \left| g^{(n)}(x) \right| \leq 1, \quad \left| h^{(n)}(x) \right| \leq e^d,$$

warunek (30) jest więc spełniony i wszystkie trzy funkcje rozwijają się w szereg Maclaurina w każdym przedziale \mathbb{P}_d , czyli w całym zbiorze liczb rzeczywistych. Aby znaleźć współczynniki rozwinięcia skorzystamy ze wzoru (19) dla $x_0 = 0$. Mamy

$$h^{(n)}(x) = e^x \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

następnie

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{dla} \quad n = 2k, \\ (-1)^k \cos x & \text{dla} \quad n = 2k + 1 \end{cases}$$

oraz

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{dla } n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{dla } n = 2k + 1 \end{cases}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$. Wobec tego

$$\begin{aligned} h^{(n)}(0) &= 1 & \text{dla } n \in \mathbb{N}, \\ f^{(n)}(0) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2k, \\ (-1)^k & \text{dla } n = 2k + 1, \end{cases} \\ g^{(n)}(0) &= \begin{cases} (-1)^k & \text{dla } n = 2k, \\ 0 & \text{dla } n = 2k + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

i szukane rozwinięcia mają postać

$$(32) \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$(33) \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$(34) \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Łatwo sprawdzić, stosując kryterium d'Alemberta, że każdy z szeregów po prawej stronie jest bezwzględnie zbieżny przy dowolnie ustalonym x . Wynika stąd, że promień zbieżności tych szeregów jest równy ∞ , zaś przedziałem zbieżności jest cała oś rzeczywista.

Promień zbieżności szeregów (32) - (34) możemy również obliczyć bezpośrednim rachunkiem.

W przypadku szeregu (32) mamy

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

zatem wzór (9) daje

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

i stąd $R = \infty$ zgodnie z (8).

W szeregu (33) mamy

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

zatem

$${}^{2n}\sqrt{|a_{2n}|} = 0, \quad {}^{2n+1}\sqrt{|a_{2n+1}|} = {}^{2n+1}\sqrt{\frac{1}{(2n+1)!}}.$$

Zauważmy, że przyjmując

$$b_n = \frac{1}{n!}$$

mamy (por. rozdz. IV §2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!},$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0,$$

a stąd na mocy twierdzenia o podciągach (twierdzenie 3 rozdz. II §2) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0.$$

Zatem w przypadku szeregu (33) ciąg $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ jest przeplatanką dwóch ciągów zbieżnych do tej samej granicy. Wobec tego (por. zadanie 4 rozdz. II §1) istnieje granica

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

co zgodnie z (8) daje $R = \infty$.

Podobne rozumowanie można zastosować do szeregu (34), szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 6. Rozwińmy w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = \log(1+x) \quad (x > -1).$$

Zauważmy najpierw, że znamy rozwinięcie pochodnej $f'(x)$, bowiem ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego (por. Przykład 1 rozdz. IV §1) wynika, że

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \quad \text{dla } |t| < 1.$$

Otrzymany szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale o końcach 0, x dla $|x| < 1$ (por. twierdzenie 1), wobec tego zgodnie z twierdzeniem 13 §1 można go w tym przedziale całkować wyraz za wyrazem, co daje

$$(35) \quad \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Posługując się wzorami (3), (4) łatwo znaleźć promień zbieżności po prawej stronie (35). Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

stąd

$$\lambda = R = 1.$$

Szereg (35) jest zbieżny dla $x = 1$ jako szereg anharmoniczny (por. Przykład 2 rozdz. IV §3), wobec tego z twierdzenia 3 i z ciągłości lewej strony dla $x = 1$ wynika, że równość (35) zachodzi w całym przedziale $(-1, 1]$. Zmieniając wskaźnik sumacyjny możemy szukane rozwinięcie zapisać w postaci

$$(36) \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1).$$

Ponieważ przedziałem zbieżności otrzymanego szeregu jest przedział $(-1, 1)$, równość (36) nie może zachodzić dla $x > 1$ pomimo, że lewa strona jest określona dla wszystkich $x > -1$.

Przyjmując $x = 1$ w (36) dostajemy

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Po prawej stronie mamy szereg anharmoniczny, którego zbieżność udowodniliśmy wcześniej (Przykład 2 rozdz. IV §3) - teraz znaleźliśmy jego sumę.

Uwaga. Wróćmy do rozwinięcia (36) i niech \mathbb{P}_d będzie przedziałem określonym nierównością

$$|x| \leq d \quad (0 < d < 1).$$

Przyjmując

$$f(x) = \log(1+x)$$

mamy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(x)| = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

(proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie dowodu indukcyjnego), zatem dla $x \in \mathbb{P}_d$ zachodzi oszacowanie

$$\frac{1}{c_n} = \frac{(n-1)!}{(1+d)^n} \leq |f^{(n)}(x)| \leq \frac{(n-1)!}{(1-d)^n}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta stwierdzamy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

jest zbieżny, stąd (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1) ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny do zera, zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} = \infty$$

i wobec tego z otrzymanego oszacowania dla pochodnych $f^{(n)}(x)$ wynika, że nie mogą być one wspólnie ograniczone w żadnym przedziale \mathbb{P}_d . Widzimy więc, że warunek (30) jest jedynie warunkiem dostatecznym rozwijalności funkcji f w szereg potęgowy, ale nie jest to warunek konieczny.

Przykład 7. Rozwiniemy w szereg Maclaurina funkcję

$$(37) \quad f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, x > -1).$$

Zacniemy od obliczenia współczynników a_n posługując się wzorem (19) przy $x_0 = 0$. Mamy

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

i ogólnie

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

skąd

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

zatem

$$(38) \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a_0 = 1.$$

W przypadku gdy α jest liczbą naturalną ($\alpha = m$), otrzymujemy ze wzorów (38)

$$a_n = \begin{cases} \binom{m}{n} & \text{dla } 0 \leq n \leq m \\ 0 & \text{dla } n > m, \end{cases}$$

gdzie $\binom{m}{n}$ oznacza współczynnik dwumianowy (por. (17) rozdz. I §1). Szereg Maclaurina jest wówczas sumą skończoną i szukane rozwinięcie daje wzór dwumianowy Newtona

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

(por. (19) rozdz. I §1). Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ wyrażenie (38) nazywamy *uogólnionym współczynnikiem dwumianowym* i przyjmujemy oznaczenia

$$(39) \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Szereg Maclaurina funkcji (37) ma więc postać

$$(40) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = g(x),$$

a jego promień zbieżności dla $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ łatwo obliczyć ze wzorów (4), (9) (wiemy, że dla α naturalnych oraz $\alpha = 0$ szereg jest skończoną sumą). Wobec (39) dostajemy dla $n > \alpha$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n - \alpha}{n + 1},$$

skąd

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \alpha}{n + 1} = 1, \quad R = 1.$$

Przedziałem zbieżności szeregu (40) jest więc przedział $(-1, 1)$.

Z przeprowadzonego rozumowania nie wynika jednak, że suma szeregu Maclaurina funkcji (37) jest równa tej funkcji - por. Przykład 4. Aby to udowodnić musimy wykazać, że

$$(41) \quad g(x) = (1 + x)^\alpha,$$

(gdzie funkcja g jest określona w przedziale $(-1, 1)$ równością (40)) albo, w równoważnej postaci, że

$$(42) \quad h(x) = (1 + x)^{-\alpha} g(x) = 1 \quad \text{dla} \quad |x| < 1.$$

Ponieważ

$$h(0) = 1$$

wystarczy stwierdzić, że h jest funkcją stałą w przedziale $(-1, 1)$ czyli że jej pochodna $h'(x)$ jest w tym przedziale równa zeru. Różniczkując otrzymujemy z (42)

$$(43) \quad h'(x) = (1 + x)^{-\alpha-1} p(x),$$

gdzie

$$p(x) = (1 + x)g'(x) - \alpha g(x),$$

pozostaje więc okazać, że

$$(44) \quad p(x) = 0 \quad \text{dla} \quad |x| < 1.$$

Ostatnia równość wynika łatwo z definicji funkcji g . Po zróżniczkowaniu (40) mamy

$$(45) \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n,$$

zatem

$$(46) \quad xg'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n$$

i po dodaniu (45), (46)

$$(47) \quad (1+x)g'(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

gdzie

$$b_n = (n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n}.$$

Z definicji (39) uogólnionego współczynnika dwumianowego wynika, że

$$b_n = \frac{1}{n!} (\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(\alpha-n) + n\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)) = \binom{\alpha}{n} (\alpha-n+n) = \alpha \binom{\alpha}{n},$$

co wobec (40) i (47) daje

$$(1+x)g'(x) = \alpha g(x),$$

czyli (44), skąd wynika (41). Szukane rozwinięcie ma więc postać

$$(48) \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1),$$

przy czym współczynniki $\binom{\alpha}{n}$ są określone wzorami (39).

Przykład 8. Rozważymy szczególne przypadki rozwinięcia (48). Dla $\alpha = \frac{1}{2}$, $n \geq 2$ mamy

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

i stąd

$$(49) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n \quad (|x| < 1),$$

czyli w rozwiniętej postaci

$$(50) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1).$$

Natomiast dla $\alpha = -\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)},$$

zatem

$$(51) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n \quad (|x| < 1),$$

czyli w postaci rozwiniętej

$$(52) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Szereg występujący po prawej stronie (49) można przedstawić jako iloczyn

$$x^2 r(x),$$

gdzie $r(x)$ jest funkcją ciągłą, a więc ograniczoną w otoczeniu zera. Używając symboli Landau'a (rozd. III §4 punkt 10) możemy więc rozwinięcie (49) zapisać w postaci

$$(53) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2) \quad \text{przy } x \rightarrow 0.$$

Podobnie z (51) wynika, że

$$(54) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2) \quad \text{przy } x \rightarrow 0,$$

zatem oba wyrażenia

$$\sqrt{1+x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

można dla małych $|x|$ zastąpić w przybliżeniu przez funkcje liniowe.

Przykład 9. Ze wzoru (51) łatwo otrzymać rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \arcsin x.$$

Zastępując x przez $-t^2$ dostajemy

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} t^{2n} \quad (|t| < 1).$$

Ustalając $x \in (-1, 1)$ stwierdzamy po zastosowaniu kryterium Wierstrassa (twierdzenie 15 §1), że otrzymany szereg jest jednostajnie zbieżny w przedziale o końcach $0, x$, możemy go zatem w tym przedziale scałkować wyraz za wyrazem (por. twierdzenie 13 §1). Mamy

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$$

i stąd

$$(55) \quad \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

Aby zbadać zbieżność szeregu (55) oznaczmy przez $u_n(x)$ jego n -ty wyraz i zastosujmy kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Mamy po skróceniu

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \cdot |x|^2,$$

zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x|^2,$$

skąd wynika, że szereg (55) jest bezwzględnie zbieżny dla $|x| < 1$. Jeżeli $|x| > 1$, to ustalając liczbę q spełniającą nierówność $1 < q < |x|^2$ mamy dla dostatecznie dużych n

$$|u_{n+1}(x)| > q|u_n(x)|,$$

a stąd drogą indukcji łatwo wykazać, że

$$|u_{n+p}(x)| > |u_n(x)|q^p \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Z nierówności tej wynika, że ciąg $\{u_n(x)\}$ nie może być zbieżny do zera, zatem szereg (55) jest rozbieżny dla $|x| > 1$, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1). Z przedstawionych rozważań wynika, że przedziałem zbieżności szeregu (55) jest przedział $(-1, 1)$, zaś promień zbieżności $R = 1$.

Przykład 10. W podobny sposób znajdujemy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego (Przykład 1 rozdz. IV §1) wynika, że

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad (|t| < 1)$$

skąd po scałkowaniu w przedziale o końcach $0, x$ dla $|x| < 1$ dostajemy

$$(56) \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Badanie zbieżności szeregu (56) przebiega podobnie, jak badanie zbieżności szeregu (55). Oznaczając n -ty wyraz szeregu (56) przez $v_n(x)$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = |x|^2.$$

Powtarzając rozumowanie przeprowadzone w przykładzie 9 stwierdzamy, że przedziałem zbieżności szeregu (56) jest przedział $(-1, 1)$, zaś promień zbieżności $R = 1$.

Szereg jest również zbieżny dla $x = \pm 1$ jako szereg naprzemienny spełniający założenia twierdzenia Leibniza (twierdzenie 2 rozdz.IV §3) i wobec tego zgodnie z twierdzeniem Abela (twierdzenie 3) jego suma jest w tych punktach funkcją ciągłą. Zatem *rozwiniecie* (56) *jest prawdziwe w całym przedziale domkniętym* $[-1, 1]$. Zauważmy, że wprowadzicie funkcja $\operatorname{arctg} x$ jest określona na całej osi rzeczywistej, jednak równość (56) nie zachodzi dla $|x| > 1$ gdyż dla takich x szereg po prawej stronie jest rozbieżny. Ponieważ $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, przyjmując $x = 1$ w (56) dostajemy przedstawienie liczby π jako sumy szeregu nieskończonego

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

zwanego *szeregiem Leibniza* (por. zadanie 19).

♡ ♡ ♡

5. Wzór Cauchy'ego - Hadamarda. W dowodach twierdzeń 1, 2 korzystaliśmy z założenia, że istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

co w przypadku $\lambda \neq 0$ pozwoliło określić promień zbieżności szeregu potęgowego (1) wzorem (4). Okażemy teraz, że udowodnione twierdzenia pozostają słuszne bez tego założenia, jeżeli przyjmiemy

$$(57) \quad \lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad R = \frac{1}{\lambda},$$

gdy $0 < \lambda < \infty$ oraz

$$(58) \quad R = 0, \quad \text{gdy} \quad \lambda = \infty, \quad R = \infty, \quad \text{gdy} \quad \lambda = 0.$$

Zauważmy, że granica górna (57) (być może niewłaściwa) istnieje zawsze, mamy bowiem

$$0 \leq b_n = \sqrt[n]{|a_n|}$$

zatem na mocy twierdzeń 13, 14 rozdz.II §2 mamy

$0 \leq \lambda < \infty$ gdy ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z góry oraz

$\lambda = \infty$ w przeciwnym wypadku.

Wzór (57) określający promień zbieżności R nazywamy wzorem *Cauchy'ego - Hadamarda*.¹ Aby udowodnić, prawdziwość twierdzeń 1,2 w przypadku, gdy liczby λ , R są określone wzorami (57), (58) wystarczy okazać, że

¹Jacques Salomon Hadamard (1865 -1963), matematyk francuski, przedmiotem jego badań były równania różniczkowe cząstkowe, funkcje analityczne, teoria liczb oraz mechanika teoretyczna; od 1912 r. był członkiem Paryskiej Akademii Nauk, od 1956 r. członkiem zagranicznym Polskiej Akademii Nauk.

A.) jeżeli $0 < \lambda < \infty$, to

(i) szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny, gdy

$$(59) \quad |x - x_0| < \frac{1}{\lambda}$$

oraz

(ii) szereg (1) jest rozbieżny, gdy

$$(60) \quad |x - x_0| > \frac{1}{\lambda};$$

B.) jeżeli $\lambda = 0$, to szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$;

C.) jeżeli $\lambda = \infty$, to szereg (1) jest rozbieżny dla $x \neq x_0$;

D.) jeżeli λ_1 odpowiada szeregowi (13) otrzymanemu przez formalne zróżniczkowanie szeregu (1) czyli

$$\lambda_1 = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

to

$$(61) \quad \lambda = \lambda_1.$$

W dowodzie punktu A.) oprzemy się na twierdzeniu 15 rozdz.II §2. Aby udowodnić (i) załóżmy, że spełniona jest nierówność (59) i niech

$$u_n(x) = a_n(x - x_0)^n.$$

Obierając ε_0 tak, by

$$(62) \quad \lambda + \varepsilon_0 < \frac{1}{|x - x_0|}$$

mamy

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda + \varepsilon_0$$

i stąd

$$(63) \quad \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|} |x - x_0| < (\lambda + \varepsilon_0) |x - x_0| = q$$

dla $n > n_0$. Z (63) wynika, że przy ustalonym x zachodzi nierówność

$$(64) \quad |u_n(x)| < q^n$$

przy czym

$$(65) \quad 0 < q < 1$$

wobec (62). Ponieważ szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

jest zbieżny dla q spełniających (65), z nierówności (64) po zastosowaniu kryterium porównawczego wynika zbieżność szeregu

$$(66) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Dla dowodu (ii) założmy, że spełniona jest nierówność (60) i niech liczba ε_0 będzie dobrana tak, by

$$(67) \quad \lambda - \varepsilon_0 > \frac{1}{|x - x_0|}.$$

Dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \lambda - \varepsilon_0$$

z której wynika na mocy (67), że

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} > (\lambda - \varepsilon_0)|x - x_0| > 1.$$

Wobec tego szereg (1) nie może być zbieżny, gdyż jego ogólny wyraz nie dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$, nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności (por. twierdzenie 8 rozdz. IV §1).

Przechodząc do dowodu punktu B.) mamy

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon$$

dla prawie wszystkich n , ale to oznacza, że istnieje granica (3) i przy tym

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

zatem założenie uczynione w twierdzeniach 1 - 2 jest spełnione. Natomiast w punkcie C.), na mocy definicji niewłaściwej granicy górnej, istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \infty.$$

Wówczas przy dowolnie ustalonym $x \neq x_0$ istnieje k_0 takie, że dla $k > k_0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x - x_0|}$$

co implikuje oszacowanie

$$|u_{n_k}(x)| > 1 \quad (k > k_0)$$

z którego wynika, że szereg (1) nie może być zbieżny, gdyż jego ogólny wyraz nie dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$ (por. twierdzenie 8 rozdz.IV §1).

Pozostały do udowodnienia punkt D.) wynika łatwo z definicji granicy górnej. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

granice (właściwa lub równa ∞) podciągów wyjętych z ciągów $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ oraz $\{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}\}$ są te same i to implikuje (61).

Dowody twierdzeń 1, 2 w oparciu o wykazane stwierdzenia A.) - D.) przebiegają podobnie jak poprzednio i pozostawiamy je Czytelnikowi.

Przykład 11. Wróćmy do Przykładu 9 - okazaliśmy tam, że promień zbieżności szeregu (55) wynosi $R = 1$. Sprawdźmy, że ten sam wynik można otrzymać stosując wzór Cauchy'ego - Hadamarda (57). Mamy

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

skąd

$$(68) \quad \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 0, \quad \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = c_n \sqrt[2n+1]{b_n},$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{\sqrt[2n+1]{2n+1}}, \quad b_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}.$$

Zauważmy, że

$$(68') \quad \sqrt[2n+1]{b_n} = (d_n)^{\frac{n}{2n+1}}, \quad \text{gdzie} \quad d_n = \sqrt[n]{b_n}.$$

Aby obliczyć granicę ciągu $\{d_n\}$ zastosujemy twierdzenie o średniej geometrycznej (por. rozdz. III §3 zadanie 2). Mamy

$$d_n = \sqrt[n]{\frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_1}{1}}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = 1,$$

zatem również

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1.$$

Zgodnie z (68')

$${}^{2n+1}\sqrt{b_n} = e^{r_n \log d_n}, \quad \text{gdzie} \quad r_n = \frac{n}{2n+1},$$

zatem przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ oraz wykorzystując ciągłość funkcji wykładniczej i logarytmu dostajemy

$$(68'') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} {}^{2n+1}\sqrt{b_n} = e^0 = 1.$$

Ponadto, stosując twierdzenie o podciągach (twierdzenie 3 rozdz. II §2) do ciągu $\{\sqrt[n]{n}\}$ stwierdzamy, (por. Przykład 14 rozdz. II §1), że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1,$$

co zgodnie z (68'') i drugim wzorem (68) daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{2n+1}\sqrt{|a_{2n+1}|} = 1,$$

natomiast z pierwszego wzoru (68) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{2n}\sqrt{|a_{2n}|} = 0.$$

Widzimy więc, że ciąg $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ jest przeplatanką dwóch ciągów, z których jeden jest zbieżny do 0, a drugi do 1. Oznacza to, że

$$\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

i stąd $R = 1$.

Przykład 12. W Przykładzie 10 okazaliśmy, że promień zbieżności szeregu (56) wynosi $R = 1$. Mamy

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

i stąd

$${}^{2n}\sqrt{|a_{2n}|} = 0, \quad {}^{2n+1}\sqrt{|a_{2n+1}|} = \frac{1}{{}^{2n+1}\sqrt{2n+1}},$$

zatem (por. twierdzenie 3 rozdz. II §2 oraz Przykład 14 rozdz. II §1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{2n+1}\sqrt{|a_{2n+1}|} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} {}^{2n}\sqrt{|a_{2n}|} = 0.$$

Podobnie, jak w Przykładzie 11, ciąg $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ jest przeplatanką dwóch ciągów, zbieżnych odpowiednio do 0 i do 1, a więc zgodnie ze wzorem Cauchy'ego - Hadamarda (57)

$$\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

co daje otrzymany poprzednio wynik $R = 1$.

♡ ♡ ♡

6. Działania na szeregach potęgowych. Rozważmy dwa szeregi potęgowe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

o promieniach zbieżności R_1, R_2 odpowiednio, przy czym

$$0 < R_1 \leq R_2 \leq \infty.$$

Przyjmując oznaczenia

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{dla } |x-x_0| < R_1,$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \quad \text{dla } |x-x_0| < R_2$$

dostajemy na mocy twierdzeń 2, 3 rozdz.IV §1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n = A(x) + B(x)$$

dla $|x-x_0| < R = \min(R_1, R_2)$ oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n(x-x_0)^n = cA(x)$$

dla $|x-x_0| < R_1$ i dowolnego $c \in \mathbb{R}$. Zatem szeregi potęgowe o tym samym środku dodajemy i mnożymy przez liczbę tak jak zwykle wielomiany, oczywiście przy założeniu, że x należy do części wspólnej przedziałów zbieżności obu szeregów.

Przechodząc do mnożenia szeregów utwórzmy ich iloczyn Cauchy'ego. Przyjmując dla ustalonego x

$$u_n = a_n(x-x_0)^n, \quad v_n = b_n(x-x_0)^n$$

i oznaczając przez w_n ogólny wyraz iloczynu Cauchy'ego dostajemy zgodnie ze wzorem (28) rozdz. IV §3

$$w_n = c_n(x-x_0)^n,$$

gdzie

$$(69) \quad c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0.$$

Ponieważ szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny w każdym punkcie swojego przedziału zbieżności, dla $|x - x_0| < R = \min(R_1, R_2)$ oba szeregi spełniają założenia twierdzenia 8 rozdz.IV §3, zatem

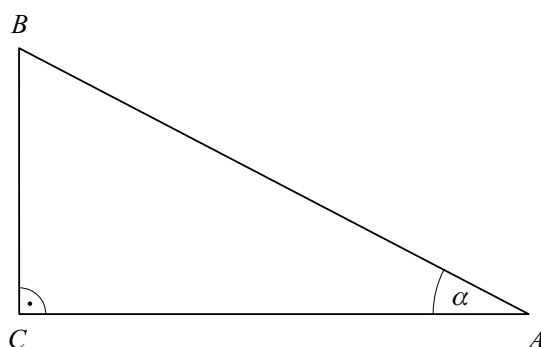
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = A(x)B(x) \quad \text{dla} \quad |x - x_0| < R = \min(R_1, R_2)$$

(c_n określone wzorem (69)), przy czym szereg po lewej stronie jest bezwzględnie zbieżny. Iloczyn Cauchy'ego szeregów potęgowych o tym samym środku x_0 jest więc również szeregiem potęgowym o środku x_0 i jego promień zbieżności jest co najmniej równy $\min(R_1, R_2)$.

♡ ♡ ♡

7*. Analityczna definicja funkcji trygonometrycznych. W kursie szkolnym określamy funkcje trygonometryczne kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym ABC (rys. 97) jako

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}, \quad \cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}.$$



[rys. 97]

Wprowadzając następnie układ współrzędnych na płaszczyźnie i rozważając kąty między dwoma promieniami okręgu jednostkowego o środku w początku układu rozszerzamy tę definicję na przypadek kąta, którego miara łukowa może być dowolną liczbą rzeczywistą. Definicję tą przypomnieliśmy w rozdz.III §1 punkt 9 i na niej opieraliśmy dalszy ciąg wykładu, co ostatecznie doprowadziło do rozwinięć funkcji $\sin x$ i $\cos x$ w szereg potęgowy określonych wzorami (33), (34). Powstaje pytanie, czy wspomniane funkcje można określić w sposób czysto analityczny bez odwoływania się do rysunków i intuicji geometrycznych. Odpowiedź jest twierdząca - wzory (33), (34) mogą posłużyć jako definicja funkcji $\sin x$ i $\cos x$, z której można wyprowadzić wszystkie znane własności tych funkcji.

Aby pójść tą drogą wprowadźmy funkcje określone jako sumy szeregów potęgowych (33), (34) przyjmując

$$(70) \quad S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Jak wykazaliśmy w Przykładzie 5, oba szeregi są bezwzględnie zbieżne dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Pozostaje sprawdzić, że

$$(71) \quad S(t) = \sin t, \quad C(t) = \cos t \quad \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

jeżeli przez \sin , \cos rozumiemy funkcje trygonometryczne rozważane w kursie szkolnym.

