Konwersatorium 20.04.2009 (zad. 649-655)

Ćwiczenia 21.04.2009 (zad. 585-648) Kolokwium nr 7, 23.04.2009 (do zad. 655)

6. Całka oznaczona - podstawy.

585. Przemek ma przygotować referat dotyczący całki oznaczonej. Przemek chce podać następujące wzory zachodzące dla funkcji ciągłej f na przedziale $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in[a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \qquad (A)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in[a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \qquad (B)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \qquad (C)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \qquad (D)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1/2)\frac{b-a}{n}\right) \qquad (E)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \qquad (F)$$

Przemek poprosił Gosię o wykonanie rysunków ilustrujących powyższe wzory. Niestety Gosia nie napisała, który rysunek odpowiada któremu wzorowi.

Pomóż Przemkowi przyporządkować rysunki (rys. 1-6, str. 38-41) odpowiednim wzorom.

Podać wzór na $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})$ oraz obliczyć $\lim_{n\to\infty} C_n$

586. $f(x)=1$, $a=5$, $b=8$ **587.** $f(x)=x$, $a=0$, $b=1$

588. $f(x)=x$, $a=1$, $b=5$ **589.** $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=5$

590. $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=1$ **591.** $f(x)=2x+5$, $a=-3$, $b=4$

592. $f(x)=x^2+1$, $a=-1$, $b=2$ **593.** $f(x)=x^3+x$, $a=0$, $b=4$

594. $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna

595. $\int\limits_2^4 x^{10}dx$ (**Wsk.** $2\cdot 2^{k/n}$) **596.** $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ (**Wsk.** $e^{k/n}$)

597. $\int\limits_0^{20} xdx$ **598.** $\int\limits_1^{10} e^{2x}dx$ **599.** $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}dx$ (**Wsk.** $\frac{k^3}{n^3}$)

600. $\int\limits_{-1}^1 |x|dx$ **601.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ (**Wsk.** $2^{k/n}$) **602.** $\int\limits_0^4 \sqrt{x}dx$ (**Wsk.** $\frac{4k^2}{n^2}$)

Obliczyć całki oznaczone:

603. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x^{2007}dx$ **604.** $\int\limits_0^2 \mathrm{arctg}[x]dx$ **605.** $\int\limits_0^2 [\cos x^2]dx$

606. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx$ **607.** $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3}dx$ **608.** $\int\limits_{-13}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}dx$

609. $\int\limits_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ **610.** $\int\limits_0^3 \mathrm{sgn}(x^3-x)dx$ **611.** $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$

612. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$ **613.** $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx$ **614.** $\int\limits_0^{\pi} x^3\sin x dx$

615. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ **616.** $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ **617.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

618. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ **619.** $\int\limits_0^5 |x^2-5x+6|dx$ **620.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

621. $\int\limits_1^2 x\log_2 x dx$ **622.** $\int\limits_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$ **623.** $\int\limits_0^{6\pi} |\sin x|dx$

624. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\sin^{11}x dx$ **625.** $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

626. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^{2007}\cos x dx$ **627.** $\int\limits_0^{2\pi} (x-\pi)^{2007}\cos x dx$

Udowodnić następujące oszacowania

628. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx<2$ **629.** $\frac{1}{5}<\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{2}$

630. $\frac{1}{11}<\int\limits_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x}<\frac{1}{8}$ **631.** $\int\limits_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2}dx<\frac{3}{2}$

632. $\int\limits_0^1 x(1-x^{99+x})dx<\frac{1}{2}$ **633.** $2\sqrt{2}<\int\limits_2^4 x^{1/x}dx$

634. $5<\int\limits_1^3 x^x dx<31$ **635.** $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx<\frac{3}{4}$

Obliczyć granice

636. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}$ **637.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^{20}+2^{20}+3^{20}+...+n^{20}}{n^{21}}$

638. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}\right)\cdot n$

639. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}}$

640. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\sin\frac{3}{n}+...+\sin\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

641. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n}+\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n+2}+...+\sqrt{5n}\right)\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$

642. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{8n}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

643. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+...+\sqrt[3]{2n}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+...+\sqrt{2n}}$

644. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\frac{n}{n^2+16}+...+\frac{n}{n^2+n^2}$

645. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{5n}+\frac{4}{5n+3}+\frac{4}{5n+6}+\frac{4}{5n+9}+...+\frac{4}{26n}$

646. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7n}+\frac{1}{7n+2}+\frac{1}{7n+4}+\frac{1}{7n+6}+...+\frac{1}{9n}$

647. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7n^2}+\frac{1}{7n^2+1}+\frac{1}{7n^2+2}+\frac{1}{7n^2+3}+...+\frac{1}{8n^2}$

648. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{n}}}+e^{\sqrt{\frac{2}{n}}}+e^{\sqrt{\frac{3}{n}}}+...+e^{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right)$

649. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+6}}+\frac{1}{\sqrt{n+9}}+...+\frac{1}{\sqrt{7n}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$

650. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+0}{(3n)^3}+\frac{n^2+1}{(3n+1)^3}+\frac{n^2+2}{(3n+2)^3}+\frac{n^2+3}{(3n+3)^3}+...+\frac{n^2+n}{(4n)^3}$

651. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2}+\frac{n}{2(n+1)^2}+\frac{n}{2(n+2)^2}+\frac{n}{2(n+3)^2}+...+\frac{n}{50n^2}$

652. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2}+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{n^2+(n+3)^2}+...+\frac{n}{50n^2}$

653. Udowodnić oszacowanie $\frac{19}{3}<\int\limits_2^3 x^x dx<\frac{65}{4}$. **Wskazówka:** Oszacować x^x przez x^a.

Obliczyć granice

654. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{3n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{3n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}\sqrt{3n+2}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}\sqrt{3n+3}}+...+\frac{1}{\sqrt{3n}\sqrt{4n}}$

Wskazówka: Niewymierność $\sqrt{(x+a)(x+b)}$ całkujemy wykonując podstawienie $t=\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$.

655. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sin(n^2+0^2)}{n^2+0^2}+\frac{n+\sin(n^2+1^2)}{n^2+1^2}+\frac{n+\sin(n^2+2^2)}{n^2+2^2}+\frac{n+\sin(n^2+3^2)}{n^2+3^2}+...+\frac{n+\sin(n^2+n^2)}{n^2+n^2}$

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.