3. Indukcja matematyczna, c.d.

Ćwiczenia 13.10.2008 Kolokwium nr 1, 16.10.2008, zad. 1-30

23. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(10)$,
b) prawdziwe jest $T(11)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

24. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(10)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.

25. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(10)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(25)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(200)$.

26. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) fałszywe jest $T(3)$,
b) fałszywe jest $T(11)$,
c) prawdziwe jest $T(9)$,
d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

27. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów.

28. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\ .$$

29. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}\ .$$

30. Wskazać sensowne liczby rzeczywiste A, B, C, D i dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą oszacowania

$$A\cdot\frac{4^n}{\sqrt{n+B}} < \binom{2n}{n} < C\cdot\frac{4^n}{\sqrt{n+D}}\ .$$

Wskazówki: Zacząć przeprowadzać dowód indukcyjny, a liczby A, B, C, D dobrać w trakcie dowodu. Dla każdej z dwóch nierówności przeprowadzić osobny dowód.