Ze wzorów (70) wynikają natychmiast równości

$$(72) \quad S(0) = 0, \quad C(0) = 1$$

oraz

$$(73) \quad S(-x) = -S(x), \quad C(-x) = C(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ponadto z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych (twierdzenie 2) dostajemy relacje

$$(74) \quad S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

zaś obliczając iloczyn Cauchy'ego szeregów (70) (por. punkt 6) dochodzimy do tożsamości

$$(75) \quad S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y),$$

$$(76) \quad C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), \\ (x, y) \in \mathbb{R}$$

(szczegółowy rachunek pozostawiamy Czytelnikowi). Podstawienie $y = -x$ w równości (76) daje po wykorzystaniu relacji (72), (73)

$$(77) \quad S^2(x) + C^2(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Udowodnimy teraz następującą własność funkcji $C(x)$:

Stwierdzenie 1. *Funkcja $C(x)$ jest ściśle malejąca w przedziale $[0, 2]$ i ma dokładnie jedno miejsce zerowe $a \in (0, 2)$.*

DOWÓD. Zgodnie z drugim wzorem (74) wystarczy okazać, że

$$(78) \quad S(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (0, 2).$$

Łącząc w nawiasy po dwa wyrazy w rozwinięciu (70) dostajemy

$$S(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!} \left(1 - \frac{x^2}{10 \cdot 11}\right) + \dots$$

Dla $x \in (0, 2)$ każdy z ułamków jest < 1 , więc każdy nawias przedstawia liczbę dodatnią i stąd (78). Zatem funkcja $C(x)$ jest ściśle malejąca w przedziale $[0, 2]$, może więc mieć

co najwyżej jedno miejsce zerowe w tym przedziale. Łącząc nawiasami wyrazy w rozwinięciu (70) dla $x = 2$ otrzymujemy

$$C(2) = \left(1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \left(-\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}\right) + \left(-\frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!}\right) + \dots$$

czyli

$$C(2) = -\frac{1}{3} + \frac{2^6}{6!} \left(\frac{4}{7 \cdot 8} - 1\right) + \frac{2^{10}}{10!} \left(\frac{4}{11 \cdot 12} - 1\right) + \dots$$

Ponieważ ułamki w nawiasach są < 1 , każdy z tych nawiasów przedstawia liczbę ujemną i stąd $C(2) < 0$. Ponieważ $C(0) = 1 > 0$, w przedziale $(0, 2)$ funkcja $C(x)$ musi przyjmować wartość 0, gdyż jako funkcja ciągła ma własność Darboux tzn. przechodzi od jednej wartości do drugiej przez wszystkie wartości pośrednie (por. rozdz. III §3 punkt 7). \square

Mamy więc

$$(79) \quad S(a) = 1, \quad C(a) = 0$$

(druga równość wynika z definicji liczby a , natomiast pierwszą dostajemy z tożsamości (77) po uwzględnieniu (78). Korzystając z równości (75), (76), (79) otrzymujemy kolejno wzory redukcyjne (proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie rachunku)

$$(80) \quad \begin{aligned} S(x+a) &= C(x), & C(x+a) &= -S(x), \\ S(x+2a) &= -S(x), & C(x+2a) &= -C(x), \\ S(x+3a) &= -C(x), & C(x+3a) &= S(x), \\ S(x+4a) &= S(x), & C(x+4a) &= C(x), \\ & & (x \in \mathbb{R}). & \end{aligned}$$

Z ostatniej pary wzorów (80) wynika, że obie funkcje S , C mają okres $4a$. Udowodnimy teraz

Stwierdzenie 2. *Żadna z funkcji S , C nie ma okresu mniejszego od $4a$.*

DOWOD. Korzystając z (74) i ze wzorów redukcyjnych (80) dostajemy dla $0 < x < a$

$$\frac{d}{dx}C(x+a) = C'(x+a) = -S(x+a) = -C(x),$$

zatem

$$\frac{d}{dx}C(x+a) < 0 \quad (0 < x < a),$$

gdź ze Stwierdzenia 1 wynika, że funkcja C jest dodatnia w przedziale $(0, a)$. Wobec tego funkcja C jest ściśle malejąca w przedziale $[0, 2a]$. Ponieważ funkcja C jest dodatnia w przedziale $(0, a)$ i ujemna w przedziale $(a, 2a)$, z pierwszego wzoru (74) wynika, że funkcja S jest ściśle rosnąca w przedziale $(0, a)$ i ściśle malejąca w przedziale $(a, 2a)$, a stąd wobec

(72), (79) i wzorów redukcyjnych (80) wynika, że $S(x) > 0$ dla $x \in (0, 2a)$. Korzystając z (74) i wzorów redukcyjnych (80) dostajemy

$$\frac{d}{dx}C(x+2a) = C'(x+2a) = -S(x+2a) = S(x) \quad \text{dla } 0 < x < 2a,$$

zatem

$$\frac{d}{dx}C(x+2a) > 0 \quad (0 < x < 2a),$$

a to oznacza, że funkcja C jest ściśle rosnąca w przedziale $[2a, 4a]$. Udowodniona monotoniczność funkcji C w każdym z przedziałów $[0, 2a]$ i $[2a, 4a]$ zapewnia nierówność

$$C(x) < 1 \quad (0 < x < 4a).$$

Ponieważ $C(0) = 1$ zgodnie z (72), z ostatniej nierówności wynika, że żadna liczba mniejsza od $4a$ nie może być okresem funkcji C . Zauważmy ponadto, że zgodnie z pierwszym wzorem (74) każdy okres funkcji S jest okresem funkcji C - zatem również funkcja S nie ma okresu mniejszego od $4a$. \square

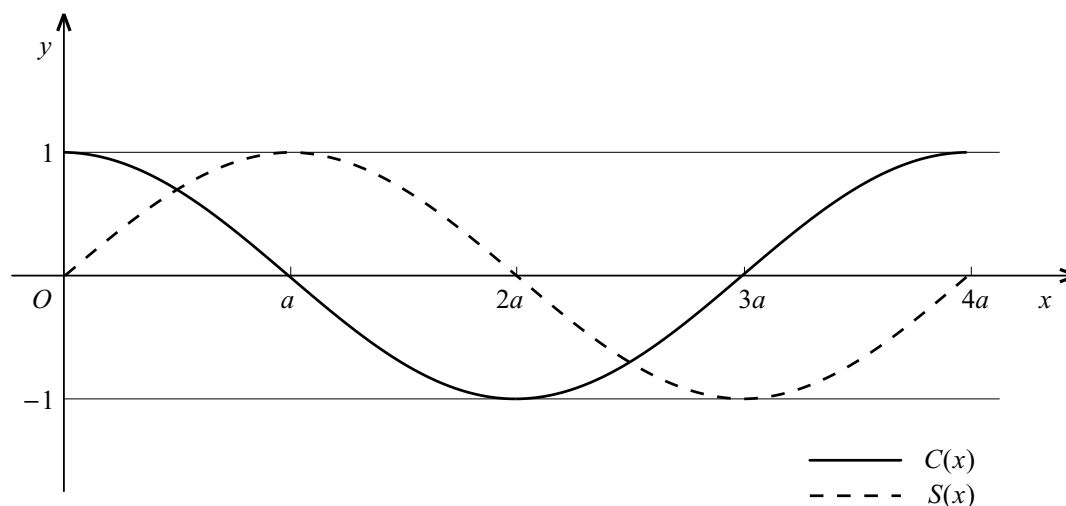
Stwierdzenie 3. *Do dowolnych liczb rzeczywistych u, v spełniających warunek*

$$u^2 + v^2 = 1$$

istnieje dokładnie jedno $x \in [0, 4a)$ takie, że

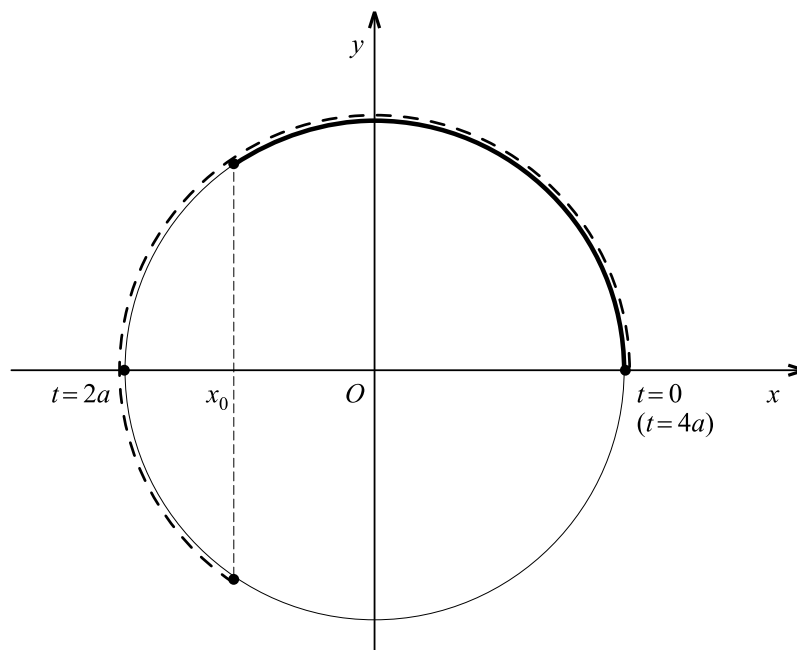
$$u = C(x), \quad v = S(x)$$

DOWÓD. Zaczniemy od przypadku $u = 0$, wówczas $v^2 = 1$, a stąd $x = a$, gdy $v = 1$ oraz $x = 3a$, gdy $v = -1$. Jeżeli zaś $v = 0$, to $u^2 = 1$, zatem $x = 0$, gdy $u = 1$ oraz $x = 2a$, gdy $u = -1$. Dalszy dowód oparty jest na twierdzeniu 13 rozdz. III §3, z którego wynika, że funkcja C ma własność Darboux w przedziale $[0, 4a]$ i wobec tego przechodzi od wartości 0 do wartości 1 przez wszystkie wartości pośrednie. Jeżeli $0 < u < 1$, to liczba x spełniająca warunki twierdzenia należy do przedziału $(0, a)$, gdy $v > 0$ oraz do przedziału $(3a, 4a)$, gdy $v < 0$. Jeżeli zaś $-1 < u < 0$, to liczba x należy do przedziału $(a, 2a)$, gdy $v > 0$ oraz $(2a, 3a)$, gdy $v < 0$. Jedyność liczby x wynika z wykazanej w dowodzie Stwierdzenia 2 ścisłej monotoniczności funkcji C w odpowiednich przedziałach. \square



[rys. 98]

Przeprowadzone rozumowania ilustruje rys. 98, na którym zostały podane wykresy funkcji S , C .



[rys. 99]

Rozważmy teraz zbiór K punktów płaszczyzny postaci

$$(81) \quad x = C(t), \quad y = S(t) \quad (0 \leq t < 4a).$$

Z relacji (77) i Stwierdzenia 3 wynika, że K jest okręgiem jednostkowym o środku w początku układu. Obliczmy teraz długość łuku K_0 okręgu K o końcach $(1, 0)$ oraz (x_0, y_0) gdzie

$$x_0 = C(t_0), \quad y_0 = S(t_0)$$

(rys. 99), korzystając ze wzoru (10) rozdz.V §3. Dla $t_0 \in (0, 2a)$ punkt (x_0, y_0) leży na górnej połowie okręgu K o równaniu

$$(82) \quad y = \sqrt{1 - x^2},$$

stąd

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

zatem

$$|K_0| = \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Podstawienie

$$(83) \quad x = C(t)$$

w całce po uwzględnieniu (74), (81), (82) daje

$$dx = -S(t) dt = -y dt = -\sqrt{1 - x^2} dt,$$

skąd

$$(84) \quad |K_0| = -\int_{t_0}^0 dt = t_0.$$

Przyjmując $t_0 = 2a$ dostajemy w taki sam sposób długość górnego półokręgu, zatem z (84) wynika, że $2a = \pi$ czyli

$$a = \frac{\pi}{2}.$$

Obie funkcje S , C mają więc okres $4a = 2\pi$. Podobny rachunek możemy przeprowadzić przy założeniu, że $t_0 \in (2a, 4a)$. Punkt (x_0, y_0) leży teraz na dolnej części okręgu K określonej równaniem

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$

zaś długość łuku K_0 określona jest jako

$$|K_0| = 2a + \int_{-1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Po podstawieniu (83) dostajemy

$$dx = -S(t) dt = -y dt = \sqrt{1 - x^2} dt$$

i stąd

$$(85) \quad |K_0| = 2a + \int_{2a}^{t_0} dt = t_0$$

podobnie jak poprzednio. Z otrzymanych równości (84), (85) wynika, że parametr t stanowi miarę łukową kąta między osią x -ów a półprostą łączącą początek układu z punktem

$$(86) \quad (x, y) = (C(t), S(t))$$

leżącym na okręgu K . Z drugiej strony na mocy przyjętej w szkole definicji funkcji \sin , \cos mamy

$$(87) \quad (x, y) = (\cos t, \sin t).$$

Równości (86), (87) dają (71). □

Uwaga. W punkcie 9 rozdz. III §1 udowodniliśmy nierówność

$$0 < \sin \alpha < \alpha$$

dla $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ opierając się na szkolnej definicji funkcji $\sin \alpha$ i na odpowiednim rysunku (rys. 4). Łatwo okazać, że nierówność ta może być otrzymana dla funkcji $S(x)$ w sposób analityczny bez odwoływania się do intuicji geometrycznych. Istotnie, stosując twierdzenie Lagrange'a (twierdzenie 11 rozdz. III §4) dostajemy dla $0 < x < \frac{1}{2}\pi$

$$S(x) - S(0) = xS'(\bar{x}),$$

gdzie $0 < \bar{x} < x$, czyli wobec (72), (74), (78)

$$0 < S(x) = xC(\bar{x}).$$

Zatem

$$0 < S(x) < x,$$

gdyż z drugiej równości (72) i stwierdzenia 1 wynika, że $C(\bar{x}) < 1$. □

♡ ♡ ♡

8. Wzory Eulera. Czytelnik na pewno zauważył podobieństwo rozwinięć w szereg Maclaurina funkcji e^x , $\sin x$, $\cos x$ (wzory (32) - (34)). Okazuje się, że funkcje te są ze sobą ściśle związane, jeżeli przejdziemy do argumentów zespolonych. Przypominamy², że liczbę zespoloną zapisujemy w postaci

$$z = x + iy,$$

²Podstawowe wiadomości dotyczące liczb zespolonych można znaleźć w podręcznikach: B. Gleichgewicht, Algebra, Warszawa 1983 oraz A. Mostowski, M. Stark, Elementy algebry wyższej, Warszawa 1975.

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ zaś $i^2 = -1$. Na płaszczyźnie z wprowadzonym układem współrzędnych liczbie z przyporządkowujemy punkt (x, y) . W szczególności liczbie rzeczywistej $z = x$ odpowiada punkt $(x, 0)$ leżący na osi x -ów, zaś liczbie czysto urojonej $z = iy$ - punkt $(0, y)$ na osi y -ów. Wartość funkcji wykładniczej oraz funkcji \sin , \cos dla argumentów zespolonych określamy zastępując formalnie x przez z w rozwinięciach (32) - (34). Mamy zatem

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

dla wszystkich zespolonych z (można udowodnić, że szeregi po prawej stronie są zbieżne). Przyjmijmy w szczególności $z = iy$, wówczas

$$z^n = \begin{cases} (-1)^k y^{2k} & \text{dla } n = 2k, \\ (-1)^k i y^{2k+1} & \text{dla } n = 2k + 1 \end{cases}$$

i stąd po uwzględnieniu wzorów (33), (34) wynika, że

$$(88) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

zgodnie z regułą dodawania szeregów i mnożenia ich przez liczbę (reguły te są takie same dla szeregów o wyrazach zespolonych jak dla szeregów rzeczywistych). Zastępując y przez $-y$ we wzorze (88) otrzymujemy

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

zaś dodanie dwóch ostatnich równości daje

$$(89) \quad \cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}), \quad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}).$$

Wzory (88), (89) noszą nazwę *wzorów Eulera*.

9. Zastosowanie rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy do przybliżonego obliczania jej wartości. Ponieważ, jak okazaliśmy (Przykład 5)

$$(90) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

sumę częściową szeregu

$$S_{k-1}(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{x^n}{n!}$$

przy ustalonym x możemy uważać za przybliżoną wartość wyrażenia e^x przy czym błąd przybliżenia wynosi

$$r_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Aby oszacować go zauważmy, że

$$|r_k(x)| \leq \frac{|x|^k}{k!} \left(1 + \frac{|x|}{k+1} + \frac{|x|^2}{(k+1)(k+2)} + \dots \right)$$

co po zmniejszeniu mianowników daje

$$|r_k(x)| \leq \frac{|x|^k}{k!} \left(1 + \frac{|x|}{k+1} + \frac{|x|^2}{(k+1)^2} + \dots \right).$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia szereg geometryczny o ilorazie

$$q = \frac{|x|}{k+1}.$$

Dla $k+1 > |x|$ szereg ten jest zbieżny i jego suma wynosi

$$\frac{1}{1-q} = \frac{k+1}{k+1-|x|}$$

(por. Przykład 1 rozdz.IV §1), zatem

$$(91) \quad |r_k(x)| \leq \frac{(k+1)|x|^k}{(k+1-|x|)k!}.$$

Przykład 13. Przyjmując $x = 1$ w rozwinięciu (90) otrzymujemy przedstawienie liczby e w postaci sumy szeregu

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

zaś oszacowanie błędu (91) przyjmuje postać

$$0 < r_k(1) \leq \frac{k+1}{k(k!)}, \quad (k \in \mathbb{N})$$

skąd dostajemy kolejno

$$r_2 \leq \frac{3}{4}, \quad r_3 \leq \frac{2}{9}, \quad r_4 \leq \frac{5}{96} < \frac{1}{10}, \quad r_5 \leq \frac{1}{100}.$$

Zatem

$$S_3 = \sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!}$$

daje przybliżenie e z błędem $< 0,1$,

$$S_4 = \sum_{n=0}^4 \frac{1}{n!}$$

daje przybliżenie e z błędem $< 0,01$ (proponujemy Czytelnikowi obliczenie tych sum).

Przechodząc do przybliżonego obliczania wartości logarytmu naturalnego przypomnijmy rozwinięcie (Przykład 6)

$$(92) \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1)$$

z którego po zastąpieniu x przez $-x$ dostajemy

$$(93) \quad \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leq x < 1)$$

zaś po odjęciu stronami (92), (93)

$$(94) \quad \log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

Zastępując wyrażenie po lewej stronie (94) przez sumę częściową

$$S_{k-1}(x) = 2 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

popelniamy błąd

$$r_k(x) = 2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

który oszacujemy przy $x \in (-1, 1)$. Zmniejszając mianowniki po prawej stronie dostajemy

$$|r_k(x)| \leq 2 \frac{|x|^{2k+1}}{2k+1} (1 + x^2 + x^4 + \dots),$$

co po zsumowaniu szeregu geometrycznego w nawiasie daje

$$(95) \quad |r_k(x)| \leq \frac{2|x|^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)} \quad (|x| < 1).$$

Przykład 14. Znajdziemy przybliżoną wartość $\log 2$ (jest to jednocześnie suma szeregu anharmonicznego - por. Przykład 6). Należy w rozwinięciu (94) przyjąć $x = \frac{1}{3}$, wówczas lewa strona jest równa $\log 2$. Oszacowanie (95) przyjmuje postać

$$|r_k(\frac{1}{3})| \leq \frac{1}{4 \cdot (2k+1) \cdot 3^{2k-1}}$$

co daje kolejno

$$|r_1(\frac{1}{3})| \leq \frac{1}{36} < \frac{1}{10}, \quad |r_2| \leq \frac{1}{540} < \frac{2}{10^3}, \quad |r_3| \leq \frac{1}{6700} < \frac{2}{10^4}.$$

Wobec tego

$$S_0 = \frac{2}{3}$$

daje przybliżenie $\log 2$ z błędem $< 0,1$,

$$S_1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^4}$$

daje przybliżenie $\log 2$ z błędem $< 0,002$,

$$S_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{5 \cdot 3^5}$$

daje przybliżenie $\log 2$ z błędem $< 0,0002$ (proponujemy Czytelnikowi obliczenie tych sum).

♡ ♡ ♡

Zadania.

1. Znaleźć promień zbieżności i przedział zbieżności szeregów potęgowych

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+1}, & \text{b.) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{n} (x+1)^n, \\ \text{c.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3n^2+2}, & \text{d.) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n. \end{array}$$

2. Znaleźć promień zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} x^n \quad (0 < a \leq b), \quad \text{(ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

i zbadać ich zbieżność na końcach przedziału zbieżności.

Wskazówka. W punkcie (ii) przy obliczaniu promienia zbieżności zlogarytmować wyrażenie $\sqrt[n]{a_n}$ i skorzystać z Przykładu 31 rozdz.III §4.

3. Przy ustalonym $c \in \mathbb{R}$ znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} x^n.$$

Wskazówka. Zacząć od przypadku $c = 1$ i skorzystać z zadania 3 rozdz.III §3.

4. Znaleźć promień zbieżności i przedział zbieżności szeregów potęgowych

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{3n-1}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{5n}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x+2)^{(n^2)}.$$

Zbadać zbieżność tych szeregów na końcach przedziału zbieżności.

Wskazówka. Można badać zbieżność podanych szeregów przy ustalonym x lub zastosować wzór Cauchy'ego - Hadamarda (57).

5. Podstawiając $x = 1$ w rozwinięciu (32) otrzymujemy przedstawienie liczby e jako sumy szeregu. Opierając się na tym przedstawieniu okazać, że e jest liczbą niewymierną.

Wskazówka. Udowodnić najpierw nierówność

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n(n!)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

gdzie S_n oznacza n -tą sumę częściową szeregu. Następnie z przypuszczenia, że e jest liczbą wymierną wywnioskować, że przedział $(0, 1)$ zawiera liczbę całkowitą.

6. Udowodnić prawdziwość rozwinięć (36) i (48) opierając się na wzorze Taylora.

Wskazówka. Należy okazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad |x| < 1.$$

W tym celu korzystamy z postaci Lagrange'a reszty $R_n(x)$ gdy $x > 0$ oraz z postaci Cauchy'ego (zadanie 10 rozdz.III §5) gdy $x < 0$. W obu przypadkach przedstawiamy resztę $R_n(x)$ w postaci

$$R_n(x) = b_n(x)h_n(x),$$

gdzie przy ustalonym $x \in (-1, 1)$ ciąg $b_n(x)$ jest zbieżny do zera a ciąg $h_n(x)$ jest ograniczony. Aby okazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = 0$$

wystarczy udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(x)|.$$

7. Znaleźć rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^m} \quad (m \in \mathbb{N}, |x| < 1)$$

wychodząc ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego (Przykład 1 rozdz.IV §1) i różniczkując otrzymany szereg. Porównać z rozwinięciem określonym wzorami (39), (48).

8. Rozwinać w szereg Maclaurina funkcję $f(x)$, jeżeli

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= e^{(x^p)} \quad (p = 2, 3, 4, \dots), & \text{(ii)} \quad f(x) &= \cos(2x^3), \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \log(1-x^2), & \text{(iv)} \quad f(x) &= \sqrt{1-x^3}, \\ \text{(v)} \quad f(x) &= \frac{1}{ax+b} \quad (b \neq 0), & \text{(vi)} \quad f(x) &= \frac{2x}{x^2-1}, \\ \text{(vii)} \quad f(x) &= \frac{1}{x^2+4}, & \text{(viii)} \quad f(x) &= \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Sprawdzić, w jakim przedziale prawdziwe jest otrzymane rozwinięcie i znaleźć $f^{(k)}(0)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Wskazówka. Zastosować odpowiednie podstawienie w rozwinięciach omawianych w punkcie 4. W (vi) rozłożyć wyrażenie po prawej stronie na ułamki proste (por. rozdz.V §2 punkty 5, 6).

9. Rozwinać funkcję $f(x)$ w szereg Taylora o środku x_0 , jeżeli

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= \sin x, \quad x_0 = \pi, & \text{(ii)} \quad f(x) &= \frac{1}{ax+b}, \quad x_0 \text{ dowolne} \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \log(ax+b), \quad x_0 \text{ dowolne}, & \text{(iv)} \quad f(x) &= e^{2x}, \quad x_0 = 1. \end{aligned}$$

Sprawdzić, w jakim przedziale prawdziwe jest otrzymane rozwinięcie i znaleźć $f^{(k)}(x_0)$ dla $k \in \mathbb{N}$. Co trzeba założyć o współczynnikach a , b w (ii) i (iii)?

Wskazówka - jak w zadaniu 8.

10. Znaleźć sumy szeregów

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, & \quad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, & \quad \text{(iii)} \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \\ \text{(iv)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} & \quad \text{(v)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Wskazówka. Skorzystać z rozwinięć w szereg Maclaurina omawianych w punkcie 4.

11. Znaleźć przybliżoną wartość wyrażeń

$$a = \sqrt{e}, \quad b = \sqrt[3]{e^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

z błędem nie przekraczającym

$$(i) \quad 0,1 \qquad (ii) \quad 0,01.$$

Wskazówka. Oprzeć się na oszacowaniu (91).

