

Konwersatorium 11,18.05.2009 (zad. 773-778)

Ćwiczenia 12,19.05.2009 (zad. 759-772)

Kolokwium nr 10, 21.05.2009 (do zad. 778)

## 9. Szeregi Fouriera.

Szeregiem Fouriera funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o okresie  $2\pi$ , całkowalnej na przedziale długości  $2\pi$ , nazywamy szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja  $f$  jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi równość

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

to  $f$  jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

### Równość Parsewala:

$$\int_A^{A+2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

**759.**  $f(x) = x$  dla  $x \in (-\pi, \pi)$       **760.**  $f(x) = |x|$  dla  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

**761.**  $f(x) = x^2$  dla  $x \in (-\pi, \pi)$       **762.**  $f(x) = x^2$  dla  $x \in (0, 2\pi)$

**763.**  $f(x) = x^2$  dla  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$       **764.**  $f(x) = \left[\frac{x}{\pi}\right]$  dla  $x \in (0, 2\pi)$

**765.**  $f(x) = e^x$  dla  $x \in (0, 2\pi)$       **766.**  $f(x) = e^x$  dla  $x \in (-\pi, \pi)$

**767.**  $f(x) = |\sin x|$  dla  $x \in (0, 2\pi)$       **768.**  $f(x) = e^{|x|}$  dla  $x \in (-\pi, \pi)$

**769.**  $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$  dla  $x \in (0, 2\pi)$

**770.**  $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ \cos x & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

$$771. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$772. f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{dla } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$$

773. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

stosując wzór Parsewala do  $f(x) = e^x$  na  $(0, 2\pi)$  oraz wstawiając  $x = 0$  do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

774. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2}$$

wstawiając  $x = 0$  do szeregu Fouriera funkcji  $f(x) = \cos(x\sqrt{2})$  na  $(0, 2\pi)$ .

775. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

używając  $f(x) = x(\pi - |x|)$  na  $(-\pi, \pi)$ .

776. Dowieść, że jeśli  $f$  jest funkcją okresową o okresie  $2\pi/3$ , to w jej szeregu Fouriera  $a_n = b_n = 0$  dla  $n$  niepodzielnych przez 3.

Normą supremum funkcji  $f$  nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|$$

**Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:**

Ciąg funkcji  $(f_n)$  określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do  $f$ , jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

Jeżeli ciąg  $(f_n)$  funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f$ , to  $f$  jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg  $(f_n)$  funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f$ , a ciąg pochodnych  $(f'_n)$  jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $g$ , to funkcja  $f$  jest różniczkowalna i przy tym  $f' = g$ .

Szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych  $(S_n)$  określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ , to szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  mają ciągłe pochodne, a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$$

**777.** Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

**778.** Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

**Zadanie dodatkowe.** Zdobyć jakikolwiek sensowny program komputerowy rysujący wykresy funkcji. Narysować wykresy funkcji z wybranych kilku zadań spośród 759-775 (lub funkcji, które pojawiły się na wykładzie) oraz wykresy kilku początkowych sum częściowych ich szeregów Fouriera.

Przy okazji zrobić to samo z sumami początkowymi szeregu MacLaurina (Taylora w zerze) funkcji określonych wzorami  $\sin x$ ,  $\ln x$ ,  $e^x$  i paru innych.

W przypadku trudności ze zdobyciem programu postarać się zdobyć względy osoby, która program zdobyła.