Ćwiczenia 20.10.2008 Kolokwium nr 2, 23.10.2008, zad. 1-45

W miarę potrzeby omówić zadania z kolokwium nr 1:

K.1. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}\,.$$

K.2. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9\cdot(3n)!\cdot n \ldots\ldots\ldots\ldots 2\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3\,.$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geqslant$, $\leqslant$.

4. Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne

Zadania 31-35 to proste zadanka rachunkowe. Na ćwiczeniach prawdopodobnie wystarczy tylko porównać wyniki.

31. Przedstawić liczbę 0,123(45) w postaci ułamka zwykłego.

32. Przedstawić liczbę 0,1(270) w postaci ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

33. $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$

34. $(0,2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$

35. $(0,(037))^{0,(3)}$

36. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

37. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

38. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

39. Dowieść, że liczba $\log_{12}18$ jest niewymierna.

40. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

41. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

Oszustwo **42.**

Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

43. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q=5\,.$$

44. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q>1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n, gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n<q$ oraz $m/n>q$ używając tylko liczb m, n, działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25<27$, $125<128$).

Konwersatorium

To zadanie będzie omawiane na konwersatorium w dniu 22.10.2008. Warto jednak przed zajęciami spróbować samodzielnie swoich sił.

45. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant$ .... zachodzi nierówność

$$n^{32}\leqslant 2^n\,.$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód.

Natępnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbą wpisaną w miejsce kropek.