12. Udowodnić, że dowolną liczbę $a > 0$ można zapisać w postaci

$$a = \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{gdzie } |x| < 1.$$

13. Znaleźć przybliżoną wartość wyrażeń

$$\alpha = \log 3, \qquad \beta = \log 5$$

z błędem nie przekraczającym

$$(i) \quad 0,1 \qquad (ii) \quad 0,01$$

Wskazówka. Skorzystać z zadania 12 i z oszacowania błędu (95).

14. Niech $r_k(x)$ oznacza błąd, jaki popełniamy, zastępując funkcję po lewej stronie rozwinięcia (55) względnie (56) przez sumę częściową szeregu $S_{k-1}(x)$. Okazać, że

$$|r_k(x)| \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)} \quad (|x| < 1, k \in \mathbb{N}).$$

15. Opierając się na rozwinięciu (55) znaleźć przybliżoną wartość π z błędem nie przekraczającym

$$(i) \quad 0,1 \qquad (ii) \quad 0,001 \qquad (iii) \quad 0,001.$$

Wskazówka. Przyjąć $x = \frac{1}{2}$ i skorzystać z oszacowania otrzymanego w zadaniu 14.

16. Znaleźć przybliżoną wartość wyrażenia

$$(i) \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \qquad (ii) \quad \operatorname{arctg} 2$$

z błędem nie przekraczającym 0,1.

Wskazówka. Oprzeć się na oszacowaniu błędu otrzymanym w zadaniu 14. W części (ii) skorzystać z tożsamości (uzasadnić ją!)

$$\operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x \quad (y > 1),$$

gdzie

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

oraz z przybliżenia liczby π (por. zadania 14, 15).

17. Sprawdzić, że rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \sqrt[p]{1+x} \quad (p = 2, 3, 4, \dots)$$

ma postać

$$(96) \quad \sqrt[p]{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (|x| < 1),$$

gdzie

$$c_n = (-1)^{n-1} \frac{(p-1)(2p-1) \cdots ((n-1)p-1)}{n! p^n},$$

przy czym

$$|c_n| < \frac{1}{n}.$$

Okazać, że błąd $r_k(x)$, jaki popełniamy zastępując $f(x)$ przez sumę częściową $S_{k-1}(x)$ szeregu (96) daje się oszacować następująco:

$$|r_k(x)| \leq \frac{|x|^k}{k(1-x)}.$$

18. Opierając się na zadaniu 17 znaleźć przybliżone wartości wyrażeń

$$(i) \quad \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \quad (ii) \quad \sqrt[4]{\frac{7}{4}} \quad (iii) \quad \sqrt{\frac{3}{4}}$$

z błędem nie przekraczającym

$$a.) \quad 0,1 \quad b.) \quad 0,01.$$

19. Podstawiając $x = 1$ w rozwinięciu (56) otrzymujemy przedstawienie liczby π jako sumy szeregu (zwanego szeregiem Leibniza)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{2n+1}$$

czyli

$$(97) \quad \pi = S_{p-1} + r_p$$

gdzie S_p oznacza p -tą sumę częściową szeregu zaś r_p jego p -tą resztę. Udowodnić, że

$$(98) \quad 0 < r_{2k} < \frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k} < r_{2k+1} < 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Następnie korzystając z równości (97) i oszacowań (98) sprawdzić, ile wyrazów szeregu trzeba zsumować, aby obliczyć liczbę π z nadmiarem i z niedomiarem z błędem nie przekraczającym

$$(i) \quad 0,1 \quad (ii) \quad 0,01 \quad (iii) \quad 0,001.$$

20. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

i znaleźć jego sumę.

Wskazówka. Przyjmijmy oznaczenie

$$\prod_{k=1}^n d_k = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n.$$

Oznaczając przez u_n ogólny wyraz szeregu okazać najpierw, że

$$u_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{a_n},$$

gdzie

$$a_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right).$$

Następnie, przyjmując

$$b_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

sprawdzić, że

$$a_n \cdot b_n = 2n+1.$$

Ponieważ $b_n < a_n$, z ostatniej równości otrzymujemy oszacowanie zapewniające zbieżność szeregu.

W celu znalezienia sumy szeregu wykorzystać Przykład 9 i oprzeć się na twierdzeniu 3 oraz rozważaniach punktu 5.

21. Wyrazić sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

(por. Przykład 1) jako funkcję zmiennej $x \in (-1, 1)$.

Wskazówka. Opierając się na twierdzeniu 2 zróżniczkować obie strony równości

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

§3. Szeregi Fouriera.



1. Szereg Fouriera i współczynniki Fouriera. Niech f będzie funkcją ciągłą na całej osi rzeczywistej dającą się przedstawić w postaci sumy szeregu

$$(1) \quad f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Przypuśćmy, że szereg po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[-\pi, \pi]$, wówczas po pomnożeniu przez funkcję $\sin mx$ względnie $\cos mx$ zachowa tą własność (por. zadanie 2 §1) i możemy go całkować wyraz za wyrazem, co daje

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = A_0 s_m + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n k_{nm} + b_n s_{nm}) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

oraz

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = A_0 c_m + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_{nm} + b_n k_{nm}) \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$\begin{aligned} s_m &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx, & s_{nm} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx, \\ c_m &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx, & c_{nm} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx, & k_{nm} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx. \end{aligned}$$

Jak łatwo sprawdzić

$$(4) \quad c_0 = 2\pi, \quad c_m = s_m = 0 \quad \text{dla } m \in \mathbb{N},$$

ponadto ze wzorów (85) - (87) rozdz.V §2 otrzymujemy

$$(5) \quad \begin{aligned} s_{nm} &= c_{nm} = 0 \quad \text{dla } n \neq m, \\ s_{mm} &= c_{mm} = \pi, & k_{nm} &= 0, \\ & & & (n, m \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

i wobec tego równości (2), (3) można zapisać w postaci

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \pi b_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

oraz

$$(7) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 2\pi A_0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \pi a_m \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Dla symetrii wzorów, które za chwilę otrzymamy, przyjmiemy oznaczenie

$$a_0 = 2A_0,$$

wówczas równości (6), (7) dają (zamieniamy wskaźnik m na n)

$$(8) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

oraz

$$(9) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Prawa strona (1) może być teraz zapisana w postaci

$$(10) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Szereg nieskończony (10), w którym współczynniki a_n, b_n wyrażają się wzorami (8), (9) nazywamy *szeregiem Fouriera*¹ funkcji f zaś współczynniki a_n, b_n noszą nazwę *współczynników Fouriera*. Oczywiście taki szereg możemy formalnie napisać dla każdej funkcji f ciągłej w przedziale $[-\pi, \pi]$, nie wiemy jednak, czy

1^o jest on zbieżny,

2^o w razie zbieżności jego suma wynosi $f(x)$.

Dlatego przyjmuje się zapis

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Jeżeli 2^o zachodzi dla x należących do pewnego przedziału, to mówimy, że *funkcja f rozwija się w szereg Fouriera* w tym przedziale. W dalszym ciągu będziemy starali się podać warunki przy których odpowiedź na pytania 1^o, 2^o jest twierdząca. Zauważmy, że z równości (1) wynika, że funkcja f jest okresowa o okresie 2π (krócej 2π -okresowa) tzn. że

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Dlatego przedmiotem naszych rozważań będą funkcje 2π -okresowe, *ciągłe na całej osi rzeczywistej*.

¹Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), matematyk i fizyk francuski, jako pierwszy zastosował szeregi trygonometryczne do badania przewodnictwa cieplnego, od 1817 r. członek Paryskiej Akademii Nauk.

2. Całka Dirichleta. Badanie zbieżności szeregu (10) zaczniemy od przekształcenia jego sumy częściowej $S_n(x)$ przy ustalonych n, x . Ze wzorów (8), (9) określających współczynniki Fouriera dostajemy

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_n \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) (\cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky) dy \\ &\quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

czyli po prostym przekształceniu trygonometrycznym (por. (37) rozdz.III §1)

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-y) \right) dy$$

Do wyrażenia w nawiasie zastosujemy udowodniony poprzednio wzór sumacyjny

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

(por. (48) rozdz.V §4). Przyjmując $t = x - y$ dostajemy

$$(11) \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy,$$

gdzie

$$g(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Funkcja g jest określona dla $t \neq 2\pi r$ (r całkowite), jednak stosując regułę de l'Hospitala (rozdz.III §4 punkt 9) sprawdzamy, że istnieje granica

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2\pi r} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 2\pi r} \frac{(2n+1) \cos(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \cos \frac{t}{2}} \\ &= \frac{(2n+1) \cos(2n+1)\pi r}{2 \cos \pi r} = \frac{1}{2}(2n+1). \end{aligned}$$

Wobec tego można uważać g za funkcję ciągłą na całej osi rzeczywistej, jeżeli przyjmiemy dodatkowo

$$g(2\pi r) = \frac{1}{2}(2n+1) \quad (r \text{ całkowite}).$$

Łatwo również sprawdzić, że g jest funkcją 2π -okresową, wobec tego funkcja występująca pod całką (11)

$$h(y) = f(y)g(x-y)$$

jest również 2π -okresowa i ciągła dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$. Udowodnimy teraz lemat przydatny w dalszych rachunkach (por. zadanie 9 rozdz.V §3).

Lemat1. Jeżeli h jest funkcją 2π -okresową ciągłą na całej osi rzeczywistej, to dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$(12) \quad \int_{-\pi}^{\pi} h(y) dy = \int_{a-\pi}^{a+\pi} h(y) dy.$$

DOWÓD. Stosując twierdzenie o podziale przedziału całkowania (twierdzenie 3' rozdz.V §1) otrzymujemy

$$(13) \quad \int_{a-\pi}^{a+\pi} h(y) dy = \int_{a-\pi}^{-\pi} h(y) dy + \int_{-\pi}^{\pi} h(y) dy + \int_{\pi}^{a+\pi} h(y) dy$$

zaś podstawienie $y = z + 2\pi$ daje

$$\int_{\pi}^{a+\pi} h(y) dy = \int_{-\pi}^{a-\pi} h(z + 2\pi) dz = \int_{-\pi}^{a-\pi} h(z) dz,$$

zatem pierwsza i trzecia całka po prawej stronie (13) redukują się. \square

Po zastąpieniu a przez x w (12) można zgodnie z udowodnionym lematem zapisać równość (11) w postaci

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y)g(x-y) dy,$$

skąd po podstawieniu

$$t = y - x$$

wynika

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)g(t) dt$$

(zauważmy, że g jest funkcją parzystą). Po rozbiciu całki po prawej stronie na sumę całek w przedziałach $[-\pi, 0]$ oraz $[0, \pi]$ i zastąpieniu w pierwszej całce t przez $-t$ otrzymujemy ostatecznie przedstawienie całkowe sumy częściowej szeregu Fouriera

$$(14) \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t) \right) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Całka po prawej stronie nosi nazwę *całki Dirichleta*.

3. Rozszerzanie funkcji do funkcji okresowej. Przypomnimy definicję wprowadzoną w rozdz. V §6. Mówimy, że funkcja f jest *kawałkami gładka w przedziale* $[a, b]$, jeżeli istnieje taki skończony ciąg liczb c_j ($j = 0, 1, \dots, p$) spełniających nierówności

$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$$

i taki układ funkcji h_j ($j = 1, 2, \dots, p$), że

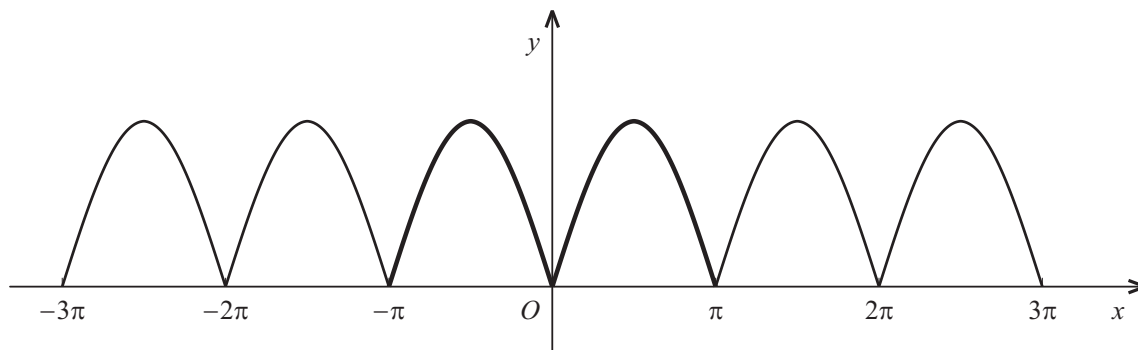
1^o $f(x) = h_j(x)$ dla $c_{j-1} < x_j < c_j$,

2^o funkcja h_j jest klasy C^1 w przedziale domkniętym $[c_{j-1}, c_j]$.

Jeżeli funkcje h_j są liniowe, to mówimy, że f jest *kawałkami liniowa w przedziale* $[a, b]$.

Jeżeli warunek 2^o zastąpimy przez

3^o funkcja h_j jest ciągła w przedziale domkniętym $[c_{j-1}, c_j]$ to mówimy, że f jest *kawałkami ciągła w przedziale* $[a, b]$.



[rys. 100]

Przykład 1. Przyjmijmy, że

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{dla } -\pi \leq x \leq 0, \\ h_2(x) & \text{dla } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

gdzie

$$h_1(x) = \frac{\pi^2}{4} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2, \quad h_2(x) = \frac{\pi^2}{4} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2,$$

zatem f jest funkcją kawałkami gładką w przedziale $[-\pi, \pi]$, przy czym

$$-\pi = c_0 < c_1 = 0 < c_2 = \pi.$$

Ponieważ

$$h_1(-\pi) = h_1(0) = h_2(0) = h_2(\pi) = 0,$$

funkcja f jest ciągła w przedziale $[-\pi, \pi]$ i możemy ją rozszerzyć do funkcji 2π -okresowej ciągłej na całej osi rzeczywistej przyjmując dodatkowy warunek

$$(15) \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(por. rys. 100, gdzie wykres funkcji f w przedziale $[-\pi, \pi]$ zaznaczono grubszą linią). Zauważmy, że

$$f'_-(0) = h'_1(0) = -\pi, \quad f'_+(0) = h'_2(0) = \pi,$$

zatem

$$f'_+(0) \neq f'_-(0),$$

skąd wynika, że funkcja f nie ma pochodnej w punkcie $x = 0$. Punkt ten jest jednocześnie punktem nieciągłości pochodnej f' przy $x \rightarrow 0$, gdyż wobec

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$$

(por. zadanie 23 rozdz. III §4) mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x).$$

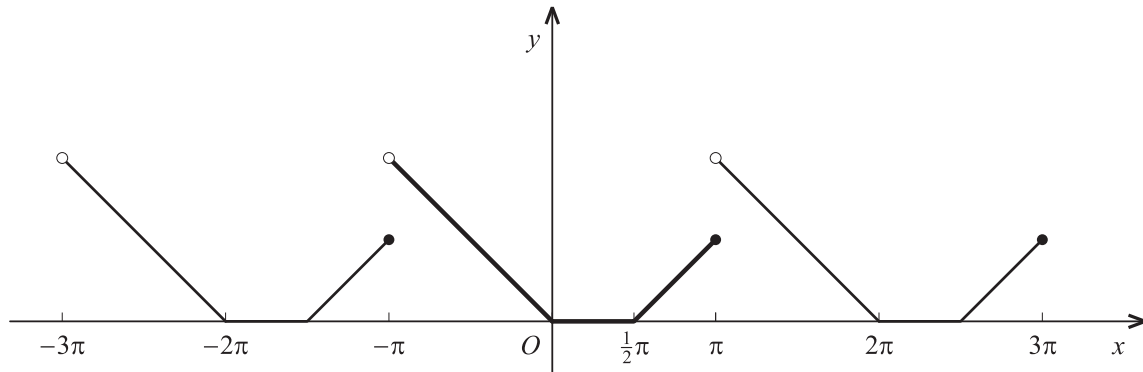
Na rys. 100 widzimy w punkcie $x = 0$ załamanie wykresu (brak stycznej). Rozszerzenie funkcji f do funkcji okresowej przez warunek (15) powoduje, że

$$f'_-(\pi) = h'_2(\pi) = -\pi, \quad f'_+(\pi) = h'_1(-\pi) = \pi$$

zatem

$$f'_-(\pi) \neq f'_+(\pi)$$

i w prawym końcu przedziału $[-\pi, \pi]$ również pojawia się nieciągłość pochodnej f' . Podobnie dzieje się we wszystkich punktach $x = k\pi$ (k całkowite).



[rys. 101]

Przykład 2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{dla } -\pi < x < 0 < \\ h_2(x) & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} < \\ h_3(x) & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

gdzie

$$h_1(x) = -x, \quad h_2(x) = 0, \quad h_3(x) = x - \frac{\pi}{2}$$

dla pozostałych x określamy funkcję f przez warunek okresowości (15) (rys. 101). Funkcja f jest kawałkami liniowa a więc kawałkami gładka w przedziale $[-\pi, \pi]$, przy czym

$$-\pi = c_0 < c_1 = 0 < c_2 = \frac{\pi}{2} < c_3 = \pi.$$

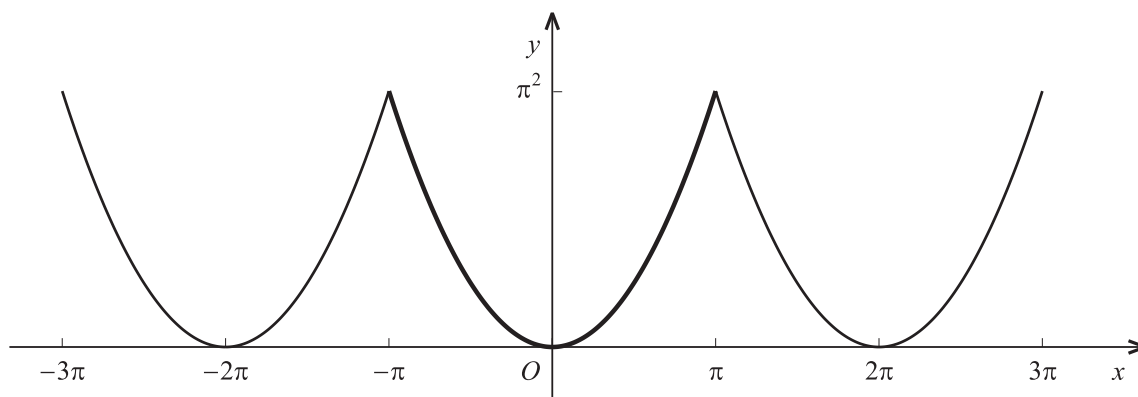
Ponieważ

$$h_1(0) = h_2(0) = 0, \quad h_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = h_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

funkcja f jest ciągła w przedziale $(-\pi, \pi]$ (jak łatwo sprawdzić, ma ona punkty nieciągłości pochodnej dla $x = 0$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$). Zauważmy, że po rozszerzeniu do funkcji 2π -okresowej mamy

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = h_3(\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} h_1(x) = \pi$$

zatem w prawym końcu przedziału $x = \pi$ pojawiła się nieciągłość, gdyż granice prawej i lewostronna są różne (na rysunku mamy skok wykresu). Podobnie dzieje się w lewym końcu przedziału $x = -\pi$ i, ogólnie, we wszystkich punktach $x = (2k + 1)\pi$ (k całkowite).



[rys. 102]

Przykład 3. Niech

$$f(x) = x^2 \quad \text{dla} \quad -\pi < x \leq \pi,$$

dla pozostałych x określamy funkcję f przez warunek okresowości (15) (rys. 102). Funkcja f jest klasy C^∞ w przedziale $(-\pi, \pi)$ i jest w myśl podanej definicji kawałkami gładka w przedziale $[-\pi, \pi]$, przy czym

$$-\pi = c_0 < c_1 = \pi, \quad h_1(x) = x^2.$$

Ponieważ

$$h_1(-\pi) = h_1(\pi),$$

funkcja f po rozszerzeniu do funkcji okresowej pozostaje ciągła, natomiast pojawiają się nieciągłości pochodnej f' w punktach $x = (2k + 1)\pi$ (k całkowite). Łatwy rachunek pozostawiamy Czytelnikowi.

Z przykładów 2, 3 widać, że rozszerzając funkcję określoną początkowo w przedziale $[-\pi, \pi]$ z pominięciem jednego z końców do funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej możemy popsuć zarówno jej gładkość jak i ciągłość.

4. Zbieżność szeregu Fouriera. Funkcja stała

$$g(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

jest oczywiście okresowa i ciągła na całej osi rzeczywistej, możemy więc zastosować tożsamość (14) do sum częściowych jej szeregu Fouriera. Ze wzorów (8), (9) (z zastąpieniem f przez g) otrzymujemy

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2, \quad a_n = b_n = 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

zatem szereg Fouriera funkcji g zawiera tylko jeden wyraz $\frac{a_0}{2} = 1$ i tożsamość (14) daje

$$(16) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Z równości tej będziemy korzystali w dalszym ciągu. Przypomnimy również twierdzenie udowodnione wcześniej (twierdzenie 6 rozdz. V §4).

Twierdzenie 1 (lemat Riemanna). *Jeżeli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

Przejdziemy teraz do badania zbieżności szeregu Fouriera.

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że f jest funkcją 2π -okresową, ciągłą na całej osi rzeczywistej i kawałkami gładką w przedziale $[-\pi, \pi]$. Wówczas dla dowolnie ustalonego x szereg (10) jest zbieżny i jego suma jest równa $f(x)$.*

DOWÓD. Należy udowodnić, że

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = f(x_0)$$

dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$. Mnożąc (16) obustronnie przez $f(x_0)$ dostajemy

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2f(x_0) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

i stąd po uwzględnieniu (14) wynika

$$(18) \quad S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0) \right) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Ostatnią równość możemy zapisać inaczej

$$(19) \quad S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(t) \sin(2n+1)\frac{t}{2} dt,$$

gdzie

$$p(t) = q(t) \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}, \quad q(t) = \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{t}.$$

Dowód (17) zaczniemy od oszacowania z góry funkcji $q(t)$, a następnie $p(t)$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą i kawałkami gładką, możemy dobrać liczbę $0 < \delta < \pi$ tak, aby dla $t \in [0, \delta]$ funkcje złożone $f(x_0 + t)$, $f(x_0 - t)$ spełniały założenia twierdzenia Lagrange'a (twierdzenie 11 rozdz. III §4), z którego wynika że

$$(20) \quad f(x_0 + t) - f(x_0) = t f'(x_0 + \bar{t}), \quad f(x_0 - t) - f(x_0) = t f'(x_0 - \bar{t}),$$

gdzie $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in (0, \delta)$. Dla $t \in [0, \delta]$ obie pochodne $f'(x_0 + t)$, $f'(x_0 - t)$ są ciągłe a więc ograniczone, zatem z (20) wynika

$$(21) \quad \left| f(x_0 + t) - f(x_0) \right| \leq Mt, \quad \left| f(x_0 - t) - f(x_0) \right| \leq Mt$$

gdzie $M > 0$ jest odpowiednio dobraną stałą. Nierówności (21) dają

$$(22) \quad |q(t)| \leq 2M \quad \text{dla } t \in [0, \delta].$$

Ponieważ (por. Przykład 8 rozdz. III §2)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = 1,$$

zmniejszając ewentualnie liczbę δ możemy założyć, że

$$0 < \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} < \frac{3}{2} \quad \text{dla } t \in [0, \delta],$$

co wobec (22) daje

$$(23) \quad |p(t)| \leq 3M \quad \text{dla } t \in [0, \delta].$$

Z oszacowania (23) wynika, że dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność

$$(24) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\eta p(t) \sin(2n+1) \frac{t}{2} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

o ile

$$(25) \quad \eta < \min(\delta, \tau\varepsilon) \quad \text{gdzie } \tau = \frac{\pi}{6M}.$$

Ustalmy teraz liczbę η spełniającą warunek (25) i rozdzielmy przedział całkowania po prawej stronie (19). Otrzymujemy

$$(26) \quad S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\eta p(t) \sin(2n+1) \frac{t}{2} dt + A_n,$$

gdzie

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\pi} p(t) \sin(2n+1) \frac{t}{2} dt.$$

Funkcja $p(t)$ jest ciągła w przedziale $(0, \pi]$, możemy więc zastosować twierdzenie 1, co po podstawieniu $\frac{t}{2} = s$ daje

$$\int_{\eta}^{\pi} p(t) \sin(2n+1) \frac{t}{2} dt = 2 \int_{\frac{\eta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(2s) \sin(2n+1)s ds \rightarrow 0,$$

gdy $n \rightarrow \infty$. Wynika stąd, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$(27) \quad |A_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z równości (26) i nierówności (24), (27) wynika

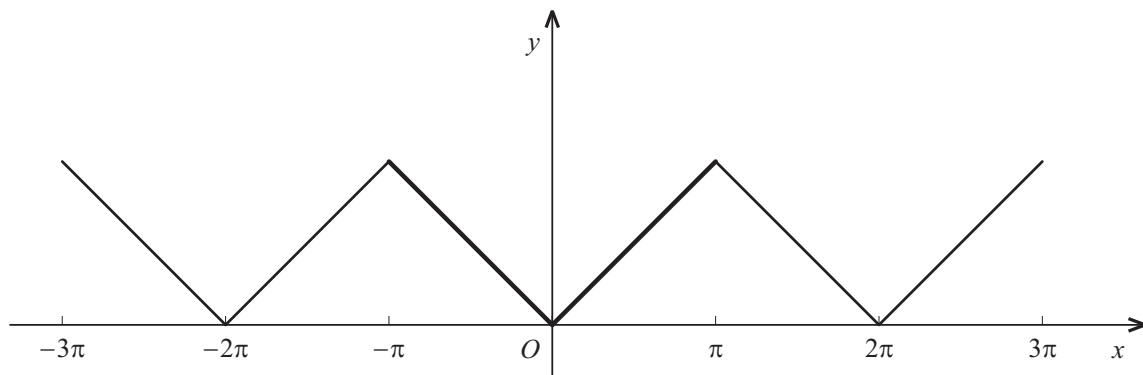
$$|S_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

dla $n > N$ a to oznacza, że zachodzi (17). □

Uwaga. Analizując dowód twierdzenia 2 łatwo zauważyć, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$$

niezależnie od tego, jak została ustalona liczba $\eta > 0$. Dochodzimy zatem do pozornie paradoksalnego wniosku: o zbieżności szeregu Fouriera w punkcie x_0 decydują własności funkcji f w pewnym otoczeniu x_0 (w naszym przypadku jej gładkość w dostatecznie małych przedziałach $[x_0 - \delta, x_0]$, $[x_0, x_0 + \delta]$) - pomimo, że współczynniki szeregu wyznaczone są przez wartości funkcji f w całym przedziale $[-\pi, \pi]$ zgodnie ze wzorami całkowymi (8), (9). Jest to zasada lokalizacji Riemanna.



