Ćwiczenia 15.12.2008 (zad. 234-254) Kolokwium nr 10, 18.12.2008, zad. 1-254

W miarę potrzeby omówić na ćwiczeniach zadania z kolokwium nr 9.

## 10. Funkcje. Granica i ciągłość (c.d).

Obliczyć następujące granice:

**234.** $\lim_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7}-\frac{8}{x^2-6x-7}\right)$ **235.** $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **236.** $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

**237.** $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ **238.** $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x+2}$ **239.** $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$

**240.** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ **241.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^{2008}-1}{x^{10}-1}$ **242.** $\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

**243.** $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ **244.** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **245.** $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

**246.** $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ **247.** $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **248.** $\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **249.** $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+\ln x}$

**250.** $\lim_{x\to 0+}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **251.** $\lim_{x\to 0-}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **252.** $\lim_{x\to +\infty}\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$

**253.** Dla których wartości parametrów $a$, $b$ funkcja $f$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2 & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2 \\ ax-b & \text{dla} \quad 2\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji $f$ dla każdej pary parametrów $(a,b)$, dla których funkcja $f$ jest ciągła.

**254.** Dla których wartości parametrów $a$, $b$ funkcja $f$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2+ax+b & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2 \\ x+3 & \text{dla} \quad 2\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji $f$ dla każdej pary parametrów $(a,b)$, dla których funkcja $f$ jest ciągła.

## Konwersatorium 17.12.2008, 7.01.2009.

Do podanych $f$, $x_0$ i $\varepsilon$ dobrać takie $\delta$, aby

$$\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

**255.** $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$ **256.** $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$

**257.** $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$ **258.** $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$

**259.** $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$ **260.** $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

OSZUSTWO **261.** (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x)=x^2$ jest nieciągła.

*Dowód:* Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja $f$ jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon=1$. Wtedy istnieje takie $\delta>0$, że dla $y$ spełniających nierówność $|y-x|<\delta$ zachodzi $|x^2-y^2|<1$.

Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x>\frac{1}{\delta}$ i $y=x+\frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2-y^2|=x\delta+\frac{\delta^2}{4}>1$.

$\square$

OSZUSTWO **262.** (przykład funkcji ciągłej): Funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

jest ciągła.

*Dowód:* Oczywiście $f$ jest ciągła w każdym punkcie oprócz 0, pozostaje więc wykazać ciągłość w 0. Przeprowadzimy dowód niewprost. Zakładając, że $f$ jest nieciągła w 0, weźmy $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Wtedy istnieje takie $\delta>0$, że dla $x$ spełniających nierówność $|x|<\delta$ zachodzi $|f(x)-0|\geqslant\frac{1}{2}$.

Ale biorąc $x=\frac{1}{\pi n}$, gdzie $n>\frac{1}{\pi\delta}$, otrzymujemy $f(x)=0$ i $|x|<\delta$. Zatem $|f(x)-0|=0<\frac{1}{2}$, skąd sprzeczność.

$\square$

Wskazać taką liczbę $M$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi nierówność

$$|f(x)|\leqslant M\,.$$

**263.** $f(x)=\dfrac{2x^4+13x^2+7}{5x^4+x^2+2}$ **264.** $f(x)=\dfrac{5x^4+x^2+2}{2x^4+13x^2+7}$ **265.** $f(x)=e^{\sin x}$

**266.** $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$ **267.** $f(x)=\dfrac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

OSZUSTWO **268.** Niech $f,g:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0)=5$, $f(1)=7$, $g(0)=8$, $g(1)=4$. Wtedy istnieje takie $c\in(0,1)$, że $f(c)=g(c)$.

*Dowód:* Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji $f$ wynika, że dla pewnego $c\in(0,1)$ mamy $f(c)=6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji $g$ otrzymujemy $g(c)=6$. A zatem
$f(c)=g(c)$, co należało dowieść.

$\square$

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.