Konwersatorium 4.05.2009 (zad. 723-758)

Ćwiczenia 5.05.2009 (zad. 690-722) Kolokwium nr 9, 7.05.2009 (do zad. 758)

8. Całki niewłaściwe - obliczanie, kryterium porównawcze.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć te, które są zbieżne

690. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ **691.** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **692.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **693.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1}dx$

694. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ **695.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}}$ **696.** $\int\limits_0^\infty \cos x dx$ **697.** $\int\limits_1^\infty x^{1/x}dx$

698. $\int\limits_{-\infty}^\infty e^x dx$ **699.** $\int\limits_0^1 e^{1/x}dx$ **700.** $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^3}dx$

701. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$ **702.** $\int\limits_0^\infty x^3 \sin x^4 dx$

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

703. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ **704.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}$ **705.** $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x-\sin\sqrt{x+28}}$

706. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ **707.** $\int\limits_0^\infty \frac{1+\sqrt{x+|\ln x|}}{x}dx$ **708.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

709. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ **710.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+\operatorname{arctg} x}dx$ **711.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+\sin^2 x}$

712. $\int\limits_1^\infty e^{-1/x}dx$ **713.** $\int\limits_0^\infty \sqrt{x+1}-\sqrt{x}dx$ **714.** $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Oszustwo **715.** (funkcja ciągła nieujemna mająca całkę mniejszą od zera):

Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze, a zatem obliczenie całki $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx$

nie powinno nastręczać trudności. Ponieważ

$$f(x)=\frac{1}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})}$$

poza pojedynczym punktem $x=0$, po wykonaniu podstawienia $t=e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})}=-\int_{1/e}^{e}\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\mathrm{arctg}t\Big|_{1/e}^{e}=-\mathrm{arctg}e+\mathrm{arctg}\frac{1}{e}=\frac{\pi}{2}-2\mathrm{arctg}e<0$$

Wyjaśnić, na czym polega oszustwo i obliczyć prawdziwą wartość całki $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne

716. $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{e^{1/x}}{x^2(e^{2/x}+e^{-2/x}+2)}dx$ **717.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\ln|x|dx$

Użyć kryterium całkowego do rozstrzygnięcia zbieżności następujących szeregów

718. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt[7]{n}}}$ **719.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^a n}$ w zależności od $a>0$

720. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ **721.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ **722.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

723. Obliczyć pole torusa powstałego przez obrót okręgu o równaniu $y^2=1-(x-2)^2$ wokół osi OY.

724. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=\frac{1}{n}$, ale całka $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

725. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=\frac{1}{n^2}$, ale całka $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

726. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=n$, ale całka $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

727. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość

$f(n)=0$, ale całka $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ jest rozbieżna.

728. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=e^n$, ale całka $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ jest zbieżna.

Co możemy powiedzieć o zbieżności (*zbieżne, rozbieżne, nie wiadomo*) szeregu $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ lub całek $\int\limits_0^1 f(x)dx$ i $\int\limits_1^\infty g(x)dx$, gdzie $f\in C(0,1]$ i $g\in C[1,\infty)$, jeśli wiadomo, że

729. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ **730.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ **731.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

732. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ **733.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$ **734.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

735. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ **736.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$ **737.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

738. Ciąg (a_n) nie jest zbieżny do 0.

739. $g(x)$ nie dąży do 0 przy $x\to\infty$.

740. $f(x)$ nie dąży do 0 przy $x\to 0$.

741. Ciąg (a_n) jest ograniczony. **742.** ... nie jest ograniczony.

743. Funkcja g jest ograniczona. **744.** ... nie jest ograniczona.

745. Funkcja f jest ograniczona. **746.** ... nie jest ograniczona.

747. Szereg $\sum\limits_{n=2009}^\infty a_n$ jest zbieżny. **748.** ... jest rozbieżny.

749. Całka $\int\limits_{2009}^\infty g(x)dx$ jest zbieżna. **750.** ... jest rozbieżna.

751. Całka $\int\limits_0^{1/2009} f(x)dx$ jest zbieżna. **752.** ... jest rozbieżna.

753. $a_n=n^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

754. $g(x)=x^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

755. $f(x)=x^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

756. $a_n=p^n$ - dać odpowiedź w zależności od p.

757. $g(x)=p^x$ - dać odpowiedź w zależności od $p>0$.

758. $f(x)=p^x$ - dać odpowiedź w zależności od $p>0$.