[rys. 103]

Przykład 4. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(-\pi, \pi]$ jako

$$(28) \quad f(x) = |x| \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

rozszerzoną następnie do funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej. Ponieważ na obu końcach przedziału $[-\pi, \pi]$ wyrażenie $|x|$ przyjmuje tę samą wartość, funkcja f jest ciągła dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ (por. rys. 103). Ponadto f jest funkcją kawałkami gładką w przedziale $[-\pi, \pi]$, gdyż

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } -\pi < x < 0, \\ x & \text{dla } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

przy czym obie funkcje $h_1(x) = -x$, $h_2(x) = x$ są klasy C^1 - zatem zgodnie z twierdzeniem 2 funkcja f rozwija się w szereg Fouriera na całej osi rzeczywistej. Aby obliczyć współczynniki Fouriera na podstawie wzorów (8), (9) zauważmy, że f jest funkcją parzystą w przedziale $[-\pi, \pi]$, wobec tego (por. zadanie 7 rozdz. V §3)

$$(29) \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx, \quad b_n = 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

zatem w rozwinięciu występują wyłącznie funkcje cosinus. Wobec (29) mamy

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \pi,$$

ponadto całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_n &= \frac{1}{n} \int_0^\pi x (\sin nx)' \, dx = \\ &= \frac{1}{n} \left[x \sin nx \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{1}{n^2} (\cos n\pi - 1), \end{aligned}$$

skąd wynika

$$a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ 0 & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Rozwinięcie w szereg Fouriera ma więc postać

$$(30) \quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad \text{dla } -\pi \leq x \leq \pi.$$

Zauważmy, że równość (30) jest prawdziwa tylko w przedziale $[-\pi, \pi]$, gdyż poza tym przedziałem funkcja f jest wprawdzie sumą swojego szeregu Fouriera, ale nie wyraża się już wzorem (28). Rozważmy dla przykładu przedział $[\pi, 3\pi]$. Oznaczając

$$(31) \quad y = x - 2\pi \quad (\pi \leq x \leq 3\pi)$$

mamy

$$-\pi \leq y \leq \pi$$

oraz

$$f(x) = f(y) = |y|$$

na mocy okresowości funkcji f . Zastępując x przez y w rozwinięciu (30) dostajemy

$$|y| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)y}{(2k+1)^2},$$

czyli po wykorzystaniu (31) i okresowości funkcji cosinus

$$|x - 2\pi| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad (\pi \leq x \leq 3\pi).$$

Jako ćwiczenie proponujemy, by Czytelnik napisał w podobny sposób rozwinięcie funkcji f w dowolnym przedziale $(2l-1)\pi, (2l+1)\pi]$ (l całkowite).

Podstawiając $x = 0$ w rozwinięciu (30) dostajemy równość

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

z której wynika, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Widzimy więc, że rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera może być wykorzystane do obliczenia sumy szeregu liczbowego.



5. Rząd malenia współczynników Fouriera. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że f jest funkcją 2π -okresową ciągłą na całej osi rzeczywistej. Z lematu Riemanna (twierdzenie 1) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Okażemy teraz, że rząd malenia współczynników Fouriera można oszacować zależnie od gładkości funkcji f . Dla wygody rachunkowej wprowadzimy dla współczynników Fouriera funkcji f oznaczenie $a_n(f)$, $b_n(f)$. Zakładając, że f jest klasy C^1 w przedziale $[-\pi, \pi]$ możemy we wzorach (8), (9) zastosować całkowanie przez części, otrzymując

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\sin nx)' dx \\ &= \frac{1}{n} \left[f(x) \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx, \\ \pi b_n &= -\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx)' dx \\ &= -\frac{1}{n} \left[f(x) \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \end{aligned}$$

co po uwzględnieniu 2π -okresowości funkcji f daje

$$(32) \quad a_n(f) = -\frac{1}{n}b_n(f'), \quad b_n(f) = \frac{1}{n}a_n(f').$$

Zgodnie z twierdzeniem 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f') = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(f') = 0,$$

zatem (32) można zapisać używając symboli Landau'a (por. rozdz. III §4 punkt 10) w postaci

$$(33) \quad a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

Przedstawiony rachunek możemy powtórzyć zastępując kolejno funkcję f przez jej dalsze pochodne. Otrzymujemy w ten sposób

Stwierdzenie 1. *Załóżmy, że f jest funkcją 2π -okresową ciągłą na całej osi rzeczywistej wraz z pochodnymi rzędu $< m$ ($m \in \mathbb{N}$) oraz że $f^{(m)}$ jest ciągła w przedziale $[-\pi, \pi]$. Wówczas*

$$(34) \quad a_n(f) = \frac{(-1)^k}{n^{2k}} a_n(f^{(2k)}), \quad b_n(f) = \frac{(-1)^k}{n^{2k}} b_n(f^{(2k)}) \quad \text{dla } m = 2k$$

oraz

$$(35) \quad a_n(f) = \frac{(-1)^{k+1}}{n^{2k+1}} b_n(f^{(2k+1)}), \quad b_n(f) = \frac{(-1)^k}{n^{(2k+1)}} a_n(f^{(2k+1)}) \quad \text{dla } m = 2k+1.$$

DOWÓD indukcyjny względem k pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Zapisując (34), (35) w symbolice Landau'a otrzymujemy w oparciu o twierdzenie 1

Stwierdzenie 2. *Przy założeniach Stwierdzenia 1*

$$(36) \quad a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^m}\right), \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

W przypadku funkcji f kawałkami liniowej w przedziale $[-\pi, \pi]$ (zob. punkt 3) można poprawić otrzymane oszacowania. Załóżmy najpierw, że f ma w przedziale $[-\pi, \pi]$ tylko jeden punkt złamania wykresu tzn.

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{dla } -\pi \leq x \leq c, \\ h_2(x) & \text{dla } c < x \leq \pi \end{cases}$$

przy czym

$$(37) \quad h_j(x) = p_j x + q_j, \quad (j = 1, 2), \quad h_1(c) = h_2(c), \quad h_1(-\pi) = h_2(\pi).$$

Mamy dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$

$$(38) \quad \int_a^b \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \left[\sin nx \right]_a^b, \quad \int_a^b \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \left[\cos nx \right]_a^b$$

i stąd po scałkowaniu przez części

$$(39) \quad \begin{aligned} \int_a^b x \cos nx \, dx &= \frac{1}{n} \int_a^b x (\sin nx)' \, dx = \frac{1}{n} \left[x \sin nx \right]_a^b + \frac{1}{n^2} \left[\cos nx \right]_a^b, \\ \int_a^b x \sin nx \, dx &= -\frac{1}{n} \int_a^b x (\cos nx)' \, dx = -\frac{1}{n} \left[x \cos nx \right]_a^b + \frac{1}{n^2} \left[\sin nx \right]_a^b. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{-\pi}^c h_1(x) \cos nx \, dx + \int_c^\pi h_2(x) \cos nx \, dx, \\ \pi b_n &= \int_{-\pi}^c h_1(x) \sin nx \, dx + \int_c^\pi h_2(x) \sin nx \, dx, \end{aligned}$$

zatem zgodnie z (37)

$$\begin{aligned} \pi a_n &= p_1 \int_{-\pi}^c x \cos nx \, dx + q_1 \int_{-\pi}^c \cos nx \, dx + p_2 \int_c^\pi x \cos nx \, dx + q_2 \int_c^\pi \cos nx \, dx, \\ \pi b_n &= p_1 \int_{-\pi}^c x \sin nx \, dx + q_1 \int_{-\pi}^c \sin nx \, dx + p_2 \int_c^\pi x \sin nx \, dx + q_2 \int_c^\pi \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

Uwzględniając (38), (39) dostajemy stąd

$$(40) \quad \begin{aligned} \pi a_n &= \frac{1}{n^2} \left(p_1 \left[\cos nx \right]_{-\pi}^c + p_2 \left[\cos nx \right]_c^\pi \right) + \frac{1}{n} \left\{ h_1(c) - h_2(c) \right\} \sin nc, \\ \pi b_n &= \frac{1}{n^2} \left(p_1 \left[\sin nx \right]_{-\pi}^c + p_2 \left[\sin nx \right]_c^\pi \right) - \\ &\quad \frac{1}{n} \left\{ h_1(c) - h_2(c) \right\} \cos nc + \frac{1}{n} \left\{ h_1(-\pi) - h_2(\pi) \right\} \cos n\pi. \end{aligned}$$

Z założeń (37) wynika, że wyrażenia w nawiasach $\left\{ \right\}$ po prawej stronie znikają, zatem ostatecznie dostajemy oszacowanie

$$|a_n| \leq \frac{2(|p_1| + |p_2|)}{\pi n^2}, \quad |b_n| \leq \frac{|p_1| + |p_2|}{\pi n^2},$$

czyli w symbolice Landau'a

$$(41) \quad a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

Podobny rachunek przeprowadzony dla dowolnej funkcji kawałkami liniowej daje

Stwierdzenie 3. Jeżeli f jest funkcją 2π -okresową ciągłą na całej osi rzeczywistej i kawałkami liniową w przedziale $[-\pi, \pi]$, to prawdziwe są relacje (41).

Szczegóły rachunkowe pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Ze Stwierdzeń 2, 3 wynika łatwo

Twierdzenie 3. Niech f będzie funkcją 2π -okresową ciągłą na całej osi rzeczywistej. Jeżeli jest spełniony jeden z warunków

(i) funkcja f jest kawałkami liniowa w przedziale $[-\pi, \pi]$

lub

(ii) funkcja f ma pochodną f' ciągłą na całej osi rzeczywistej i pochodną f'' ciągłą w przedziale $[-\pi, \pi]$,

to

1^0 szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

jest zbieżny,

2^0 dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x)$ jest sumą swojego szeregu Fouriera, przy czym szereg ten jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny na całej osi rzeczywistej.

DOWÓD. Z nierówności (34) przy $k = 1$ względnie z relacji (41) wynika istnienie stałej $M > 0$ takiej, że

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^2}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ a stąd na mocy kryterium porównawczego (twierdzenie 7 i Przykład 6 rozdz.IV §1) wynika punkt 1^0 tezy. Ponieważ

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|, \quad (n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}),$$

nierówności te zapewniają również bezwzględną i jednostajną zbieżność szeregu Fouriera (por. twierdzenie 15 §1). Ponadto z twierdzenia 2 wynika, że przy uczynionych założeniach funkcja $f(x)$ rozwija się w szereg Fouriera dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, co kończy dowód punktu 2^0 . \square

6. Interpretacja mechaniczna rozwinięcia w szereg Fouriera. Rozważmy ruch punktu materialnego po prostej, którą możemy utożsamiać z osią liczbową (por. rozdz.I §1 punkt 3) i niech $x(t)$ oznacza położenie punktu w chwili $t \geq 0$. Mówimy wówczas, że ruch punktu jest opisany przez funkcję $x(t)$; jeżeli jest to funkcja okresowa, to ruch przez nią opisany nazywamy *ruchem drgającym* lub krócej *drganie*. *Prędkość średnia* w przedziale czasowym $[t_0, t_0 + \Delta t]$ wyznaczona jest przez iloraz

$$\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

zaś granicę tego ilorazu przy $\Delta t \rightarrow 0$ nazywamy *prędkością w chwili t_0* i oznaczamy przez $v(t_0)$. Zatem przyjmując oznaczenie $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ mamy

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \dot{x}(t_0).$$

Funkcja $\dot{x}(t)$ wyznacza rozkład w czasie prędkości punktu. Dla uproszczenia założymy, że drganie punktu ma okres 2π - zatem funkcja $x(t)$ jest 2π -okresowa dla $t \geq 0$ i możemy ją rozszerzyć do funkcji 2π -okresowej na cały przedział $(-\infty, \infty)$ przyjmując formalnie

$$(42) \quad x(t) = x(t + 2\pi) \quad \text{dla} \quad t < 0.$$

Założmy, że położenie punktu i jego prędkość zmieniają się w czasie w sposób ciągły, co oznacza, że funkcje $x(t)$, $\dot{x}(t)$ są ciągłe dla $t \geq 0$ - łatwo sprawdzić, że ciągłość ta zachowuje się po rozszerzeniu funkcji $x(t)$ na przedział $(-\infty, \infty)$ przez warunek (42). W dalszym ciągu możemy więc zakładać, że funkcja $x(t)$ jest 2π -okresowa, ciągła i ma ciągłą pochodną dla $t \in (-\infty, \infty)$. Zgodnie z twierdzeniem 2 ma ona dla dowolnego $t > 0$ rozwinięcie w szereg Fouriera

$$(43) \quad x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t),$$

gdzie

$$(44) \quad x_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Wzory (8), (9) określające współczynniki Fouriera po zastosowaniu Lematu 1 dają

$$(45) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt \, dt.$$

Ruch opisany równaniem (44) nazywamy *drganiami harmonicznymi*. Jest to drganie o okresie

$$T = \frac{2\pi}{n},$$

zatem jego częstotliwość wynosi

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{n}{2\pi}.$$

Rozwinięcie (43) oznacza, że przy uczynionych założeniach ruch drgający można przedstawić jako superpozycję nieskończenie wielu drgań harmonicznymi i przesunięcia określonego przez wyraz początkowy $\frac{a_0}{2}$.

Zbadamy dokładniej ruch opisany równaniem (44). Funkcję $x_n(t)$ można przedstawić w postaci

$$x_n(t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt),$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

(oczywiście zakładamy, że przynajmniej jedna z liczb a_n , b_n jest różna od zera - w przeciwnym wypadku $x_n(t) = 0$ dla wszystkich t i funkcja $x_n(t)$ nie określa ruchu). Ponieważ

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1$$

istnieje kąt $\varphi_n \in (-\pi, \pi]$ taki, że

$$\alpha_n = \cos \varphi_n, \quad \beta_n = \sin \varphi_n$$

(por. zadanie 27 rozdz. III §3 oraz §2 punkt 7). Wobec tego

$$(46) \quad x_n(t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nt - \varphi_n),$$

przy czym wyrażenie

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

określa *amplitudę* drgania harmonicznego (44). Ze wzorów (45) i twierdzenia 1 wynika, że

$$(47) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0.$$

Energię kinetyczną $E_n(t)$ punktu o masie M poruszającego się ruchem (44) określa wzór

$$E_n(t) = \frac{Mv_n^2(t)}{2},$$

gdzie $v_n(t) = \dot{x}_n(t)$ jest prędkością w chwili t . Zgodnie z (46)

$$v_n(t) = -nA_n \sin(nt - \varphi_n),$$

stąd

$$E_n(t) = \frac{1}{2}Mn^2A_n^2 \sin^2(nt - \varphi_n).$$

Ponieważ z założenia pochodna $\dot{x}(t)$ jest ciągła w całym przedziale $(-\infty, \infty)$, możemy zastosować Stwierdzenie 1 przyjmując w nim $m = 1$, co daje dla maksymalnej energii kinetycznej \tilde{E}_n

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{2}M \left(a_n^2(\dot{x}) + b_n^2(\dot{x}) \right),$$

a stąd wobec twierdzenia 1 wynika, że

$$(48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E}_n = 0.$$

Z relacji (47), (48) wynika, że drgania harmoniczne (44) przy dużych n mają małą amplitudę i małą energię kinetyczną, zatem z punktu widzenia interpretacji mechanicznej można je pominąć w rozkładzie (43), który przyjmuje wówczas postać przybliżonej równości

$$x(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_0} x_n(t).$$

7. Szereg Fouriera funkcji parzystej lub funkcji nieparzystej. Jeżeli f jest funkcją nieparzystą (tzn. $f(-x) = -f(x)$), to przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$

funkcja $p(x) = f(x) \cos nx$ jest nieparzysta,

zaś

funkcja $q(x) = f(x) \sin nx$ jest parzysta,

zatem ze wzorów całkowych (8), (9) wynika (por. zadanie 7 rozdz. V §3), że

$$(49) \quad a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

i szereg Fouriera odpowiadający funkcji f ma postać

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

zawiera więc tylko wyrazy z funkcją sinus.

Jeżeli zaś f jest funkcją parzystą (tzn. $f(-x) = f(x)$), to przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$

funkcja $p(x) = f(x) \cos nx$ jest parzysta,

zaś

funkcja $q(x) = f(x) \sin nx$ jest nieparzysta,

zatem wzory całkowe (8), (9) przybierają postać

$$(50) \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Szereg Fouriera odpowiadający funkcji f ma teraz postać

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

zawiera więc tylko wyrazy z funkcją cosinus.

Widać stąd, że jeżeli funkcja f jest określona tylko w przedziale $[0, \pi]$, to rozwijając ją w szereg Fouriera możemy postawić dodatkowy warunek:

a.) chcemy, by rozwinięcie zawierało tylko wyrazy z funkcją sinus - należy wówczas rozszerzyć funkcję f do funkcji nieparzystej na przedziale $(-\pi, \pi]$ przyjmując

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{dla} \quad -\pi < x < 0;$$

b.) chcemy, by rozwinięcie zawierało tylko wyrazy z funkcją cosinus - wówczas rozszerzamy funkcję f do funkcji parzystej na przedziale $(-\pi, \pi]$ przyjmując

$$f(-x) = f(x) \quad \text{dla} \quad -\pi < x < 0.$$

Oczywiście chcąc rozwinąć tak rozszerzoną funkcję w szereg Fouriera należy następnie rozszerzyć ją na całą oś rzeczywistą do funkcji 2π -okresowej i zbadać, czy spełnione są warunki dostateczne rozwijalności.

Opisane operacje rozszerzania zastosowane do funkcji ciągłej w przedziale $[0, \pi]$ mogą popsuć jej ciągłość - por. Przykład 2. Dlatego w dalszych rozważaniach zrezygnujemy z założenia ciągłości funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej, będziemy jedynie zakładać, że jest ona kawałkami ciągła w przedziale $[-\pi, \pi]$ (a więc również w każdym innym przedziale ograniczonym $[a, b]$).

8. Rozwijalność w szereg Fouriera funkcji kawałkami ciągłej. Dla funkcji kawałkami ciągłej w przedziale $[a, b]$ (punkt 3) określamy całkę przyjmując

$$(51) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^p \int_{c_{j-1}}^{c_j} h_j(x) dx$$

(Czytelnik który przestudiował §5 rozdziału V zauważy z łatwością, że tak zdefiniowana całka jest całką Riemanna z funkcji f w przedziale $[a, b]$). Łatwo sprawdzić, że wzory (49), (50) określające współczynniki Fouriera funkcji nieparzystej względnie parzystej pozostają prawdziwe przy założeniu, że f jest kawałkami ciągła.

Z definicji (51) otrzymujemy natychmiast ogólniejsze sformułowanie lematu Riemanna:

Twierdzenie 1'. *Jeżeli f jest funkcją kawałkami ciągłą w przedziale $[a, b]$, to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx = 0.$$

□

Opierając się na definicji (51) i lemacie 1 otrzymujemy również łatwo

Lemat 2. *Jeżeli h jest funkcją 2π -okresową na całej osi rzeczywistej, kawałkami ciągłą w przedziale $[-\pi, \pi]$, to dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość (12).*

DOWÓD. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że przy definicji (51) całki z funkcji kawałkami ciągłej przenoszą się bez zmian

a.) twierdzenie o podziale przedziału całkowania (Twierdzenie 3' rozdz.V §1),

b.) reguła całkowania przez podstawienie (Twierdzenie 2 rozdz.V §3) dla podstawienia $y = x + c$ (c stała).

Szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. □

Opierając się na lemacie 2 otrzymujemy przedstawienie całkowe (14) sumy częściowej szeregu Fouriera funkcji f przy założeniu, że jest ona 2π -okresowa na całej osi rzeczywistej i kawałkami ciągła w przedziale $[-\pi, \pi]$.

W dalszym ciągu przyjmujemy skrócone oznaczenie dla granicy lewo- względnie prawostronnej

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+).$$

oraz wprowadzimy oznaczenie

$$\sigma_f(x) = \frac{1}{2} \left(f(x_+) + f(x_-) \right).$$

Zauważmy, że funkcja f kawałkami ciągła w przedziale $[a, b]$ ma zawsze granice jednostronne na końcach przedziału

$$f(a_+) = h_1(a), \quad f(b_-) = h_p(b)$$

oraz granice lewo- i prawostronną w każdym punkcie c_j ($j = 1, \dots, p-1$) będącym punktem nieciągłości

$$f(c_j^-) = h_j(c_j), \quad f(c_j^+) = h_{j+1}(c_j) \quad (j = 1, \dots, p-1).$$

Warunek dostateczny rozwijalności funkcji f w szereg Fouriera sformułujemy w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że f jest funkcją 2π -okresową na całej osi rzeczywistej i kawałkami gładką w przedziale $[-\pi, \pi]$. Wówczas dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{R}$ szereg (10) jest zbieżny i jego suma wynosi*

- (i) $f(x)$, jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x ,
- (ii) $\sigma_f(x)$, gdy x jest punktem nieciągłości funkcji f .

