801. Czy dla dowolnej funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mającej ciągłą pochodną rzędu pierwszego i takiej, że $f(0)=0$, prawdziwa jest podana implikacja (zmienna x przebiega liczby rzeczywiste spełniające nierówność podaną pod kwantyfikatorem)

a) $\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)>0\right)$

b) $\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)>0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)>0\right)$

c) $\left(\underset{x<0}{\forall} f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\underset{x<0}{\forall} f'(x)>0\right)$

d) $\left(\underset{x<0}{\forall} f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\underset{x<0}{\forall} f'(x)<0\right)$

e) $\left(\underset{x<0}{\forall} f'(x)>0\right)\Rightarrow\left(\underset{x<0}{\forall} f(x)>0\right)$

f) $\left(\underset{x<0}{\forall} f'(x)>0\right)\Rightarrow\left(\underset{x<0}{\forall} f(x)<0\right)$

g) $\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)\neq 0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)\neq 0\right)$

h) $\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)\neq 0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)\neq 0\right)$

i) $\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)=0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)=0\right)$

j) $\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)=0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)=0\right)$

k) $\left(\underset{x>0}{\exists} f(x)=0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\exists} f'(x)=0\right)$

l) $\left(\underset{x>0}{\exists} f'(x)=0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\exists} f(x)=0\right)$

m) $\left(\underset{x>0}{\exists} f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\exists} f'(x)>0\right)$

n) $\left(\underset{x>0}{\exists} f'(x)>0\right)\Rightarrow\left(\underset{x>0}{\exists} f(x)>0\right)$

802. Czy funkcja $f(x)=a\cdot|x|+b\cdot\sin|x|+c\cdot\cos|x|$ jest różniczkowalna w zerze, jeżeli

a) $a=1,\ b=1,\ c=1$

b) $a=-1,\ b=1,\ c=1$

c) $a=1,\ b=-1,\ c=1$

d) $a=1,\ b=1,\ c=-1$

803. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int\limits_{2}^{4} 2^x\,dx > 10$

b) $\int\limits_{-10}^{0} 2^x\,dx > 10$

c) $\int\limits_{0}^{2} 2^x\,dx > 10$

d) $\int\limits_{4}^{5} 2^x\,dx > 10$

804. Czy podana całka ma wartość dodatnią?

a) $\int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot\sqrt{x^8+1}\,dx$

b) $\int\limits_{-2}^{1} x^3\cdot\sqrt{x^8+1}\,dx$

c) $\int\limits_{-1}^{2} x^5\cdot\sqrt{x^8+1}\,dx$

d) $\int\limits_{-2}^{2} x^7\cdot\sqrt{x^8+1}\,dx$

805. Obliczyć wartość całki

$$\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^5 x\,dx\,.$$

806. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{e^x+1}{e^{3x}+e^x}\,dx\,.$$

807. Znaleźć największą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której istnieje taka liczba rzeczywista A, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x}-1+\ln(x+1)}{x^n} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości n i A.

808. Wyznaczyć kresy zbioru

$$A=\left\{\int_0^a x^2-a\,dx\ :\ a\in(0,3)\right\}$$

i określić, czy należą one do zbioru A.

809. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0)=0$, $f(7)=12$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$1<f'(x)<2\,.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(4)-.........|<1\,.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

810. Rozstrzygnąć zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego p.

811. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0)=0$, $f(5)=9$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$f'(x)\neq 3\,.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(3)-.........|<3\,.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

812. Czy podana całka niewłaściwa jest zbieżna

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+2}\,dx$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$

f) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+\sqrt{x}}\,dx$

g) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+x}\,dx$

813. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\log_2 x} < 1$

b) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\log_2 x} < 2$

c) $\int\limits_4^8 \frac{dx}{\log_2 x} < 2$

d) $\int\limits_4^8 \frac{dx}{\log_2 x} < 3$

e) $\int\limits_{20}^{30} \frac{dx}{\log_2 x} < 3$

f) $\int\limits_{20}^{30} \frac{dx}{\log_2 x} < 4$

g) $\int\limits_{33}^{63} \frac{dx}{\log_2 x} < 4$

h) $\int\limits_{33}^{63} \frac{dx}{\log_2 x} < 5$

814. Obliczyć wartość całki

$$\int\limits_2^6 \frac{2x-7}{4x^2+17x+4}\,dx\,.$$

815. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+3)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+4)^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right).$$

816. Obliczyć całkę

$$\int x^p\cdot e^{x^\pi}\,dx$$

dla odpowiednio dobranej wartości parametru rzeczywistego $p\in[3,8]$.

817. Znaleźć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}-2x}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości A.

818. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=x-2\mathrm{arctg}x$$

na przedziale $[0,4]$. Podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

819. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\mathrm{arctg}x$$

na przedziale $[0,37]$ oraz podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

820. Znaleźć taką funkcję rózniczkowalną $F:\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}\to\mathbb{R}$, że

$$F'(x)=\frac{1}{x(x+2)}$$

oraz

$$F(-3)=F(-1)=F(1)=0$$

lub uzasadnić, że taka funkcja nie istnieje.

821. Obliczyć całkę

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}\,.$$

822. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział .... Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \text{..........................} = \text{...........................}\,.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6}-\frac{a\ln|1-x^3|}{3}+C$$

dla $a=$.........., $b=$.........., $c=$.......... otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx = \text{...}\,. \tag{2}$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=$....... Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(\text{......})=\text{......}\,,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(......)=...+C=$$

$$=...+C\,.$$

Stąd

$$C=...$$

i ostatecznie

$$f(x)=... \,. \qquad (3)$$

Przyjmując $x=......$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy .... Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(......)=...=$$

$$=...=$$

$$=...\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

....

823. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{4dx}{x^2+8x}$$

lub uzasadnić, że jest rozbieżna.

824. Funkcja $g:(-8,+\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$g(x)=\int_{0}^{x} \ln\left(\frac{(t+8)^3}{(t+16)^2}\right) dt\,.$$

Funkcja $f:(-8,+\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}\,.$$

Dobrać A tak, aby funkcja f była różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

825. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła na całej prostej, a ponadto ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego. Wiemy też, że

$$f(0)=0, \qquad f(2)=5, \qquad f(5)=9\,.$$

Dowieść, że istnieje taka liczba rzeczywista x, że $f'(x)$ jest liczbą całkowitą.

826. Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sin\left(39\cdot\left(x^{37/\ln x}+1\right)^{38}\right)$$

dla $x\in(1,+\infty)$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in(1,+\infty)$ zachodzi nierówność

$$f'(x)<40\,.$$

827. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=e^x\cdot\cos x\,.$$

Wyprowadzić wzór na $f^{(2009)}$, czyli pochodną rzędu 2009.