Ćwiczenia 3.11.2008 (zad. 69-105)

Kolokwium nr 4, 6.11.2008, zad. 1-105

Kolokwium nr 5, 13.11.2008, zad. 1-121

W miarę potrzeby omówić zadania z kolokwium nr 3.

6. Ciągi

Trochę teorii

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} |a_n - g| < \varepsilon\ .$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{M}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n > M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{M}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n < M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

TWIERDZENIA:

1. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\ .$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n-b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n\ .$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_nb_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\ .$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\ .$$

6. Zbieżność i granica nie zależą od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów ciągu.

7. Słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $a_n \leqslant b_n$ (odpowiednio $a_n \geqslant b_n$), to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$).

8. Kilka podstawowych granic.

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} a = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ dla $a > 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ dla $|a| < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

9. Z granicą można wchodzić pod pierwiastek.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geqslant 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}\ .$$

10. Twierdzenie o trzech ciągach.

Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g.

11. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1\ ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1\ ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Uwaga: Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa za kilka tygodni.

Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do $\pm\infty$), o ile nie prowadzi to do wyrażeń nieoznaczonych.

12. Sztuczki oparte na wzorach skróconego mnożenia.

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

Zadania

Wyjaśnić, dlaczego poniżej są same **BZDURY**:

69. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=0\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=0$

70. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty-\infty=0$

71. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych}\end{cases}$

72. $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{n}=k\cdot\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{n}=k\cdot 0=0$

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

73. $\frac{n}{n+7}$ **74.** $2^n-\frac{1}{n}$ **75.** $\frac{4n^2+3n}{n+1}$ **76.** $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$ **77.** $\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$

78. $\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$ **79.** $\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$ **80.** $\frac{1-2+3-4+5-6+...-2n}{\sqrt{n^2+2}}$

81. $\frac{1+2+4+...+2^n}{1+3+9+...+3^n}$ **82.** $\frac{n}{1+\sqrt{n}}$ **83.** $n\cdot(-1)^n$ **84.** $\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$

85. $\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$ **86.** $\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}$ **87.** $\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$ **88.** $\sqrt[n^2]{n}$

89. $\sqrt[n]{n^2}$ **90.** $\sqrt[n]{n+17}$ **91.** $\sqrt{n^2+3n}-n$ **92.** $n(\sqrt{n^2+7}-n)$

93. $\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$ **94.** $\frac{(-1)^n}{n}$ **95.** $\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$

96. $a_n=\begin{cases}(-1)^n\cdot n! & \text{dla } n\leqslant 100\\ \frac{2^n}{2^n+n} & \text{dla } n>100\end{cases}$ **97.** $\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+...+\frac{n^2+n}{n^3+n}$

98. $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}$ **99.** $\frac{n^7}{7^n}$ **100.** $\frac{10^n}{n!}$ **101.** $\frac{n!}{n^{22}}$

102. $\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$ **103.** $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$ **104.** $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$

105. Dla których liczb rzeczywistych a istnieje granica
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+n^a}-\sqrt[3]{n}\right)$ i ile jest równa?

Konwersatorium 5.11.2008, 12.11.2008

106. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{n>1000}{\forall} |a_n-100|<10\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny,

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,

c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,

d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,

e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,

f) $a_{666}<7777777$,

g) $a_{1111}>88$,

h) $\underset{n>1729}{\forall} |a_n-100|<1\,,$

i) $\underset{n>345}{\forall} |a_n-100|<17\,,$

j) $\underset{n>5555}{\forall} |a_n-99|<13\,,$

k) ciąg (a_n) jest ograniczony,

l) $\underset{n>444}{\exists} |a_n-95|<37\,,$

m) $\underset{n>4444}{\exists} |a_n-80|<37\,,$

n) $\underset{n<444}{\exists} |a_n-95|<37\,,$

o) $\underset{n<4444}{\exists} |a_n-80|<37\,,$

p) $\underset{m}{\forall}\ \underset{n>m}{\exists}\ a_n>0\,,$

q) $\underset{n>1331}{\forall} |a_n-66|>12\,,$

r) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n-a_m|<7\,,$

s) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n-a_m|<17\,,$

t) $\underset{m>123}{\forall}\ \underset{n>45678}{\forall} |a_n-a_m|<27\,,$

u) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n-a_m|<37\,,$

v) $\underset{m<123}{\exists}\ \underset{n<456}{\exists} |a_n-a_m|<3\,,$

w) $\underset{m>12345}{\forall}\ \underset{n>67890}{\forall} |a_n+a_m|<210\,,$

x) $\underset{m>1296}{\forall}\ \underset{n>7776}{\forall} |a_n+a_m|<222\,,$

y) $\underset{m>1024}{\forall}\ \underset{n>8192}{\forall} |a_n+a_m|>128\,,$

z) $\underset{n}{\exists}\ a_n<92\,,$

ż) $\underset{n}{\exists}\ a_n>91\,.$

107. Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant 5/\varepsilon}{\forall} |a_n-7|<\varepsilon \ .$$

Podać granicę ciągu (a_n).
Wskazać taką liczbę M, że $\underset{n}{\forall}|a_n|<M$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} a_n>6$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} a_n<7{,}01$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} |a_n-8|>1/3$.

108. Dany jest taki ciąg (b_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant 10/\varepsilon}{\forall} |b_n+2|<\varepsilon \ .$$

Podać granicę ciągu (b_n).
Wskazać taką liczbę M, że $\underset{n}{\forall}|b_n|<M$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} b_n<0$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} b_n>-3$.
Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} |b_n-2|>1/10$.

109. Niech $c_n=a_n+b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są ciągami z poprzednich dwóch zadań. Dowieść, że wówczas ciąg (c_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant \ldots\ldots\ldots/\varepsilon}{\forall} |c_n-5|<\varepsilon \ .$$

W miejscu kropek powinna się znaleźć odpowiednio dobrana liczba.

110. Niech $d_n=a_n\cdot b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są jak poprzednio. Dowieść, że wówczas ciąg (d_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall} |d_n+14|<\varepsilon \ .$$

W miejscu kropek powinno się znaleźć odpowiednio dobrane wyrażenie zależne od ε.

111. Niech $e_n=2a_n+3b_n$. Dowieść, że wówczas ciąg (e_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant \ldots\ldots\ldots/\varepsilon}{\forall} |e_n-\ldots\ldots|<\varepsilon \ .$$

W miejscu kropek powinny się znaleźć odpowiednio dobrane liczby.

PRAWDA CZY FAŁSZ?

112. Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

113. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

114. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

115. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

116. Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

117. Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2}$, to $a_n \to \frac{1}{2}$.

118. Jeżeli ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

119. Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

120. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

121. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.