DOWÓD. Należy udowodnić, że dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(52) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2} \left(f(x_0^+) + f(x_0^-) \right).$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , to wyrażenie po prawej stronie (52) jest równe $f(x_0)$ i wystarczy przenieść bez zmian dowód twierdzenia 2 z tym, że funkcja $p(t)$ jest teraz kawałkami ciągła w każdym przedziale $[a, \pi]$ ($0 < a < \pi$), stosujemy więc lemat Riemanna w ogólniejszej postaci (twierdzenie 1'). Jeżeli x_0 jest punktem nieciągłości funkcji f , to dowód twierdzenia 2 wymaga nieznaczącej modyfikacji. Mnożąc obustronnie (16) przez

$$\sigma_f(x_0) = \frac{1}{2} \left(f(x_0^+) + f(x_0^-) \right)$$

dostajemy

$$\sigma_f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2\sigma_f(x_0) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

i stąd wobec (14)

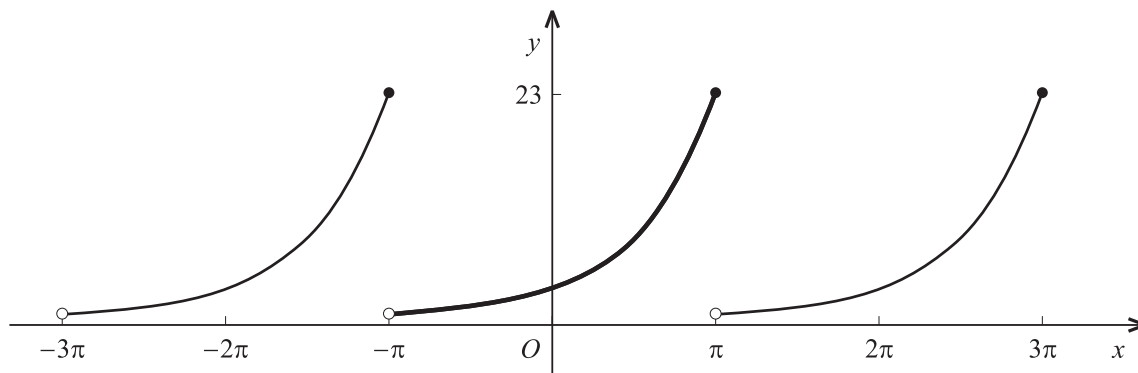
$$S_n(x_0) - \sigma_f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(f(x_0+t) - f(x_0^+) + f(x_0-t) - f(x_0^-) \right) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Dalsze rozumowanie przebiega podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2 z tym, że funkcję q zastępujemy przez

$$q_1(t) = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t}$$

i do całki A_n stosujemy twierdzenie 1'. □

9. Przykłady rozwinięć w szereg Fouriera.



[rys. 104]

Przykład 5. Rozwińmy w szereg Fouriera funkcję

$$(53) \quad f(x) = e^x \quad (-\pi < x \leq \pi).$$

Funkcja f jest kawałkami gładka w przedziale $[-\pi, \pi]$, mamy bowiem

$$f(x) = h_1(x) \quad \text{dla} \quad -\pi = c_0 < x < c_1 = \pi,$$

gdzie $h_1(x) = e^x$ jest klasy C^1 w przedziale $[-\pi, \pi]$ (oczywiście h_1 jest klasy C^∞ na całej osi rzeczywistej, ale ta informacją nie jest nam potrzebna). Przyjmując

$$(54) \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

rozszerzamy funkcję f do funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej (rys. 104), która ma nieciągłość skokową w każdym punkcie $x_k = (2k + 1)\pi$ (k całkowite) i jest ciągła poza tymi punktami. Współczynniki Fouriera funkcji f możemy wyliczyć stosując wzory (88) rozdz.V §2, które dają

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx = \frac{1}{1+n^2} \left[e^x (\cos nx + n \sin nx) \right]_{-\pi}^{\pi}, \\ \pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx = \frac{1}{1+n^2} \left[e^x (\sin nx - n \cos nx) \right]_{-\pi}^{\pi}, \end{aligned}$$

skąd po wykonaniu podstawień

$$a_n = (-1)^n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} = (-1)^n \frac{2 \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

oraz

$$b_n = (-1)^{n-1} \frac{n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} = (-1)^{n-1} \frac{2n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

W przedziale otwartym $(-\pi, \pi)$ funkcja f jest ciągła, zgodnie z twierdzeniem 4 jest więc sumą swojego szeregu Fouriera, mamy zatem

$$(55) \quad e^x = \frac{2}{\pi} \sinh \pi \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right] \quad \text{dla} \quad -\pi < x < \pi.$$

W punktach $x = \pi$, $x = -\pi$ funkcja f jest nieciągła, z twierdzenia 4 wynika więc, że wyrażenie po prawej stronie (55) ma wartość

$$\sigma_f(\pi) = \sigma_f(-\pi) = \frac{1}{2}(e^\pi + e^{-\pi}) = \cosh \pi.$$

Suma szeregu po prawej stronie (55) wynosi $f(x)$ dla każdego $x \neq (2k+1)\pi$, jednak wartość $f(x)$ nie jest określona wzorem (53) dla x leżących poza przedziałem $(-\pi, \pi)$, natomiast możemy ją wyliczyć z warunku okresowości (54). Przykładowo, dla $x \in (\pi, 3\pi)$ mamy

$$x = y + 2\pi \quad \text{gdzie} \quad y \in (-\pi, \pi)$$

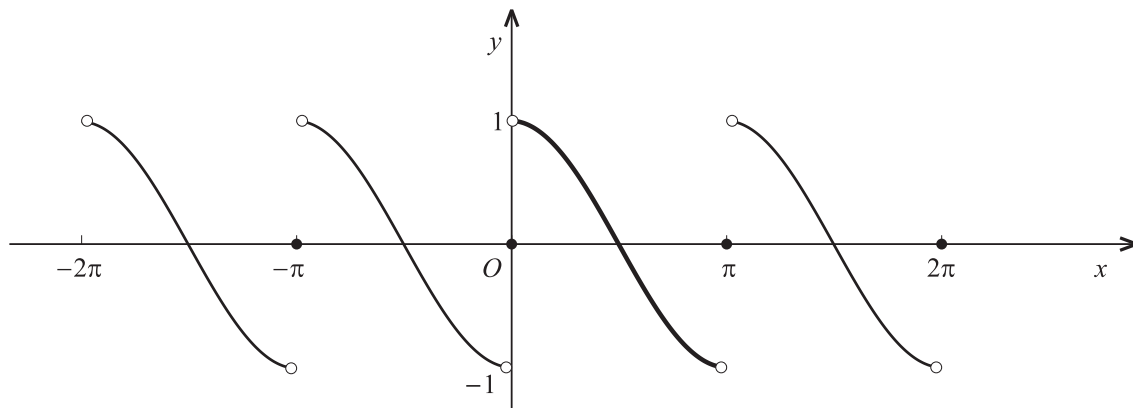
i stąd

$$f(x) = f(y) = e^y = e^{x-2\pi} \quad (\pi < x < 3\pi).$$

Równość (55) pozostaje słuszna po zastąpieniu x przez y a stąd, ze względu na 2π -okresowość prawej strony dostajemy

$$e^x = \frac{2e^{2\pi}}{\pi} (\sinh \pi) g(x) \quad (\pi < x < 3\pi),$$

gdzie $g(x)$ oznacza wyrażenie w nawiasie $\left[\right]$ we wzorze (55). Proponujemy, by Czytelnik uogólnił to spostrzeżenie na przypadek $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. W punktach $x_k = (2k+1)\pi$ wyrażenie po prawej stronie (55) ma stałą wartość równą $\cosh \pi$.



[rys. 105]

Przykład 6. Rozwiemy funkcję

$$f(x) = \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

w szereg Fouriera zawierający tylko funkcję sinus. Zaczniemy od rozszerzenia funkcji f do funkcji nieparzystej w przedziale $(-\pi, \pi)$ przyjmując

$$f(0) = 0, \quad f(x) = -\cos(-x) = -\cos x \quad \text{dla} \quad -\pi < x < 0,$$

następnie rozszerzymy ją do funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej przez warunki

$$f(\pi) = \cos \pi = -1, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wykres tak rozszerzonej funkcji f podany jest na rys. 105. Jest to funkcja kawałkami gładka w przedziale $[-\pi, \pi]$ mająca nieciągłość skokową w każdym punkcie $x = k\pi$ (k całkowite), przy czym $\sigma_f(k\pi) = 0$ dla dowolnego k . Aby obliczyć jej współczynniki Fouriera skorzystamy z równości (49). Mamy

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin nx \, dx,$$

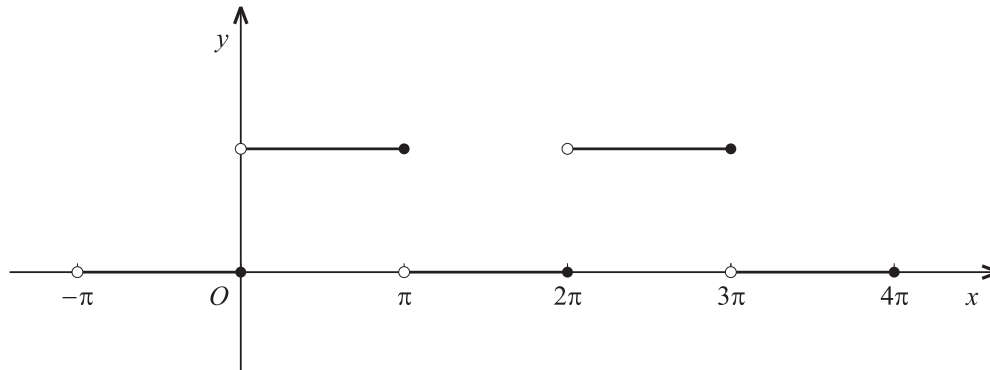
skąd po zastosowaniu wzoru (87) rozdz.V §2 dostajemy

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2m - 1, \\ \frac{4n}{\pi(n^2 - 1)} & \text{dla } n = 2m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

W przedziale $(0, \pi)$ funkcja f jest ciągła, zatem zgodnie z twierdzeniem 4 jest w tym przedziale sumą swojego szeregu Fouriera, co daje rozwinięcie

$$(56) \quad \cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{4m^2 - 1} \sin(2mx) \quad (0 < x < \pi).$$

Na końcach przedziału tzn. w punktach $x = 0, x = \pi$ będących punktami nieciągłości równość (56) nie zachodzi. Zgodnie z twierdzeniem 4 suma szeregu po prawej stronie wynosi $\sigma_f(0) = \sigma_f(\pi) = 0$, co zresztą widać bezpośrednio z postaci szeregu.



[rys. 106]

Przykład 7. Rozwińmy w szereg Fouriera funkcję

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < t \leq \pi, \\ 0 & \text{dla } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

rozszerzoną do funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej przez warunek

$$(57) \quad u(t + 2\pi) = u(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

(rys. 106). Jeżeli interpretujemy t jako czas, to funkcja $u(t)$ może ilustrować natężenie prądu stałego w przewodniku, który jest okresowo włączany i wyłączany. Po rozszerzeniu (57) mamy

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\pi < t \leq 0, \\ 1 & \text{dla } 0 < t \leq \pi, \end{cases}$$

zatem funkcja u jest kawałkami gładka w przedziale $[-\pi, \pi]$ i możemy do niej zastosować twierdzenie 4. Wzory (8), (9) dają

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nt \, dt$$

czyli po prostym rachunku

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & \text{dla } n = 2m - 1, \\ 0 & \text{dla } n = 2m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Punkty $t = k\pi$ (k całkowite) są jedynymi punktami nieciągłości funkcji $u(t)$, wobec tego na mocy twierdzenia 4 szukane rozwinięcie ma postać

$$(58) \quad u(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)t \quad \text{dla } t \neq k\pi.$$

natomiast w punktach nieciągłości suma po prawej stronie jest równa $\sigma_u(k\pi) = \frac{1}{2}$ - co zresztą widać bezpośrednio z postaci szeregu.

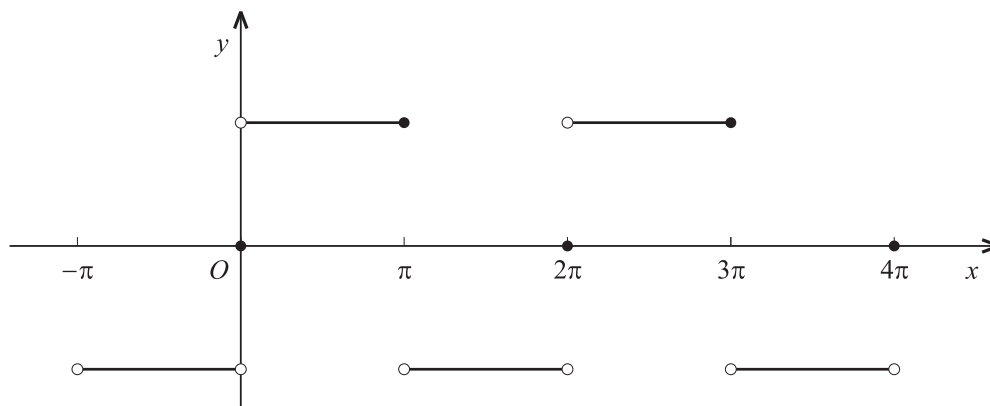
Podstawiając $t = \frac{\pi}{2}$ w rozwinięciu (58) otrzymujemy

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1},$$

skąd (po podstawieniu $k = m - 1$) wynika

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Jest to rozwinięcie liczby π w szereg Leibniza (por. §2, Przykład 10 oraz zadanie 19).



[rys. 107]

Przykład 8. Rozwiemy w szereg Fouriera funkcję

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0, \\ 1 & \text{dla } 0 < t \leq \pi, \\ -1 & \text{dla } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

rozszerzoną przez warunek (57) do funkcji 2π -okresowej w całym przedziale $(-\infty, \infty)$. Podobnie, jak w przykładzie 7, funkcja u może ilustrować stałe natężenie prądu, który tym razem okresowo zmienia kierunek (rys. 107). Z warunku (57) wynika, że

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla } -\pi < t < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 < t \leq \pi, \end{cases}$$

zatem u jest funkcją kawałkami ciągłą i nieparzystą w przedziale $[-\pi, \pi]$ i do znalezienia jej współczynników Fouriera można zastosować wzory (49), co daje

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt \quad (n \in \mathbb{N}),$$

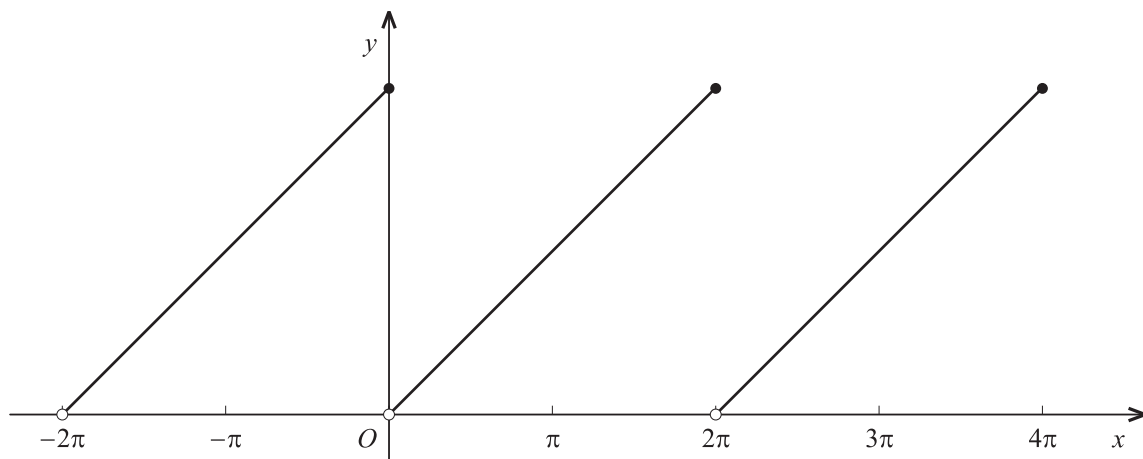
skąd po prostym rachunku dostajemy

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{dla } n = 2k - 1, (k \in \mathbb{N}). \\ 0 & \text{dla } n = 2k \end{cases}$$

Funkcja u spełnia założenia twierdzenia 4, możemy ją zatem rozwinąć w szereg Fouriera w każdym punkcie w którym jest ona ciągła. Ponieważ jedynymi punktami nieciągłości są punkty $t = k\pi$ (k całkowite), mamy

$$(59) \quad u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)t \quad \text{dla } t \neq k\pi.$$

W punktach nieciągłości zgodnie z twierdzeniem 4 suma szeregu Fouriera wynosi $\sigma_f(k\pi) = 0$, co zresztą widać z postaci szeregu.



[rys. 108]

Przykład 9. Rozwiemy w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = x \quad (0 < x \leq 2\pi),$$

którą następnie rozszerzamy do funkcji 2π -okresowej w całym zbiorze liczb rzeczywistych przez warunek (54) (rys.108). Po rozszerzeniu funkcja f jest kawałkami ciągła w przedziale $[-\pi, \pi]$, zatem zgodnie z Lematem 2 możemy do obliczenia jej współczynników Fouriera zmodyfikować wzory (8), (9) przyjmując

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

skąd po zastosowaniu wzorów (39) dostajemy

$$a_0 = 2\pi, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{2}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Z twierdzenia 4 wynika, że $f(x)$ jest sumą swojego szeregu Fouriera dla wszystkich $x \neq 2k\pi$ (k całkowite), stąd

$$(60) \quad x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \quad (0 < x < 2\pi).$$

W punktach nieciągłości $x = 2k\pi$ prawa strona (60) jest zgodnie z twierdzeniem 4 równa $\sigma_f(2k\pi) = \pi$, co zresztą widać bezpośrednio.

Rozważmy dla ustalonego k całkowitego, $k \neq 0$ przedział

$$\mathbb{P}_k : \quad 2k\pi < x < 2(k+1)\pi,$$

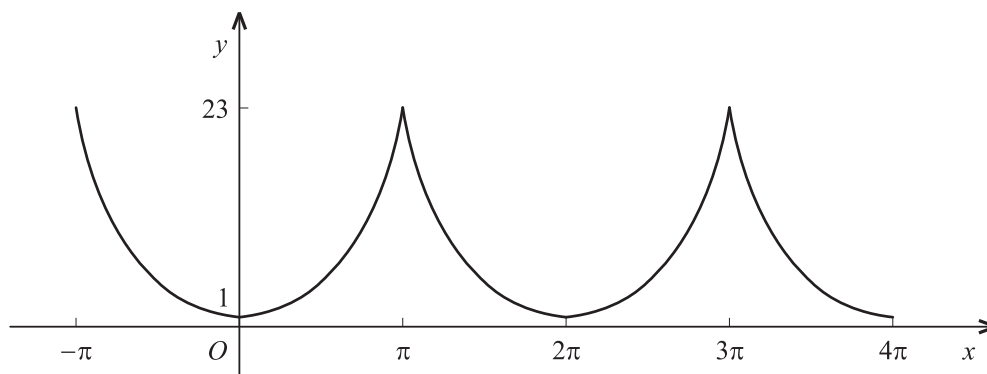
wówczas dla $y = x - 2k\pi$ zachodzi nierówność

$$0 < y < 2\pi$$

i równość (60) pozostaje prawdziwa po zastąpieniu x przez y , co daje ze względu na 2π -okresowość prawej strony

$$x = (2k+1)\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \quad (x \in \mathbb{P}_k).$$

W ten sposób otrzymujemy rozwinięcie w szereg trygonometryczny funkcji $f(x) = x$ dla dowolnego $x \neq 2k\pi$ z tym, że w różnych przedziałach \mathbb{P}_k otrzymujemy różne rozwinięcia (różniące się o stałą).



[109]

Przykład 10. Rozwiniemy funkcję

$$f(x) = e^x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

w szereg Fouriera zawierający tylko funkcję cosinus. W tym celu rozszerzamy funkcję f do funkcji parzystej na przedziale $(-\pi, \pi)$ przyjmując

$$(61) \quad f(x) = f(-x) \quad \text{dla} \quad -\pi < x < 0$$

a następnie do funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej przez warunek

$$(62) \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Z równości (61), (62) wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

oraz

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

zatem po rozszerzeniu funkcja f jest ciągła na całej osi rzeczywistej. Łatwo natomiast sprawdzić, że w punktach $x = 0$ oraz $x = \pi$ mamy nieciągłość pierwszej pochodnej (a więc załamanie wykresu - por. rys. 109). Mianowicie ze względu na okresowość

$$f'_+(\pi) = f'_+(-\pi)$$

a stąd

$$f'_+(\pi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-\pi + h) - f(-\pi)}{h},$$

czyli po zastosowaniu twierdzenia o wartości średniej (twierdzenie 11 rozdz.III §4)

$$f'_+(\pi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(-\pi + \Theta h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-e^{\pi - \Theta h}) = -e^\pi,$$

natomiast

$$f'_-(\pi) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\pi + h) - f(\pi)}{h},$$

czyli

$$f'_-(\pi) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f'(\pi + \Theta h) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\pi + \Theta h} = e^\pi,$$

zatem

$$f'_+(\pi) \neq f'_-(\pi).$$

Podobnie

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(\Theta h) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\Theta h} = 1,$$

natomiast

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f'(\Theta h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-e^{-\Theta h}) = -1,$$

zatem

$$f'_+(0) \neq f'_-(0).$$

W podobny sposób można okazać, że $f'_+(x_k) \neq f'_-(x_k)$, gdzie $x_k = k\pi$ (k całkowite), zatem w tych punktach funkcja f nie ma pochodnej (wykres ma załamanie). Funkcja f spełnia warunki

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } -\pi = c_0 < x < c_1 = 0, \\ e^x & \text{dla } 0 = c_1 < x < c_2 = \pi \end{cases}$$

a więc zgodnie z definicją podaną w punkcie 3 jest kawałkami gładka w przedziale $[-\pi, \pi]$ i, jak już wspomnieliśmy, ciągła na całej osi rzeczywistej. Wobec tego na podstawie twierdzenia 2 jest sumą swojego szeregu Fouriera w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$. Dla obliczenia współczynników Fouriera możemy zastosować wzory (50), co daje

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx dx, \quad b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

czyli po obliczeniu całek (por. wzór (88) rozdz.V §2)

$$a_n = \frac{2}{\pi(1+n^2)} \left((-1)^n e^\pi - 1 \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ostatecznie otrzymujemy szukane rozwinięcie

$$e^x = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

10. Postać zespolona szeregu Fouriera. Posługując się wzorami Eulera (89) §2 dostajemy

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) = \frac{i}{2}(e^{-inx} - e^{inx}),$$

zatem szereg (10) może być zapisany w postaci

$$(63) \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + d_n e^{-inx})$$

gdzie

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad d_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aby wyrazić współczynniki c_n , d_n przy pomocy wzorów całkowych przyjmijmy umowę

$$\int_a^b (u(x) + iv(x)) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

dla dowolnych funkcji u, v ciągłych lub kawałkami ciągłych w przedziale $[a, b]$, lub ogólniej - takich, że obie całki po prawej stronie mają sens. Wówczas ze wzorów (8), (9) dostajemy

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx, \quad d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \sin nx) dx$$

$$(n \in \mathbb{N}),$$

czyli po zastosowaniu wzoru Eulera (88) §2

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx, \quad d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} f(x) dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zauważmy, że $d_n = c_{-n}$ i wobec tego można dla współczynników w szeregu (63) przyjmując jednolity wzór całkowy

$$(64) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx \quad (k \text{ całkowite}).$$

zaś szereg Fouriera odpowiadający funkcji f zapisać w postaci

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{inx}$$

lub krócej

$$(65) \quad f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

11. Rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji o dowolnym okresie. Załóżmy, że funkcja f określona na całej osi rzeczywistej jest

a.) $2l$ -okresowa - co oznacza, że spełnia warunek

$$f(x + 2l) = f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

b.) kawałkami ciągła w przedziale $[-l, l]$ (a zatem i w każdym innym przedziale domkniętym i ograniczonym). Przy pomocy podstawienia liniowego

$$(66) \quad y = \frac{\pi}{l}x, \quad x = \frac{l}{\pi}y$$

możemy utworzyć funkcję 2π -okresową

$$g(y) = f\left(\frac{l}{\pi}y\right),$$

do której stosują się wszystkie poprzednie rozważania. W szczególności szereg Fouriera funkcji g ma postać

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

gdzie współczynniki a_n , b_n określone są wzorami

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny \, dy, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny \, dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Po przejściu do zmiennej x dostajemy szereg Fouriera funkcji $f(x)$

$$(68) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x).$$

Współczynniki a_n , b_n łatwo wyrazić w zmiennej x stosując podstawienie (66) (por. twierdzenie 2 rozdz.V §3). Mamy

$$dy = \frac{\pi}{l} dx$$

i stąd

$$(69) \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x \, dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Twierdzenie o rozwijalności w szereg Fouriera przenosi się łatwo na przypadek funkcji o dowolnym okresie. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 5. Niech f będzie funkcją $2l$ -okresową na całej osi rzeczywistej i kawałkami gładką w przedziale $[-l, l]$. Wówczas dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{R}$ szereg (68) ze współczynnikami a_n , b_n wyrażonymi wzorami (69) jest zbieżny i jego suma wynosi

- (i) $f(x)$ jeżeli f jest ciągła w punkcie x ,
- (ii) $\sigma_f(x) = \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-))$ gdy x jest punktem nieciągłości funkcji f .

DOWÓD. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że

1^o funkcja g spełnia założenia Twierdzenia 4,

2^o Funkcja f jest ciągła w ustalonym punkcie x wtedy i tylko wtedy gdy funkcja g jest ciągła w punkcie y ,

3^o $\sigma_f(x) = \sigma_g(y)$,

(x , y związane relacją (66)). □

Jeżeli f jest funkcją nieparzystą w przedziale $[-l, l]$, to

$$(70) \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

zatem szereg Fouriera (68) zawiera tylko wyrazy z funkcją sinus - podobnie jak w przypadku $l = \pi$ rozważanym poprzednio. Jeżeli zaś f jest funkcją *parzystą* w przedziale $[-l, l]$, to

$$(71) \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad b_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

i w szeregu Fouriera (68) występują tylko wyrazy z funkcją cosinus. Współczynniki w tych wyrazach obliczamy stosując wzór (70) dla funkcji nieparzystej względnie (71) dla funkcji parzystej.

12. Rozwinięcie w szereg trygonometryczny funkcji określonej w dowolnym przedziale. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją kawałkami ciągłą w przedziale $[a, b]$, to przy pomocy podstawienia liniowego

$$(72) \quad x = a + \frac{b-a}{\pi} y, \quad y = \frac{\pi}{b-a} (x-a)$$

możemy utworzyć nową funkcję

$$(73) \quad g(y) = f(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} y\right)$$

kawałkami ciągłą w przedziale $[0, \pi]$. Funkcję g możemy rozszerzyć do funkcji parzystej w przedziale $[-\pi, \pi]$ a następnie do funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej. Szereg Fouriera funkcji g ma postać

$$(74) \quad g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny,$$

gdzie

$$(75) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(y) \cos ny \, dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Po powrocie do zmiennej x szereg (74) przyjmuje postać

$$(76) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{b-a} (x-a),$$

przy czym stosując do całki (75) podstawienie (72) dostajemy

$$(77) \quad a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi}{b-a} (x-a) \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Szereg (76) można również zapisać w postaci

$$(78) \quad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos ncx + B_n \sin ncx)$$

jeżeli przyjmiemy

$$(79) \quad c = \frac{\pi}{b-a}, \quad A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n \cos \frac{n\pi}{b-a} a, \quad B_n = a_n \sin \frac{n\pi}{b-a} a.$$

Szereg (76) (lub równoważny mu szereg (78)) nazwiemy *szeregiem trygonometrycznym*.

Z twierdzenia 4 wynika łatwo

Twierdzenie 6. Jeżeli f jest funkcją kawałkami gładką w przedziale $[a, b]$ i przyjmiemy dodatkowo, że

$$(80) \quad f(a) = f(a+), \quad f(b) = f(b-)$$

oraz

$$(81) \quad f(x) = \sigma_f(x)$$

w każdym punkcie nieciągłości $x \in (a, b)$, to funkcja f rozwija się w przedziale $[a, b]$ w szereg trygonometryczny (76) ze współczynnikami określonymi wzorami (77).

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że

1^o funkcja g określona wzorem (73) po rozszerzeniu do funkcji parzystej w przedziale $[-\pi, \pi]$ i 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej spełnia założenia twierdzenia 4,

2^o g jest ciągła w ustalonym punkcie $y \in (0, \pi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w punkcie $x \in (a, b)$,

3^o $\sigma_f(x) = \sigma_g(y)$ gdy $x \in (a, b)$ jest punktem nieciągłości funkcji f (x, y związane relacją (72)).

Na podstawie tych uwag i warunku (81) nałożonego na funkcję f stwierdzamy po zastosowaniu do funkcji g twierdzenia 4, że $f(x)$ jest sumą szeregu (76) w każdym punkcie $x \in (a, b)$. Aby wykazać, że stwierdzenie to jest prawdziwe również dla $x = a$, $x = b$ wystarczy sprawdzić, że funkcja g po rozszerzeniu jest ciągła w punktach $x = 0$, $x = \pi$ i jeszcze raz zastosować do niej twierdzenie 4. Z warunku (80) wynika, że funkcja g jest ciągła prawostronnie w punkcie $y = 0$ i lewostronnie w punkcie $y = \pi$. Po rozszerzeniu g do funkcji parzystej w przedziale $[-\pi, \pi]$ mamy

$$(82) \quad g(0-) = g(0+) = g(0)$$

oraz

$$(83) \quad g(-\pi+) = g(\pi-) = g(\pi),$$

natomiast po rozszerzeniu do funkcji 2π -okresowej dostajemy

$$(84) \quad g(-\pi+) = g(\pi+).$$

Z (82) wynika ciągłość g w punkcie $y = 0$, zaś relacje (83), (84) zapewniają jej ciągłość w punkcie $x = \pi$. \square

Przykład 11. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{dla } 3 < x \leq 5, \end{cases} \quad f(3) = \sigma_f(3) = \frac{1}{2}.$$

Funkcja f spełnia w przedziale $[1, 5]$ warunki (80), (81) zatem, zgodnie z twierdzeniem 6, rozwija się w tym przedziale w szereg trygonometryczny (76). Współczynniki a_n obliczymy ze wzoru (77) stosując podstawienie (72). Mamy

$$x = 1 + \frac{4}{\pi}y, \quad y = \frac{\pi}{4}(x - 1), \quad dx = \frac{4}{\pi} dy,$$

zatem

$$a_n = \frac{1}{2} \int_3^5 \cos \frac{n\pi}{4}(x-1) dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos ny dy,$$

skąd po scałkowaniu

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin ny \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2}{\pi n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

czyli ostatecznie

$$a_0 = 1, \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Funkcja f ma w przedziale $[1, 5]$ rozwinięcie

$$(85) \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos \frac{1}{4}(2k-1)\pi(x-1).$$

Równość (85) daje jednolity zapis funkcji, która poprzednio była określona różnymi wzorami w dwóch różnych przedziałach. Ogólnie biorąc, twierdzenie 6 zapewnia możliwość jednolitego przedstawienia funkcji $f(x)$ określonej poprzednio przy pomocy różnych formuł zależnie od zakresu zmienności x . Takie "sklejanie z kawałków" może być wygodne przy badaniu opisu matematycznego zjawisk fizycznych.

13. Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa. Z twierdzenia 6 wyprowadzimy

Twierdzenie 7 (I twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa). *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać wielomian w taki, że dla $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność*

$$|f(x) - w(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie to można sformułować krócej jako

Twierdzenie 7'. *Każdą funkcję ciągłą w przedziale domkniętym można aproksymować jednostajnie z dowolną dokładnością przez wielomiany.*

DOWÓD twierdzenia poprzedzą pewne rozważania wstępne. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła i kawałkami liniowa w przedziale $[a, b]$, wówczas tą samą własność ma w przedziale $[0, \pi]$ funkcja $g(y)$ określona wzorem (73). Po rozszerzeniu do funkcji parzystej funkcja g zostaje kawałkami liniowa w przedziale $[-\pi, \pi]$. Ponadto, jak wynika z dowodu twierdzenia 6, jest ona po rozszerzeniu do funkcji 2π -okresowej ciągła w punktach $x = 0$, $x = \pi$ - a więc i na całej osi rzeczywistej. Stosując twierdzenie 3 do funkcji $g(y)$ i przechodząc następnie do zmiennej x przy pomocy wzorów (72) stwierdzamy, że szereg (76) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[a, b]$ do funkcji $f(x)$. Oznacza to, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, że dla $m > N$ i dla wszystkich $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - T_m(x)| < \varepsilon,$$

gdzie T_m oznacza m -tą sumę częściową szeregu (76) lub, co jest równoważne) szeregu (78). Udowodniliśmy zatem

Lemat 3. Niech $h(x)$ będzie funkcją ciągłą i kawałkami liniową w przedziale $[a, b]$. Wówczas do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać wyrażenie

$$H(x) = A_0 + \sum_{n=1}^m (A_n \cos ncx + B_n \sin ncx)$$

(gdzie $c, A_0, A_n, B_n, m \in \mathbb{N}$ są stałe) tak, by dla $x \in [a, b]$ zachodziła nierówność

$$|h(x) - H(x)| < \varepsilon.$$

□

W §2 wykazaliśmy, że funkcje sinus i cosinus rozwijają się w całym przedziale $(-\infty, \infty)$ na szereg potęgowy jednostajnie zbieżny w każdym przedziale ograniczonym $[a, b]$. Wynika stąd, że do dowolnie ustalonego $\eta > 0$ można tak dobrać wielomiany $p_n(x)$, $q_n(x)$ (będące sumami częściowymi odpowiednich szeregów potęgowych), by dla $x \in [a, b]$ zachodziły nierówności

$$|\cos ncx - p_n(x)| < \eta, \quad |\sin ncx - q_n(x)| < \eta$$

i wobec tego prawdziwy jest

Lemat 4. Niech $H(x)$ oznacza wyrażenie, o którym mowa w lemacie 3. Wówczas do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać wielomian $w(x)$ tak, by dla $x \in [a, b]$ zachodziła nierówność

$$|H(x) - w(x)| < \varepsilon.$$

□

Aby udowodnić twierdzenie 7 wystarczy teraz okazać, że funkcję ciągłą f można aproksymować przez funkcję ciągłą i kawałkami liniową h , a następnie powołać się na lematy 3, 4.

Zgodnie z twierdzeniem 9 rozdz. III §3 funkcja f jest jednostajnie ciągła w przedziale $[a, b]$, zatem do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $x', x'' \in [a, b]$ spełniających warunek

$$|x' - x''| < \delta$$

zachodziła nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rozważmy podział odcinka $[a, b]$ określony nierównościami

$$(86) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b,$$

przy czym

$$(87) \quad x_j - x_{j-1} < \delta \quad (j = 1, \dots, p)$$

i niech h będzie funkcją liniową w każdym przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ taką, że

$$(88) \quad h(x_j) = f(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, p)$$

(z warunku (88) widać, że wykres funkcji h jest łamaną wpisaną w wykres funkcji f w przedziale $[a, b]$).

Dla dowolnie ustalonego $x \in [a, b]$ oszacujemy różnicę $f(x) - h(x)$. Punkt x należy do pewnego przedziału $[x_{j-1}, x_j]$, wobec tego z warunków (87), (88) wynika, że

$$(89) \quad |f(x) - f(x_{j-1})| = |f(x) - h(x_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

W przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ funkcja h jest określona wzorem

$$h(x) = \alpha_j x + \beta_j$$

zatem dla $x \in [x_{j-1}, x_j]$

$$|h(x) - h(x_{j-1})| = |\alpha_j|(x - x_{j-1})$$

a stąd już widać, że

$$|h(x) - h(x_{j-1})| \leq |h(x_j) - h(x_{j-1})|,$$

co wobec (88) można inaczej zapisać jako

$$(90) \quad |h(x) - f(x_{j-1})| \leq |f(x_j) - f(x_{j-1})|.$$

Z nierówności (90) i warunku (87) wynika, że

$$(91) \quad |h(x) - f(x_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

zaś nierówności (89), (91) dają

$$(92) \quad |f(x) - h(x)| < \varepsilon$$

dla dowolnie ustalonego $x \in [a, b]$. Z nierówności (92) oraz lematów 3, 4 dostajemy (po zastąpieniu ε przez $\frac{1}{3}\varepsilon$)

$$|f(x) - w(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - H(x)| + |H(x) - w(x)| < \varepsilon$$

co kończy dowód twierdzenia. □

14*. Zastosowanie szeregów Fouriera - rozchodzenie się ciepła w pręcie. Zbadamy rozkład temperatury w pręcie jednorodnym izolowanym wzdłuż pobocznic, w którym nie występują źródła ciepła. Pręt taki można traktować jako ośrodek jednowymiarowy wypełniający przedział $[0, a]$ na osi x -ów. Niech $u(x, t)$ oznacza temperaturę w

punkcie x pręta w chwili $t \geq 0$. Opierając się na prawach fizyki dowodzi się, że funkcja u spełnia równanie różniczkowe (*równanie przewodnictwa cieplnego*)

$$u_{xx} - c^2 u_t = 0$$

gdzie stała c zależy od właściwości fizycznych pręta. W dalszym ciągu dla uproszczenia rachunków przyjmijmy $c = 1$ zapisując równanie przewodnictwa cieplnego w postaci

$$(93) \quad u_{xx} = u_t \quad (0 < x < a, \quad t > 0).$$

Będziemy zakładali, że końce pręta mają stałą w czasie temperaturę ośrodka. Obierając odpowiednio skalę termometru możemy przyjąć, że temperatura ta jest równa zeru - zatem na funkcję u nakładamy *warunek brzegowy*

$$(94) \quad u(0, t) = u(a, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

Oprócz tego przyjmujemy za znany początkowy rozkład temperatury w pręcie. Oznacza to, że na funkcję u nakładamy *warunek początkowy*

$$(95) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq a),$$

gdzie φ jest daną funkcją. Przyjmując $t = 0$ w (94) oraz $x = 0$ lub $x = a$ w (95) dostajemy *warunek zgodności* dla funkcji φ

$$(96) \quad \varphi(0) = \varphi(a) = 0.$$

Aby wyznaczyć szukany rozkład temperatury należy rozwiązać równanie różniczkowe (93) z warunkami brzegowymi (94) i warunkiem początkowym (95). Zaczniemy od szukania rozwiązań specjalnej postaci

$$(97) \quad u(x, t) = v(x)z(t),$$

czyli rozwiązań *o rozdzielonych zmiennych*. Po wstawieniu do równania (93) i podzieleniu obu stron przez $v(x)z(t)$ dostajemy równość

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{z'(t)}{z(t)}$$

spełnioną tożsamościowo dla wszystkich $0 < x < a$, $t > 0$. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy oba ilorazy są stałe tzn. gdy istnieje stała λ taka, że

$$(98) \quad v''(x) = \lambda v(x) \quad (0 < x < a)$$

oraz

$$(99) \quad z'(t) = \lambda z(t) \quad (t > 0).$$

Łatwo sprawdzić, że i na odwrót - jeżeli zachodzą związki (98), (99) to funkcja u określona równością (97) spełnia równanie różniczkowe (93). Chcąc by funkcja u spełniała warunek brzegowy (94) musimy założyć, że

$$(100) \quad v(0) = v(a) = 0.$$

Wobec tego naszym najbliższym celem będzie rozwiązanie równania (98) (w którym stałą λ traktujemy jako parametr o nieznanym na razie wartości) z warunkiem brzegowym (100). Czytelnik sprawdzi łatwo przez różniczkowanie, że dla $\lambda < 0$ funkcja

$$(101) \quad v(x) = \sin \sqrt{-\lambda}x$$

jest rozwiązaniem równania (98), natomiast z warunku brzegowego (100) wynika, że

$$\sqrt{-\lambda}a = k\pi \quad (k = 1, 2, \dots),$$

czyli

$$\lambda = \lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{a^2}.$$

Ze wzoru (101) dostajemy rozwiązanie równania (98) przy wartości parametru $\lambda = \lambda_k$ w postaci

$$v_k(x) = \sin \frac{k\pi}{a}x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

W ten sposób otrzymaliśmy ciąg nieskończony rozwiązań zagadnienia brzegowego (98), (100) (można okazać, że są to jedyne rozwiązania dla $\lambda < 0$ oraz że dla $\lambda \geq 0$ równanie (98) nie ma rozwiązań spełniających (100)). Przechodząc do równania (99) sprawdzamy przez różniczkowanie, że każda funkcja postaci

$$z(t) = Ce^{\lambda t}$$

(gdzie C jest stałą) spełnia to równanie, przy czym można okazać że są to jedyne rozwiązania. Zauważmy, że stały czynnik C powoduje jedynie pomnożenie przez ten czynnik obu stron równania (93) - wobec tego nie zmniejszając ogólności przyjmujemy $C = 1$. Ostatecznie stwierdzamy, że otrzymaliśmy ciąg nieskończony rozwiązań równania (93) spełniających warunek brzegowy (94) postaci

$$(102) \quad u_k(x, t) = v_k(x)z_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$v_k(x) = \sin \sqrt{-\lambda_k}x, \quad z_k(t) = e^{\lambda_k t}, \quad \lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{a^2}.$$

Dotąd nie mówiliśmy o warunku początkowym (95). Podstawiając $t = 0$ we wzorze (102) dostajemy

$$u_k(x, 0) = \sin \frac{k\pi}{a}x,$$

zatem wśród otrzymanych rozwiązań u_k można wybrać jedno spełniające warunek (95) tylko wtedy, gdy

$$\varphi(x) = \sin \frac{k\pi}{a} x$$

dla pewnego ustalonego k czyli gdy funkcja φ określająca początkowy rozkład temperatury jest specjalnej postaci. Możemy jednak postąpić inaczej. Załóżmy, że φ jest funkcją ciągłą kawałkami gładką w przedziale $[0, a]$ i rozszerzmy ją do funkcji nieparzystej przyjmując

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) \quad (0 \leq x \leq a).$$

Z (96) wynika, że po rozszerzeniu funkcja φ będzie ciągła w przedziale $[-a, a]$, zaś po rozszerzeniu do funkcji $2a$ -okresowej pozostanie ciągła na całej osi rzeczywistej, ponadto po rozszerzeniu pozostaje kawałkami gładką w przedziale $[-a, a]$. Zgodnie z twierdzeniem 5 funkcja φ rozwija się w szereg Fouriera, przy czym z uwagi na jej nieparzystość współczynniki obliczamy ze wzorów (70). Mamy zatem

$$(103) \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{a} x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x),$$

gdzie

$$(104) \quad b_k = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{a} x dx = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) v_k(x) dx.$$

Spróbujmy szukać rozwiązania zagadnienia brzegowo - początkowego (93)-(95) w postaci szeregu

$$(105) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x) z_k(t).$$

Łatwo sprawdzić, że skończona kombinacja liniowa rozwiązań równania (93) (w szczególności rozwiązań u_k) również jest rozwiązaniem (równanie (93) jest *liniowe*). Ponieważ wzór (105) określa rozwiązanie jako sumę szeregu nieskończonego, definicja taka jest poprawna tylko wtedy, gdy szereg (105) jest zbieżny dla $0 < x < a$, $t > 0$ i gdy można go różniczkować wyraz za wyrazem. Zagadnieniem tym zajmiemy się za chwilę, na razie zauważmy, że

1^o funkcja u określona wzorem (105) spełnia warunek brzegowy (94), gdyż każda z funkcji v_k spełnia (100),

2^o przyjmując $t = 0$ we wzorze (105) dostajemy

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x),$$

zatem z rozwinięcia (103) wynika, że funkcja u spełnia warunek początkowy (95).

Przejdźmy teraz do badania szeregu (105). Funkcja φ jako ciągła w przedziale $[0, a]$ jest w tym przedziale ograniczona (twierdzenie 12 rozdz.III §3), zatem ze wzoru (104) wynika, że

$$(106) \quad |b_k| \leq M_1 = 2 \sup_{[0, a]} \varphi.$$

Zakładając, że $t \geq \eta > 0$ mamy

$$(107) \quad z_k(t) = e^{-\frac{k^2 \pi^2}{a^2} t} \leq e^{-\frac{k^2 \pi^2}{a^2} \eta}$$

i wobec tego

$$(108) \quad |b_k u_k(x, t)| \leq M_1 e^{-k^2 \tau}, \quad \text{gdzie} \quad \tau = \frac{\pi^2}{a^2} \eta.$$

Z rozwinięcia funkcji e^x w szereg potęgowy (por. §2 wzór (32)) wynika nierówność

$$e^y > y \quad \text{dla} \quad y > 0,$$

skąd przez podstawienie

$$y = k^2 \tau$$

dostajemy oszacowanie

$$e^{-k^2 \tau} < \frac{1}{\tau k^2} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Zatem wobec (108)

$$(109) \quad |b_k u_k(x, t)| \leq \frac{M}{k^2} \quad (M = \frac{M_1}{\tau}, k \in \mathbb{N})$$

Oszacowanie (109) zapewnia w oparciu o kryterium Weierstrassa (twierdzenie 15 §1) jednostajną zbieżność szeregu (105) w każdym nieograniczonym prostokącie

$$\mathbb{P}_\eta : 0 \leq x \leq a, t \geq \eta.$$

Zgodnie z twierdzeniem 12 §1 funkcja u jest ciągła w prostokącie \mathbb{P}_η , czyli z uwagi na dowolność dodatniej liczby η , w całym prostokącie $\mathbb{P} : 0 \leq x \leq a, t > 0$. Różniczkując formalnie szereg (105) dowolną ilość razy względem x, t dostajemy szereg

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{k\pi}{a}\right)^l h\left(\frac{k\pi}{a}x\right) z_k(t),$$

gdzie h oznacza jedną z funkcji sinus lub cosinus zaś l jest ustaloną liczbą naturalną. Oznaczając ogólny wyraz tego szeregu przez $w_k(x, t)$ mamy

$$|w_k(x, t)| \leq M_1 \left(\frac{\pi}{a}\right)^l k^l z_k(t)$$

i powtarzając przeprowadzone poprzednio rozumowanie stwierdzamy na podstawie twierdzeń 12, 14, 15 §1, że szereg (105) może być dowolną ilość razy różniczkowany wyraz za wyrazem i że suma szeregu zróżniczkowanego jest funkcją ciągłą w każdym nieograniczonym prostokącie $0 \leq x \leq a$, $t \geq \eta > 0$, czyli w całym zbiorze określonym nierównościami $0 \leq x \leq a$, $t > 0$. Ponieważ każda funkcja u_k jest rozwiązaniem równania (93), suma szeregu również spełnia to równanie.

W oparciu o (102), (104) funkcja u określona wzorem (105) może być zapisana w postaci

$$(110) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2}t}.$$

Otrzymane wyniki dotyczące szeregu (105) pozwalają sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. *Zakładamy, że funkcja φ jest ciągła, kawałkami gładka w przedziale $[0, a]$ i znika na końcach tego przedziału. Wówczas funkcja u określona wzorem (110)*

1^o ma pochodne dowolnego rzędu ciągłe w prostokącie nieograniczonym $0 < x < a$, $t > 0$ i spełnia w tym prostokącie równanie (93),

2^o spełnia warunek brzegowy (94) i warunek początkowy (95).

□

Można udowodnić, że funkcja u określona wzorem (110) (lub równoważnym mu (105)) jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia brzegowo - początkowego (93) - (95).

Uwaga. Twierdzenia zawarte w §1, na które powołaliśmy się w rozumowaniu prowadzącym do twierdzenia 8 zostały udowodnione dla szeregów funkcyjnych o wyrazach zależnych od jednej zmiennej x . Pozostają one prawdziwe w przypadku dwóch lub większej ilości zmiennych niezależnych, dowody przenoszą się bez zmian.

Udowodnimy jeszcze jedną własność otrzymanego rozwiązania (110). Z oszacowania (106) wynika, że dla $t > 0$

$$(111) \quad |b_k u_k(x, t)| \leq M_1 q^{k^2} \quad \text{gdzie} \quad q = e^{-\frac{\pi^2}{a^2}t},$$

zatem

$$|u(x, t)| \leq M_1 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2}.$$

Suma szeregu po prawej stronie nie przekracza sumy szeregu geometrycznego o ilorazie q , wobec tego

$$|u(x, t)| \leq \frac{q}{1-q} \quad \text{dla} \quad t > 0,$$

skąd wobec (111) wynika, że

$$(112) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$$

przy czym zbieżność jest jednostajna względem x .

Formułując warunek brzegowy (94) założyliśmy, że końce pręta mają stałą w czasie temperaturę ośrodka otaczającego, którą umownie przyjęliśmy równą zero. Z relacji (112) wynika, że z biegiem czasu temperatura w całym pręcie (pozbawionym, jak założyliśmy, źródeł ciepła) wyrównuje się do temperatury otoczenia.

Dowodząc ciągłości rozwiązania $u(x, t)$ dla $t > 0$ korzystaliśmy z oszacowania (107) dla $t \geq \eta$, gdzie $\eta > 0$ było dowolnie ustalone. Zbadamy teraz ciągłość funkcji $u(x, t)$ dla $t \geq 0$. Oszacowanie (107) musimy teraz zastąpić przez słabsze

$$z_k(t) \leq 1.$$

Zachodzi

Twierdzenie 9. *Przy założeniach twierdzenia 8 dotyczących funkcji φ rozwiązanie $u(x, t)$ zagadnienia brzegowo - początkowego (93) - (95) (określone wzorem (110)) jest funkcją ciągłą w prostokącie nieograniczonym $\mathbb{P}_0 : 0 \leq x \leq a, t \geq 0$.*

DOWÓD. Dla $t \geq 0$ mamy oszacowanie

$$|b_k u_k(x, t)| \leq |b_k| \quad (0 \leq x \leq a, t \geq 0).$$

Z oszacowania tego wynika jednostajna zbieżność szeregu (110) w prostokącie \mathbb{P}_0 , a więc ciągłość funkcji u (por. twierdzenia 12, 15 §1), jeżeli udowodnimy

Lemat 5. *Przy założeniach twierdzenia 8 szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

jest zbieżny.

Lemat ten zostanie udowodniony w punkcie 17, na razie zauważmy że szereg, o którym mowa w lemacie, jest zbieżny, jeżeli funkcja φ

1^o jest kawałkami liniowa w przedziale $[0, a]$

lub

2^o jest klasy C^2 w przedziale $[0, a]$ (na końcach przedziału przez pochodną rozumiemy granicę jednostronną odpowiedniego ilorazu różnicowego). Wynika to z twierdzenia 3 po wykorzystaniu warunków zgodności (96), szczegóły dowodu pozostawiamy Czytelnikowi.

Uwaga. Twierdzenie 3 i poprzedzające je stwierdzenia 1 - 3 były dowodzone dla funkcji 2π -okresowej. Pozostają one prawdziwe dla funkcji o dowolnym okresie, dowód przenosi się bez zmian.

15*. Zastosowanie szeregów Fouriera - drgania struny sprężystej. Zakładamy, że w położeniu równowagi struna wypełnia przedział $[0, a]$ na osi x -ów i że jest zamocowana na końcach. Zaburzenie położenia równowagi w chwili początkowej powoduje ruch struny opisany równaniem różniczkowym

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0,$$

gdzie $u(x, t)$ oznacza wychylenie z położenia równowagi punktu x struny w chwili t a c jest stałą zależną od parametrów fizycznych struny. Równanie to (zwane *równaniem struny drgającej*) opisuje ruch struny z dobrym przybliżeniem, jeżeli założymy że wychylenia są niewielkie oraz że na strunę nie działają siły zewnętrzne a ruch odbywa się jedynie pod działaniem sił sprężystych.

W dalszym ciągu dla uproszczenia rachunków przyjmijmy $c = 1$ i zapiszemy równanie struny drgającej w postaci

$$(113) \quad u_{xx} = u_{tt} \quad (0 < x < a, t > 0).$$

Na zaburzenie początkowe (o którym założymy, że jest znane) składają się

1^o wychylenie struny z położenia równowagi,

2^o nadanie strunie pewnej prędkości.

Oznacza to, że na rozwiązanie równania (113) nakładamy *warunki początkowe*

$$(114) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

gdzie funkcje φ , ψ są dane (zauważmy, że $u_t(x_0, t_0)$ jest prędkością punktu x_0 struny w chwili t_0 - por. punkt 6). Fakt, że struna jest zamocowana na końcach (taką sytuację mamy w instrumentach muzycznych) można zapisać jako *warunek brzegowy*

$$(115) \quad u(0, t) = u(a, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

Warunki (114) dla $x = 0$, $x = a$ w zestawieniu z warunkiem (115) dla $t = 0$ implikują *warunki zgodności* dla funkcji φ , ψ

$$(116) \quad \varphi(0) = \varphi(a) = 0, \quad \psi(0) = \psi(a) = 0.$$

Aby wyznaczyć ruch struny musimy rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe (113) - (115). Można okazać, że przy założeniach uczynionych dalej o funkcjach φ , ψ zagadnienie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to znajdziemy stosując *metodę Fouriera* opisaną w punkcie 14 w przypadku równani przewodnictwa cieplnego. Zaczniemy od znalezienia rozwiązań o rozdzielonych zmiennych

$$(117) \quad u(x, t) = v(x)z(t),$$

co po wstawieniu do równania (113) prowadzi do dwóch równań z parametrem λ

$$(118) \quad v''(x) = \lambda v(x) \quad (0 < x < a)$$

oraz

$$(119) \quad z''(t) = \lambda z(t) \quad (t > 0),$$

oprócz tego z warunku brzegowego (115) dostajemy warunek brzegowy dla funkcji $v(x)$ w postaci

$$(120) \quad v(0) = v(a) = 0.$$

Zagadnienie (118), (120) było już omawiane w punkcie 14, gdzie stwierdziliśmy, że jedynymi rozwiązaniami są funkcje

$$(121) \quad v_k(x) = \sin \sqrt{-\lambda} x \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{a^2} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

natomiast dla funkcji $z(t)$ otrzymaliśmy tym razem inne równanie (119). Można okazać, że wszystkie rozwiązania tego równania przy $\lambda = \lambda_k$ mają postać

$$(122) \quad z_k(t) = A_k \cos \sqrt{-\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{-\lambda_k} t,$$

gdzie A_k, B_k są stałe. Wracając do wzoru (117) otrzymujemy ciąg nieskończony rozwiązań

$$u_k(x, t) = v_k(x) z_k(t),$$

które zgodnie z (121), (122) można zapisać w postaci

$$(123) \quad u_k(x, t) = \left(A_k \cos \frac{k\pi}{a} t + B_k \sin \frac{k\pi}{a} t \right) \sin \frac{k\pi}{a} x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Rozwiązania równania (113) będziemy szukać w postaci szereg

$$(124) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t).$$

Oczywiście tak określone rozwiązanie spełnia warunek brzegowy (115), gdyż na mocy (120) każda z funkcji u_k przyjmuje wartość zero dla $x = 0$ oraz $x = a$. Pozostaje do zbadania warunek początkowy. Załóżmy, że funkcje φ, ψ są ciągłe i kawałkami gładkie w przedziale $[0, a]$. Podobnie, jak w przypadku równania przewodnictwa cieplnego omawianym w punkcie 14, rozszerzymy każdą z nich do funkcji nieparzystej w przedziale $[-a, a]$ a następnie do funkcji $2a$ -okresowej na całej osi rzeczywistej. Z warunków zgodności (116) wynika, że po rozszerzeniu każda z funkcji φ, ψ jest ciągła na całej osi rzeczywistej i kawałkami gładka w przedziale $[-a, a]$, zatem zgodnie z twierdzeniem 5 funkcje te rozwijają się w szereg Fouriera, przy czym z uwagi na ich nieparzystość współczynniki obliczamy stosując wzory (70). Dostajemy

$$(125) \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{a} x, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \frac{k\pi}{a} x,$$

gdzie

$$(126) \quad b_k = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{a} x dx, \quad d_k = \frac{2}{a} \int_0^a \psi(x) \sin \frac{k\pi}{a} x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Przypuśćmy teraz, że szereg (124) można różniczkować wyraz za wyrazem względem t - wówczas zgodnie ze wzorem (123) dostajemy

$$(127) \quad u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k\pi}{a} A_k \sin \frac{k\pi}{a} t + \frac{k\pi}{a} B_k \cos \frac{k\pi}{a} t \right) \sin \frac{k\pi}{a} x.$$

Po podstawieniu $t = 0$ wzory (123), (124), (127) dają

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{a} x, \quad u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{a} B_k \sin \frac{k\pi}{a} x$$

i porównując z rozwinięciami (125) stwierdzamy, że szereg (124) może spełniać warunki początkowe (114) tylko wtedy, gdy przyjmiemy

$$(128) \quad A_k = b_k, \quad B_k = \frac{a}{k\pi} d_k.$$

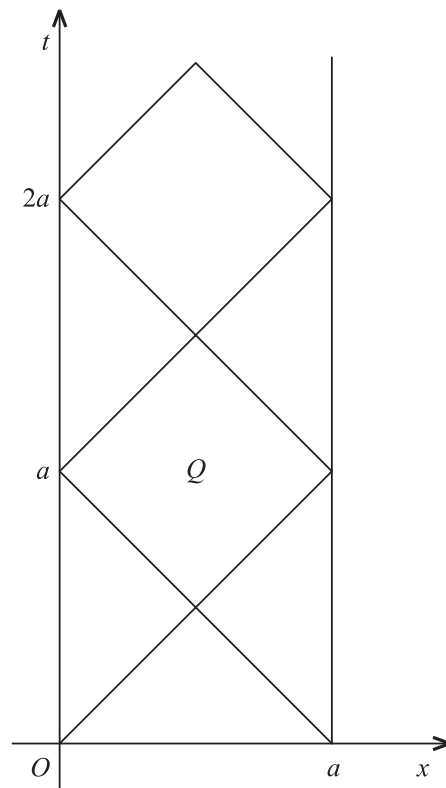
Ostatecznie zapiszemy przewidywane rozwiązanie zagadnienia (113) - (115) w postaci szeregu

$$(129) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \cos \frac{k\pi}{a} t + \frac{a}{k\pi} d_k \sin \frac{k\pi}{a} t \right) \sin \frac{k\pi}{a} x,$$

gdzie współczynniki b_k , d_k są określone wzorami (126). Oczywiście szereg (129) daje rozwiązanie naszego zagadnienia tylko wtedy, gdy jest zbieżny dla $0 \leq x \leq a$, $t \geq 0$ i gdy można go różniczkować wyraz za wyrazem dwukrotnie względem x i dwukrotnie względem t , gdyż oznaczając jego ogólny wyraz przez $u_k(x, t)$ mamy wtedy

$$u_{xx} - u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((u_k)_{xx} - (u_k)_{tt} \right)$$

a funkcje u_k ($k \in \mathbb{N}$) spełniają równanie (113). Możliwość różniczkowania szeregu zależy od współczynników b_k , d_k czyli od funkcji początkowych φ , ψ . Wyjaśnimy sprawę na przykładach.



[rys. 110]

Przykład 12. Załóżmy, że strunie nie nadano prędkości początkowej i że w wyniku wychylenia początkowego struna przyjęła kształt paraboli

$$y = x(a - x) \quad (0 \leq x \leq a).$$

Funkcje początkowe mają zatem postać

$$\varphi(x) = x(a - x), \quad \psi(x) = 0$$

i po obliczeniu pierwszej z całek (126) dostajemy

$$b_k = \frac{4a^2}{k^3\pi^3}(1 - \cos k\pi)$$

czyli

$$b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = \frac{8a^2}{(2n-1)^3\pi^3} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ponieważ $d_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), ze wzoru (129) otrzymujemy przewidywane rozwiązanie jako sumę szeregu

$$(130) \quad u(x, t) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \left(\cos \frac{(2n-1)\pi}{a} t \right) \left(\sin \frac{(2n-1)\pi}{a} x \right).$$

Różniczkując formalnie szereg (130) względem t otrzymujemy

$$(131) \quad u_t(x, t) \sim -\frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left(\sin \frac{(2n-1)\pi t}{a} \right) \left(\sin \frac{(2n-1)\pi x}{a} \right)$$

zaś różniczkowanie względem x daje

$$(132) \quad u_x(x, t) \sim \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{a} \right) \left(\cos \frac{(2n-1)\pi x}{a} \right).$$

Oznaczając przez v_n ogólny wyraz szeregu (130) zaś przez w_n ogólny wyraz jednego z szeregów (131), (132) dostajemy łatwo oszacowanie

$$|v_n(x, t)| \leq \frac{1}{(2n-1)^3}, \quad |w_n(x, t)| \leq \frac{1}{(2n-1)^2}$$

które na mocy kryterium Weierstrassa (twierdzenie 15 §1, por. również Przykład 6 rozdz. IV §1) zapewnia jednostajną zbieżność rozważanych szeregów w prostokącie nieograniczonym $\mathbb{P} : 0 \leq x \leq a, t \geq 0$. Wobec tego opierając się na twierdzeniach 12, 14 §1 stwierdzamy, że

1^o funkcja $u(x, t)$ jest ciągła w \mathbb{P} ,

2^o wyrażenie (131) przedstawia pochodną $u_t(x, t)$ ciągłą w \mathbb{P} ,

3^o wyrażenie (132) przedstawia pochodną $u_x(x, t)$ również ciągłą w \mathbb{P} .

Podstawiając $x = 0$ lub $x = a$ we wzorze (130) stwierdzamy również, że spełniony jest warunek brzegowy (115) (jak zauważyliśmy wcześniej, spełnienie warunku brzegowego wynika ogólnie z definicji (124) funkcji u). Równie łatwo sprawdzić, że spełnione są warunki początkowe, bowiem przyjmując $t = 0$ w (130) otrzymujemy rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji φ , zaś wyrażenie (131) jest równe zero dla $t = 0$.

Aby sprawdzić, czy funkcja $u(x, t)$ spełnia równanie (113) zbadamy szereg otrzymany po dwukrotnym zróżniczkowaniu (130) względem x lub względem t . Różniczkując względem t szereg (131) lub względem x szereg (132) otrzymujemy

$$(133) \quad \left. \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) \\ u_{xx}(x, t) \end{array} \right\} \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x, t),$$

gdzie

$$a_n = \frac{-4}{(2n-1)\pi}$$

oraz

$$\begin{aligned} b_n(x, t) &= 2 \left(\cos \frac{(2n-1)\pi t}{a} \right) \left(\sin \frac{(2n-1)\pi x}{a} \right) \\ &= \sin \frac{(2n-1)\pi}{a} (x+t) + \sin \frac{(2n-1)\pi}{a} (x-t) \end{aligned}$$

(por. wzory (38) rozdz.III §1). Przy badaniu jednostajnej zbieżności szeregu (133) zastosujemy kryterium Dirichleta (twierdzenie 18 §1) i skorzystamy z tożsamości trygonometrycznej

$$(134) \quad \sum_{n=1}^N \sin(2n-1)y = \frac{1 - \cos 2Ny}{2 \sin y},$$

którą łatwo udowodnić mnożąc obie strony przez mianownik a następnie stosując wzory (38) rozdz.III §1. Opierając się na (134) dostajemy

$$S_N(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n(x, t) = \frac{1 - \cos 2Ny}{2 \sin y} + \frac{1 - \cos 2Nz}{2 \sin z},$$

gdzie

$$y = \frac{\pi}{a}(x+t), \quad z = \frac{\pi}{a}(x-t).$$

Wynika stąd, że ciąg funkcyjny $\{S_N\}$ jest ograniczony przez stałą niezależną od N, y, z w każdym zbiorze

$$Q_{r,s,\varepsilon} : \quad \pi r + \varepsilon \leq y \leq \pi(r+1) - \varepsilon, \quad \pi s + \varepsilon \leq z \leq \pi(s+1) - \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon > 0$ może być dowolnie małe a liczby r, s są całkowite. Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ monotonicznie dąży do zera, na podstawie kryterium Dirichleta stwierdzamy, że szereg (133) jest jednostajnie zbieżny dla $y, z \in Q_{r,s,\varepsilon}$. Z twierdzenia 14 §1 wynika zatem po przejściu do zmiennych x, t , że suma szeregu (133) jest równa obu pochodnym u_{tt}, u_{xx} w każdym zbiorze $Q_{r,s}$ określonym nierównościami

$$ra < x+t < (r+1)a, \quad sa < x-t < (s+1)a \quad (r, s \text{ całkowite}),$$

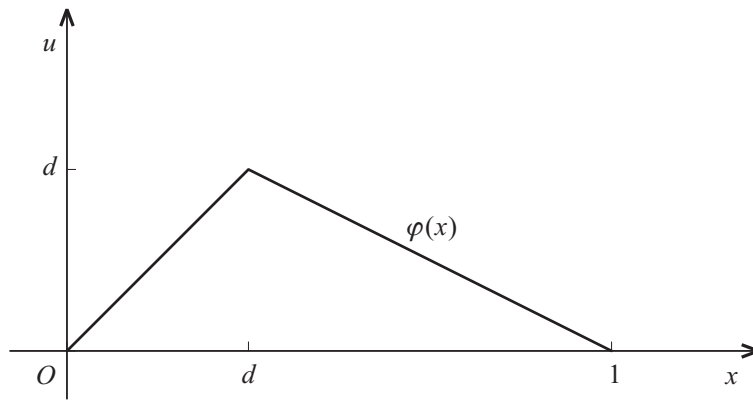
zatem funkcja $u(x, t)$ jest rozwiązaniem równania (113) w każdym z tych zbiorów. Wracając do naszego zagadnienia brzegowo - początkowego możemy stwierdzić, że funkcja $u(x, t)$ dana wzorem (130)

a.) spełnia warunki początkowe i warunek brzegowy,

b.) jest rozwiązaniem równania (113) w zbiorze Q powstałym przez usunięcie z prostokąta $\mathbb{P} : 0 \leq x \leq a, t \geq 0$ prostych o równaniach

$$(135) \quad t = ra - x \quad \text{oraz} \quad t = x - sa \quad (r, s \text{ całkowite}).$$

(rys. 110). Przeprowadzone rozumowanie nie daje żadnych informacji na temat drugich pochodnych funkcji u w punktach leżących na prostych (135).



[rys. 111]

Przykład 13. Załóżmy, że strunie o długości jednostkowej nadano kształt początkowy (rys. 111)

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq d, \\ \frac{d(1-x)}{1-d} & \text{dla } d < x \leq 1, \end{cases}$$

a prędkość początkowa jest równa zero. Pierwszy ze wzorów (126) daje po obliczeniu całki

$$b_k = \frac{2 \sin k\pi d}{\pi^2(1-d)k^2},$$

natomiast $d_k = 0$, ($k \in \mathbb{N}$), wobec tego metoda Fouriera daje przewidywane rozwiązanie w postaci (por. (129))

$$(136) \quad u(x, t) = \frac{2}{\pi^2(1-d)} \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x, t),$$

gdzie

$$w_k(x, t) = \frac{1}{k^2} \sin(k\pi d) \sin(k\pi x) \cos(k\pi t).$$

Ponieważ

$$|u_k(x, t)| \leq \frac{M}{k^2} \quad \text{gdzie} \quad M = \frac{2}{\pi^2(1-d)},$$

szereg (136) jest jednostajnie zbieżny w całej płaszczyźnie x, t (por. twierdzenie 15 §1 oraz Przykład 6 rozdz.IV §1), przedstawia więc funkcję ciągłą zgodnie z twierdzeniem 12 §1. Po dwukrotnym zróżniczkowaniu szeregu (136) względem x lub względem t dostajemy szereg

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi d \sin k\pi x \sin k\pi t$$

rozbieżny wszędzie za wyjątkiem punktów o jednej współrzędnej całkowitej (por. zadanie 23 §1), nie możemy zatem stwierdzić, czy funkcja u ma drugie pochodne i czy spełnia równanie (113).

Uwaga. Przy badaniu szeregu (129) określającego przewidywane rozwiązanie zagadnienia opieraliśmy się, podobnie jak w punkcie 14, na twierdzeniach podanych w §1. Twierdzenia te były dowodzone dla szeregów funkcyjnych o wyrazach zależnych od jednej zmiennej x , pozostają jednak prawdziwe w przypadku dwóch lub więcej zmiennych niezależnych (dowody przenoszą się bez zmian).

Z podanych przykładów widać, że w przypadku równania struny drgającej (113) metoda Fouriera nie daje na ogół rozwiązania, przynajmniej jeżeli rozwiązanie pojmujemy w sensie tradycyjnym jako funkcję, która po wstawieniu do równania spełnia je w prostokącie $\mathbb{P} : 0 \leq x \leq a, t \geq 0$. Można jednak uogólnić pojęcie rozwiązania równania różniczkowego umawiając się na przykład, że rozwiązaniem nazwiemy każdą funkcję, która jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu rozwiązań tradycyjnych. W takim przypadku funkcję u określoną jako sumę szeregu (130) w Przykładzie 12 względnie (136) w Przykładzie 13 możemy uważać za rozwiązanie uogólnione równania (113), gdyż oba te szeregi są jednostajnie zbieżne a ich sumy częściowe spełniają równanie w zwykłym sensie. Istnieją również inne sposoby definiowania uogólnionych rozwiązań, problematyka ta jednak wykracza poza ramy niniejszego podręcznika.²

Na zakończenie zbadamy sens fizyczny funkcji $u_k(x, t)$ określonej wzorem (123) lub w równoważnej postaci

$$(137) \quad u_k(x, t) = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos\left(\frac{k\pi}{a}t - \varphi_k\right) \sin \frac{k\pi}{a}x \quad (k \in \mathbb{N}),$$

gdzie

$$\cos \varphi_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}, \quad \sin \varphi_k = \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}$$

(por. zadanie 27 rozdz.III §3 oraz rozważania punktu 6 niniejszego paragrafu). Jeżeli przyjmujemy, że $u_k(x, t)$ określa wychylenie z położenia równowagi punktu x struny w chwili t , to ze wzoru (137) widać, że ustalony punkt x wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie $\sqrt{A_k^2 + B_k^2} \sin \frac{k\pi}{a}x$, okresie $T_k = \frac{2a}{k}$ i częstości $\nu_k = \frac{k}{2a}$. Taki ruch struny nazywamy *falą stojącą*. Okres drgań i częstość są tu stałe przy ustalonym k , natomiast amplituda drgań zależy od punktu x , w szczególności istnieje na strunie $k + 1$ punktów nieruchomych (wliczając końce struny)

$$x_k = r \frac{a}{k} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, k)$$

zwanych *węzłami fali stojącej*, w których amplituda drgań jest równa zero. Zgodnie ze wzorem (124) metoda Fouriera polega na przedstawieniu rozwiązania zagadnienia brzegowo - początkowego jako superpozycji nieskończonego ciągu fal stojących. Korzystając z równości (128) możemy maksymalną amplitudę fali stojącej u_k zapisać w postaci

$$\sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \sqrt{b_k^2 + \frac{a^2}{k^2 \pi^2} d_k^2},$$

²Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do pozycji:

H. Marcinkowska, Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych, Warszawa 1986
oraz

H. Marcinkowska, Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe, Warszawa 1993.

gdzie b_k, d_k są współczynnikami szeregu Fouriera funkcji φ, ψ . Zgodnie z twierdzeniem 1 współczynniki te dążą do zera przy $k \rightarrow \infty$, zatem również

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = 0.$$

Oznacza to, że zastępując szereg (124) przez jego sumę częściową

$$\sum_{k=1}^{n_0} u_k(x, t)$$

odrzucaamy jedynie fale stojące o małej amplitudzie a więc mające mały wpływ na ruch struny. W instrumentach muzycznych o wysokości tonu decyduje wyraz u_1 (zwany *drzaniem podstawowym struny*), pozostałe wyrazy u_k określają barwę dźwięku. Częstość drzania podstawowego (zwana *częstością podstawową*) wynosi

$$\nu_1 = \frac{1}{2a},$$

jest więc odwrotnie proporcjonalna do długości struny.

16. Dalsze własności szeregów Fouriera. Wyrażenie

$$(138) \quad T_m(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^m (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

nazywamy *wielomianem trygonometrycznym*. Udowodnimy

Twierdzenie 10 (II twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa). *Jeżeli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[-\pi, \pi]$ spełniającą warunek*

$$(139) \quad f(-\pi) = f(\pi)$$

to do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać wielomian trygonometryczny $T(x)$ taki, że

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad \text{dla } x \in [-\pi, \pi].$$

DOWÓD. Jak wykazaliśmy w dowodzie twierdzenia 7 istnieje funkcja h ciągła kawałkami liniowa w przedziale $[-\pi, \pi]$ i spełniająca warunki

$$(140) \quad |f(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } x \in [-\pi, \pi]$$

oraz

$$h(-\pi) = f(-\pi), \quad h(\pi) = f(\pi).$$

Wobec założenia (139) mamy

$$h(-\pi) = h(\pi),$$

zatem po rozszerzeniu do funkcji 2π -okresowej funkcja h jest ciągła na całej osi rzeczywistej. Z twierdzenia 3 wynika, że szereg Fouriera funkcji h jest do niej jednostajnie zbieżny w całym zbiorze liczb rzeczywistych, wobec tego istnieje liczba N taka, że dla $n > N$ mamy

$$(141) \quad |h(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } x \in [-\pi, \pi],$$

gdzie S_n oznacza n -tą sumę częściową szeregu. Z nierówności (140), (141) widać, że jako wielomian trygonometryczny T wystarczy przyjąć S_{n_0} przy ustalonym $n_0 > N$. \square

Zbadamy teraz dalsze własności aproksymacyjne wielomianów trygonometrycznych zakładając, że f jest funkcją kawałkami ciągłą w przedziale $[-\pi, \pi]$. Korzystając z relacji (4), (5) oraz z równości

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_p)^2 = \sum_{j=1}^p A_j^2 + \sum_{j \neq k} A_j A_k$$

dostajemy

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_m(x))^2 dx = \\ & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + 2\pi\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^m \left(\alpha_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx + \beta_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \right) \\ & - 2\alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - 2 \sum_{n=1}^m \left(\alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) \end{aligned}$$

co wobec wzorów (8), (9) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_m(x))^2 dx = \\ & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + 2\pi\alpha_0^2 + \pi \sum_{n=1}^m (\alpha_n^2 + \beta_n^2) - 2\pi\alpha_0 a_0 - 2 \sum_{n=1}^m (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \end{aligned}$$

lub inaczej jako

$$(142) \quad \begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_m(x))^2 dx = \\ & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2) \right) + \\ & \pi \left[2\left(\alpha_0 - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^m (\alpha_n - a_n)^2 + \sum_{n=1}^m (\beta_n - b_n)^2 \right], \end{aligned}$$

gdzie a_0, a_n, b_n są współczynnikami Fouriera funkcji f . Prawa strona (142) przyjmuje najmniejszą wartość wtedy, gdy wyrażenie w nawiasie $[]$ znika czyli gdy

$$(143) \quad \alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \alpha_n = a_n, \quad \beta_n = b_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Możemy wobec tego wypowiedzieć

Stwierdzenie 4. *Całka*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_m(x))^2 dx,$$

gdzie T_m jest wielomianem trygonometrycznym postaci (138), ma najmniejszą wartość wtedy, gdy T_m jest m -tą sumą częściową szeregu Fouriera funkcji f .

□

Ponieważ lewa strona (142) jest zawsze nieujemna, przjmując relacje (143) dostajemy

$$(144) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Z ostatniej nierówności wynika natychmiast

Twierdzenie 11. *Niech f będzie funkcją kawałkami ciągłą w przedziale $[-\pi, \pi]$ i niech a_0, a_n, b_n będą jej współczynnikami Fouriera określonymi wzorami (8), (9). Wówczas szereg*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

jest zbieżny i zachodzi nierówność

$$(145) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

DOWÓD. Badany szereg ma wyrazy nieujemne i jego ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry wobec (144) - zatem szereg jest zbieżny (por. rozdz.IV §2). Przechodząc do granicy przy $m \rightarrow \infty$ w nierówności (144) dostajemy (145). □

Nierówność (145) nosi nazwę *nierówności Bessela*.³

Przy dodatkowych założeniach o funkcji f nierówność Bessela przechodzi w równość. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 12. *Jeżeli f jest funkcją 2π -okresową i ciągłą na całej osi rzeczywistej, to*

$$(146) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

gdzie a_0, a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$) są współczynnikami Fouriera funkcji f określonymi wzorami (8), (9).

Równość (146) nosi nazwę *równości Parsevala*.⁴

³Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846), niemiecki matematyk i astronom, stosował rachunek różniczkowy do mechaniki nieba, wyznaczył orbitę komety Halley'a.

⁴Marc Antoin Parseval (1755 - 1836), matematyk francuski. Prace z równań różniczkowych i teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

DOWÓD. Ustalając dowolnie $\varepsilon > 0$ można na podstawie twierdzenia 10 dobrać wielomian trygonometryczny T_ε postaci (138) z zastąpieniem m przez m_ε tak, by

$$|f(x) - T_\varepsilon| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Wówczas

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_\varepsilon(x))^2 dx \leq \varepsilon,$$

zaś wobec stwierdzenia 4 całka po lewej stronie nie zwiększy się, gdy wielomian trygonometryczny T_ε zastąpimy przez sumę częściową szeregu Fouriera funkcji f

$$S_{m_\varepsilon}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Mamy zatem

$$(147) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_{m_\varepsilon}(x))^2 dx \leq \varepsilon.$$

Przyjmując relacje (143) w równości (142) otrzymujemy dla dowolnego m

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_m(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

skąd widać, że całka po lewej stronie maleje ze wzrostem m , pozostając oczywiście nieujemną. Wobec (147) mamy zatem dla $m \geq m_\varepsilon$

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2) \right) \leq \varepsilon.$$

Zgodnie z twierdzeniem 11 wyrażenie w nawiasie ma granicę przy $m \rightarrow \infty$ (równą sumie szeregu). Po przejściu do granicy dostajemy

$$(148) \quad 0 \leq \Phi \leq \varepsilon,$$

gdzie

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ było ustalone dowolnie, nierówność (148) oznacza, że $\Phi = 0$ a to jest równoważne (146). \square

17*. Zastosowanie równości Parsevala. Z lematu Riemanna (twierdzenia 1 i 1') wynika, że dla dowolnej funkcji ciągłej (lub kawałkami ciągłej) w przedziale $[-\pi, \pi]$ jej współczynniki Fouriera a_n, b_n dążą do zera przy $n \rightarrow \infty$, spełniony jest zatem warunek konieczny zbieżności szeregu

$$(149) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

Jeżeli f jest funkcją kawałkami liniową w przedziale $[-\pi, \pi]$, 2π -okresową i ciągłą na całej osi rzeczywistej, to twierdzenie 3 zapewnia zbieżność szeregu (149). Opierając się na równości Parsevala okażemy, że do zbieżności szeregu (149) wystarczą słabsze założenia.

Twierdzenie 13. *Jeżeli f jest funkcją 2π -okresową ciągłą na całej osi rzeczywistej, kawałkami gładką w przedziale $[-\pi, \pi]$, to szereg (149) jest zbieżny.*

DOWÓD twierdzenia poprzedzimy lematem.

Lemat 6. *Przy założeniach twierdzenia 13 istnieją stałe dodatnie M, d_0 takie, że*

$$(150) \quad |f(x+d) - f(x)| \leq M|d| \quad (x \in \mathbb{R})$$

dla $|d| < d_0$.

DOWÓD LEMATU. Oprzemy się na definicji funkcji kawałkami gładkiej podanej w punkcie 3, przy czym ze względu na okresowość wystarczy założyć, że $x \in [-\pi, \pi]$. Przyjmijmy, że

$$|d| < d_0 = \min(c_j - c_{j-1}),$$

wówczas między punktami $x, x+d$ może leżeć conajwyżej jeden punkt c_j . Rozróżnimy dwa przypadki:

1⁰ Punkty $x, x+d$ należą do pewnego przedziału $[c_{j-1}, c_j]$. W przedziale tym $f(x) = h_j(x)$ i stosując twierdzenie o wartości średniej rachunku różniczkowego (twierdzenie 11 rozdz.III §4) dostajemy

$$f(x+d) - f(x) = d h'_j(\bar{x}),$$

gdzie \bar{x} leży między punktami $x, x+d$ a więc w przedziale $[c_{j-1}, c_j]$. Wobec tego

$$(151) \quad |f(x+d) - f(x)| \leq M|d|,$$

gdzie liczba M spełnia nierówność

$$|h'_j(x)| \leq M \quad \text{dla} \quad x \in (c_{j-1}, c_j), \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

2⁰ Między punktami $x, x+d$ leży pewien punkt c_j , dla ustalenia uwagi założymy, że

$$x < c_j < x+d$$

(podobny rachunek w przypadku $d < 0$ pozostawiamy Czytelnikowi). Rozumując jak w przypadku 1⁰ otrzymujemy

$$f(x+d) - f(c_j) = (x+d - c_j)h'_{j+1}(\bar{x}), \quad f(c_j) - f(x) = (c_j - x)h'_j(\bar{x})$$

gdzie

$$c_j < \bar{x} < x+d, \quad x < \bar{x} < c_j,$$

zatem

$$\begin{aligned} |f(x+d) - f(x)| &\leq |f(x+d) - f(c_j)| + |f(c_j) - f(x)| \\ &\leq M(x+d - c_j) + M(c_j - x) \end{aligned}$$

co daje ponownie (151). Dowód lematu jest zakończony. \square

Przechodząc do DOWODU TWIERDZENIA zauważmy najpierw, że zgodnie z twierdzeniem 2 funkcja $f(x)$ jest sumą swojego szeregu Fouriera dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, zatem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

i stąd zamieniając x przez $x \pm d$ dostajemy

$$f(x \pm d) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos nd \mp a_n \sin nx \sin nd + b_n \sin nx \cos nd \pm b_n \cos nx \sin nd),$$

co daje po odjęciu stronami

$$f(x+d) - f(x-d) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

gdzie

$$A_n = 2b_n \sin nd, \quad B_n = -2a_n \sin nd.$$

Przy ustalonym d funkcja

$$g(x) = f(x+d) - f(x-d)$$

spełnia założenia twierdzenia 12. Ponieważ

$$A_n^2 + B_n^2 = 4(a_n^2 + b_n^2) \sin^2 nd$$

równość Parsewala (146) zastosowana do funkcji g daje

$$(152) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx = 4 \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 \sin^2 nd,$$

gdzie

$$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Zauważmy, że

$$|a_n| \leq r_n, \quad |b_n| \leq r_n$$

zatem twierdzenie zostanie udowodnione, jeżeli wykazemy że

$$(153) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty.$$

Przyjmijmy teraz

$$(154) \quad d = \frac{\pi}{2N},$$

gdzie N jest liczbą naturalną spełniającą nierówność

$$n > N_0 = \frac{\pi}{2d_0}.$$

Wówczas $0 < d < d_0$ i możemy do oszacowania lewej strony (152) zastosować lemat 6. Dostajemy

$$|g(x)| \leq |f(x+d) - f(x)| + |f(x) - f(x-d)| \leq 2Md = \frac{\pi M}{N}$$

i stąd

$$(155) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) \leq \frac{4c}{N^2} \quad \text{gdzie} \quad c = \frac{1}{2} \pi^2 M^2.$$

Prawa strona (152) ulegnie zmniejszeniu po zastąpieniu szeregu przez jego odcinek, wobec tego z uwagi na (155) dostajemy

$$(156) \quad \sum_{\frac{N}{2} < n \leq N} r_n^2 \sin^2 nd \leq \frac{c}{N^2}$$

przy czym wobec (154) dla wskaźników n występujących w sumie po lewej stronie mamy

$$\frac{\pi}{4} < nd \leq \frac{\pi}{2}$$

i stąd

$$\frac{1}{2} < \sin^2 nd \leq 1.$$

Wobec tego lewą stronę (156) możemy oszacować z dołu, co daje

$$(157) \quad \sum_{\frac{N}{2} < n \leq N} r_n^2 \leq \frac{2c}{N^2}$$

dla dowolnego $N > N_0$. Przyjmując w szczególności $N = 2^k$ (k naturalne) dostajemy ze (157)

$$(158) \quad \sum_{n=n_k}^{2^k} r_n^2 \leq \frac{2c}{2^{2k}} \quad \text{gdzie} \quad n_k = 2^{k-1} + 1.$$

W dalszych rachunkach zastosujemy

Lemat 7 (nierówność Schwarz).⁵

$$(159) \quad \left| \sum_{j=1}^r a_j b_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^r a_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^r b_j^2}.$$

DOWÓD LEMATU. Rozważmy trójmian kwadratowy

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{j=1}^r (a_j + t b_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^r a_j^2 + 2t \sum_{j=1}^r a_j b_j + t^2 \sum_{j=1}^r b_j^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $w(t) \geq 0$ dla wszystkich t , wyróżnik Δ trójmianu spełnia nierówność $\Delta \leq 0$ czyli

$$4 \left(\sum_{j=1}^r a_j b_j \right)^2 - 4 \left(\sum_{j=1}^r a_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^r b_j^2 \right) \leq 0.$$

Ostatnia nierówność daje (159).

Wracając do dowodu twierdzenia przyjmujemy w nierówności (159)

$$a_j = 1, \quad b_j r_n,$$

dostajemy wówczas

$$\sum_{n=n_k}^{2^k} r_n \leq \sqrt{2^{k-1}} \sqrt{\sum_{n=n_k}^{2^k} r_n^2}$$

skąd wobec (157)

$$(160) \quad \sum_{n=n_k}^{2^k} r_n \leq \frac{\sqrt{c}}{(\sqrt{2})^k}$$

dla dowolnego k naturalnego takiego, że $2^k > N_0$. Opierając się na nierówności (160) okażemy, że szereg (153) spełnia warunek Cauchy'ego (co zgodnie z twierdzeniem 6 rozdz. IV §1 zapewnia jego zbieżność). Ponieważ szereg geometryczny

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^k}$$

⁵Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921), matematyk niemiecki, zajmował się rachunkiem wariacyjnym, teorią funkcji zmiennej rzeczywistej i zespolonej, równaniami różniczkowymi. Był profesorem na uniwersytetach w Halle, Getyndze i Berlinie, od 1892 r. członek Berlińskiej Akademii Nauk.

o ilorazie

$$0 < q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

jest zbieżny (por. Przykład 1 rozdz. IV §1), spełnia on warunek Cauchy'ego. Oznacza to, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać K_ε tak, by dla $m > K_\varepsilon$ i dowolnego r zachodziła nierówność

$$(161) \quad \sum_{k=m}^{m+r} \frac{1}{(\sqrt{2})^k} < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Ustalmy teraz $m > K_\varepsilon$ i założmy, że

$$k \geq m, \quad 2^k > N_0.$$

Wówczas dla dowolnego $r \geq n_k$ i dowolnego p naturalnego mamy

$$\sum_{n=r}^{r+p} r_n \leq \sqrt{c} \sum_{k=m}^{m+s} \frac{1}{(\sqrt{2})^k}$$

przy odpowiednio dobranym s . Zostatniej nierówności wynika wobec (160), (161), że

$$\sum_{n=r}^{r+p} r_n < \varepsilon$$

co kończy dowód warunku Cauchy'ego dla szeregu (153). Szereg (153) jest zatem zbieżny, a to pociąga za sobą zbieżność szeregu (149). \square

Udowodnimy teraz lemat, z którego wynika twierdzenie 9 (punkt 14).

Lemat 5. *Założmy, że funkcje φ jest ciągła i kawałkami gładka w przedziale $[0, a]$ oraz że znika na końcach tego przedziału. Wówczas szereg*

$$(162) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

(gdzie b_k są określone wzorem (104)) jest zbieżny.

DOWÓD. Dla danej funkcji $f(x)$ określonej w całym zbiorze liczb rzeczywistych utworzymy przy pomocy podstawienia

$$x = \frac{a}{\pi} y$$

nową funkcję

$$g(y) = f\left(\frac{a}{\pi} y\right),$$

wówczas

1^o f jest $2a$ -okresowa wtedy i tylko wtedy gdy g jest 2π -okresowa,

2^o f jest ciągła na całej osi rzeczywistej wtedy i tylko wtedy gdy g ma tą własność,

3^o f jest kawałkami gładka w przedziale $[-a, a]$ wtedy i tylko wtedy gdy g jest kawałkami gładka w przedziale $[-\pi, \pi]$.

Ponieważ współczynniki Fouriera obu funkcji są takie same (por. punkt 11), twierdzenie 13 pozostaje słuszne dla dowolnej funkcji f ciągłej na całej osi rzeczywistej, $2a$ -okresowej i kawałkami gładkiej w przedziale $[-a, a]$. Wracając do naszego lematu zważmy, że współczynniki b_k obliczamy rozszerzając funkcję φ do funkcji nieparzystej w przedziale $[-a, a]$ a następnie do funkcji $2a$ -okresowej. Z warunku

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0$$

wynika, że po takim rozszerzeniu funkcja φ pozostaje ciągła w całym przedziale $(-\infty, \infty)$, ponadto jest ona kawałkami gładka w przedziale $[-a, a]$ a zatem można do niej stosować twierdzenie 13, co zapewnia zbieżność szeregu (162). \square

Zadania.

1. Które z podanych funkcji są w podanym przedziale a.) ciągłe, b.) kawałkami ciągłe, c.) kawałkami gładkie, d.) kawałkami liniowe?

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0, \\ \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x < \frac{2}{\pi}, \\ \sqrt{\frac{3}{\pi}} & \text{dla } \frac{2}{\pi} \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{w przedziale } [0, 2];$$

$$(ii) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x \leq \frac{6}{\pi}, \\ \frac{36}{\pi^3} & \text{dla } \frac{6}{\pi} < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{w przedziale } [0, 3];$$

$$(iii) \quad f(x) = [x^2] \quad \text{w przedziale } [-2, 2];$$

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{dla } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 1 & \text{dla } 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{w przedziale } [0, 3].$$

Naszkiecować wykres funkcji f i znaleźć

$$\sigma_f(x) = \frac{1}{2} \left(f(x+) + f(x-) \right)$$

gdy x jest punktem nieciągłości.

Uwaga. Symbol $[a]$ użyty w punkcie (iii) oznacza część całkowitą liczby a (por. rozdz. I §2 punkt 5).

2. Przyjmując odpowiednią wartość zmiennej niezależnej wykorzystać
a.) rozwinięcie (55) do obliczenia sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2},$$

b.) rozwinięcie (56) do rozwinięcia w szereg nieskończony liczby $\sqrt{2}$.

3. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcje

$$(i) \quad f(x) = e^{-x} \quad \text{dla} \quad -\pi < x \leq \pi,$$

$$(ii) \quad f(x) = x^2 \quad \text{dla} \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

$$(iii) \quad f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x < 2\pi,$$

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ x & \text{dla} \quad \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Następnie, przyjmując odpowiednią wartość x w rozwinięciu (ii), obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Uwaga. Funkcję f rozszerzamy do funkcji 2π -okresowej na całej osi rzeczywistej.

4. Rozwinąć w szereg Fouriera o okresie $2l$ następujące funkcje:

$$(i) \quad f(x) = e^{2x} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x < 2l,$$

$$(ii) \quad f(x) = x^3 \quad \text{dla} \quad -l < x \leq l,$$

$$(iii) \quad f(x) = -x \quad \text{dla} \quad -l \leq x < l,$$

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} x+l & \text{dla} \quad -l \leq x < 0, \\ l-x & \text{dla} \quad 0 \leq x < l. \end{cases}$$

Uwaga. Funkcję f rozszerzamy do funkcji $2l$ -okresowej na całej osi rzeczywistej.

5. Następujące funkcje określone w przedziale $[0, \pi]$ rozwinąć w szereg Fouriera zawierający

a.) tylko funkcję sinus, b.) tylko funkcję cosinus:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & f(x) = \sin x, \\ \text{(ii)} & f(x) = e^{x+\pi}, \\ \text{(iii)} & f(x) = ax \quad (a \in \mathbb{R}), \\ \text{(iv)} & f(x) = x^2. \end{array}$$

6. Rozwinąć w szereg trygonometryczny funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{dla } 2 < x < 3, \\ x - 3 & \text{dla } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

w przedziale $[1, 4]$ (jak należy określić funkcję f w punktach $x = 2$, $x = 3$?).

Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu 6.

7. 2π -okresowe drgania punktu materialnego o masie $M = 1$ opisuje funkcja

$$x(t) = \begin{cases} at & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi, \\ a(2\pi - t) & \text{dla } \pi < t < 2\pi. \end{cases} \quad (a > 0)$$

Przedstawić drganie $x(t)$ jako superpozycję przesunięcia i drgań harmonicznym opisanych równaniem

$$x_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sprawdzić, dla jakich n amplituda A_n drgania x_n i jego maksymalna energia kinetyczna \tilde{E}_n są $< \varepsilon$, gdzie

$$\text{a.) } \varepsilon = 0,1, \quad \text{b.) } \varepsilon = 0,01.$$

Podać interpretację fizyczną ruchu $x(t)$.

8. Samochód jedzie ze stałą prędkością po wyboistej drodze. Traktując samochód jako punkt materialny o masie $M = 1000$ możemy składową pionową ruchu uważać za drganie (dla uproszczenia 2π -okresowe) opisane funkcją

$$x(t) = \begin{cases} at(\pi - t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi, \\ a(t - \pi)(t - 2\pi) & \text{dla } \pi < t < 2\pi. \end{cases} \quad (a > 0)$$

A). Przedstawić drganie $x(t)$ jako superpozycję drgań harmonicznym opisanych równaniem

$$x_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sprawdzić, dla jakich n amplituda A_n drgania x_n i jego maksymalna energia kinetyczna \tilde{E}_n są $< \varepsilon$, gdzie

$$\text{(i)} \quad \varepsilon = 0,1, \quad \text{(ii)} \quad \varepsilon = 0,01.$$

B.) Naszkicować wykres funkcji $x(t)$ i znaleźć rozkład w czasie prędkości pionowej samochodu $\dot{x}(t)$ oraz pionowego przyspieszenia $\ddot{x}(t)$. Jakie odczucia ma pasażer samochodu (przypominamy, że siła, jakiej jest poddawany, jest proporcjonalna do przyspieszenia)?

9. Okazać, że jeżeli szereg trygonometryczny

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[-\pi, \pi]$, to jest on szeregiem Fouriera swojej sumy.

10*. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji f całkowalnej w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

Porównać z twierdzeniami 1 oraz 1'.

Wskazówka. Dla ustalonego podziału Π odcinka $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

przedstawić całkę w postaci

$$\int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - m_j) \sin nx \, dx + \sum_{j=1}^k m_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin nx \, dx,$$

gdzie

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f,$$

następnie oprzeć się na twierdzeniu 4 rozdz. V §5. Do drugiej całki zastosować podobne rozumowanie.

11*. Jaka regularność funkcji φ , ψ wystarczy, by funkcja $u(x, t)$ określona jako suma szeregu (129) była rozwiązaniem zagadnienia brzegowo - początkowego (113) - (115) przy warunkach zgodności (116)?

12. Niech \mathbb{R}^n oznacza zbiór wszystkich układów (zwanym wektorami)

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{gdzie} \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Wyrażenie

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

nazywamy *iloczynem skalarnym wektorów* x, y , zaś wyrażenie

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

normą wektora x . Mówimy, że wektory x, y są *ortogonalne*, jeżeli $(x, y) = 0$.

- (i) Zapisać nierówność Schwarz'a (159) używając iloczynu skalarnego i normy.
- (ii) Z nierówności Schwarz'a wyprowadzić *nierówność Minkowskiego*⁶

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(iii) Dla $n = 2$ podać interpretację geometryczną normy wektora x , nierówności Schwarz'a i Minkowskiego oraz relacji ortogonalności wektorów x, y .

Wskazówka. W punkcie (iii) zauważyć, że wprowadzając na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych możemy punkt $x = (x_1, x_2)$ nie będący początkiem układu utożsamić z wektorem \vec{Ox} . Następnie sprawdzić, że

$$(x, y) = |x||y| \cos \alpha$$

gdzie α oznacza kąt między wektorami \vec{Ox}, \vec{Oy} .

13. Niech C oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych w przedziale $[a, b]$ (zbiór ten będziemy nazywać *przestrzenią*). W przestrzeni C wprowadzamy iloczyn skalarny

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (f, g \in C)$$

oraz normę

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Udowodnić, że w przestrzeni C zachodzą nierówności

a.) Schwarz'a

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|,$$

b.) Minkowskiego

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Wskazówka. Dowód a.) jest podobny do dowodu lematu 7. W punkcie b.) to samo rozumowanie co w zadaniu 12.

⁶Hermann Minkowski (1864 - 1909), matematyk i fizyk niemiecki, zajmował się teorią liczb, geometrią, hydrodynamiką oraz szczególną teorią względności. Wykładał na uniwersytetach w Bonn, Getyndze i Królewcu.

14. Przy oznaczeniach zadania 13 układ funkcji

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \quad (\varphi_j \in C, \quad j \in \mathbb{N})$$

nazywamy *układem ortogonalnym w przedziale* $[a, b]$, jeżeli

$$(\varphi_j, \varphi_k) > 0, \quad (\varphi_j, \varphi_k) = 0 \quad \text{dla} \quad j \neq k \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Sprawdzić ortogonalność następujących układów:

(i) $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots\}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$;

(ii) $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$ w przedziale $[0, \pi]$;

(iii) $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$ w przedziale $[0, \pi]$;

(iv) $w_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ w przedziale $[a, b]$.

Wskazówka. W punkcie (iv) zastosować uogólniony wzór na całkowanie przez części (zadanie 29 rozdz.V §3). Udowodnić, że $(w_n, u) = 0$ dla każdego wielomianu u stopnia $< n$, następnie okazać, że

$$\int_a^b w_n^2(x) dx = \int_a^b (x-a)^n(x-b)^n dx$$

i oprzeć się na zadaniu 9 rozdz.V §1.

15. Niech

$$\xi_n \in \mathbb{P}_n = \left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

będzie rozwiązaniem równania

$$\operatorname{tg} x = x$$

(rozwiązanie takie istnieje i jest jedyne w przedziale \mathbb{P}_n - por. zadanie 19 rozdz.III §5). Okazać, że układ funkcji

$$\sin \frac{\xi_n}{l} x \quad (n \in \mathbb{N})$$

jest ortogonalny w przedziale $[0, l]$ (por. zadanie 14).

16. Przy oznaczeniach zadania 13 układ funkcji

$$\Phi : \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \quad (\varphi_j \in C, \quad j \in \mathbb{N})$$

nazywamy *układem ortonormalnym w przedziale* $[a, b]$, jeżeli

a.) jest on układem ortogonalnym w przedziale $[a, b]$ (por. zadanie 14),

b.) $\|\varphi_j\| = 1$ dla $j \in \mathbb{N}$.

Iloczyny skalarne

$$c_j = (f, \varphi_j) \quad (f \in C, \quad j \in \mathbb{N})$$

nazywamy *współczynnikami Fouriera funkcji* f *względem układu ortonormalnego* Φ . Układ Φ jest *zamknięty* jeżeli

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$$

dla dowolnej funkcji $f \in C$.

Sprawdzić, że układ trygonometryczny

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots \right\}$$

jest układem ortonormalnym w przedziale $[-\pi, \pi]$ i że jest to układ zamknięty.

Wskazówka. Oprzeć się na równości Parsevala (146).

17. Przy oznaczeniach zadań 13, 16 szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j \quad \text{gdzie} \quad c_j = (f, \varphi_j), \quad f \in C$$

nazywamy *szeregiem Fouriera funkcji* f *względem układu ortonormalnego* Φ . Sprawdzić, że w przypadku układu zamkniętego szereg ten jest zbieżny według normy do funkcji f tzn. że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right\| = 0$$

i zastosować to do układu trygonometrycznego omawianego w zadaniu 16.

WYKAZ LITERATURY

A.) Analiza matematyczna.

- [1] Banach S., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom I i II, wyd. 6, PWN, Warszawa 1957.
- [2] Birkholc A., *Analiza matematyczna dla nauczycieli*, PWN, Warszawa 1977.
- [3] Borsuk K., *Ćwiczenia z analizy matematycznej*, PZWS, Warszawa 1951.
- [4] Fichtengolc G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom I, wyd. 10, PWN, Warszawa 1994; tom II, wyd. 10, PWN, Warszawa 1995; tom III, wyd. 8, PWN, Warszawa 1995.
- [5] Hartman S., Mikusiński J., *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN, Warszawa 1957.
- [6] Kleiner W., *Analiza matematyczna*, tom I, PWN, Warszawa 1986; tom II, PWN, Warszawa 1990.
- [7] Kleiner W., *Zarys analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1978.
- [8] Knopp K., *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.
- [9] Kryszczyński W., Włodarski E., *Analiza matematyczna w zadaniach*, część I, wyd. 19, PWN, Warszawa 1993; część II, wyd. 24, PWN, Warszawa 1999.
- [10] Kuczma M.E., *O szeregach liczbowych*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1987.
- [11] Kuratowski K., *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, wyd. 9, PWN, Warszawa 1978.
- [12] Leja F., *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, wyd. 13, PWN, Warszawa 1976
- [13] Łojasiewicz S., *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1973.
- [14] Łomnicki A., *Rachunek różniczkowy i całkowy dla potrzeb przyrodników i techników*, tom I, II, III, Wydawnictwo "Universum", Katowice.
- [15] Mikusiński J., *Wstęp do analizy matematycznej*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1990.
- [16] Musielak H., Musielak J., *Analiza matematyczna*, tom I cz. 1 *Ciągi, szeregi i funkcje*, tom I cz. 2 *Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej*, Wydawnictwo Naukowe Uniw. im. A. Mickiewicza, Poznań 1993.
- [17] Pogorzelski W., *Analiza matematyczna*, tom I, "Czytelnik", Warszawa 1947; tom II i III, wyd. 5, PWN, Warszawa 1956; tom IV, wyd. 3, PWN, Warszawa 1962.
- [18] Rudin W., *Podstawy analizy matematycznej*, wyd. 4, PWN, Warszawa 1996.
- [19] Rudnicki R., *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2001.
- [20] Sierpiński W., *Analiza*, tom I cz. 1 *Liczby rzeczywiste i zespolone*, cz. 2 *Działania nieskończone*, cz. 3 *Funkcje elementarne*, cz. 4 *Rachunek różniczkowy*, Drukarnia Uniw. Jagiellońskiego, Kraków 1923 - 1925.

- [21] Sierpiński W., *Arytmetyka teoretyczna*, wyd. 4, PWN, Warszawa 1968.
- [22] Sierpiński W., *Działania nieskończone*, "Czytelnik", Warszawa 1948.
- [23] Sierpiński W., *Rachunek różniczkowy i całkowy. Poprzedzony badaniem funkcji elementarnych*, "Czytelnik", Warszawa 1947.
- [24] Więśław W., *Liczby i geometria*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1996.
- [25] Więśław W., *Liczby niewymierne*, CODN - SNM, Warszawa 1992.

B.) Historia matematyki.

- [26] Boyer C.B., *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, PWN, Warszawa 1964.
- [27] Gärding L., *Spotkanie z matematyką*, PWN, Warszawa 1993.
- [28] Juszkiewicz A.P., *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*, tom I *Od czasów najdawniejszych do początku czasów nowożytnych*, PWN, Warszawa 1975; tom II *Matematyka XVII stulecia*, PWN, Warszawa 1976; tom III *Matematyka XVIII stulecia*, PWN, Warszawa 1977.
- [29] Kordos M., *Wykłady z historii matematyki*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994.
- [30] Krysicki W., *Poczet wielkich matematyków*, Nasza Księgarnia, Warszawa 1989.
- [31] Struik D.J., *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1963.
- [32] Więśław W., *Matematyka i jej historia*, NOWIK, Opole 1997.