Ćwiczenia 10.03.2009 Kolokwium nr 2, 12.03.2009 (do zad. 417)
Ćwiczenia 17.03.2009 Kolokwium nr 3, 19.03.2009 (do zad. 438)

1. Pochodna funkcji (c.d.) Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a.

405. Dla danych różnych liczb rzeczywistych a i b oraz zbioru $Z\subset\mathbb{R}$ chcemy formalnie zapisać warunek, ze istnieje w zbiorze Z liczba (ostro) między a i b, nie wiemy jednak z góry, która z liczb a,b jest większa. Które z podanych warunków są do tego celu odpowiednie?

(♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b$$

(♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b\ \wedge\ b<c<a$$

(♡) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b\ \vee\ b<c<a$$

(♠) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ ac+b(1-c)\in Z$$

(♣♣) $$\underset{c>0}{\exists}\ ac+b(1-c)\in Z$$

(♢♢) $$\underset{c\in[0,1]}{\exists}\ bc+a(1-c)\in Z$$

(♡♡) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ a+(b-a)c\in Z$$

(♠♠) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ a+(a-b)c\in Z$$

(♣♣♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c}{b-a}\in(0,1)$$

(♢♢♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c-b}{b-a}\in(0,1)$$

(♡♡♡) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c-a}{b-a}\in(0,1)$$

(♠♠♠) $$\underset{c\in Z\setminus\{a\}}{\exists}\ \frac{b-a}{c-a}>1$$

406. Przyporządkować następującym twierdzeniom podane niżej warunki oraz powiedzieć, co mówi warunek nieprzyporządkowany żadnemu twierdzeniu.

(i) **Własność Darboux funkcji ciągłych:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

(ii) **Własność Darboux pochodnej funkcji:** Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[a,b]$, przy czym w punktach a i b istnieją odpowiednie pochodne jednostronne, to

(iii) **Twierdzenie Rolle'a:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), a ponadto $f(a)=f(b)$, to

(iv) **Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej rachunku różniczkowego):** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to

(4♣) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=f'(a)+s(f'(b)-f'(a))$$

(5♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+t(b-a))$$

(6♡) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\forall}\ \underset{s\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♠) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=0$$

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

407. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$f_1(3)=1,\ \ f_1(5)=2,$
$f_2(0)=3,\ \ f_2(4)=-1,$
$f_3(-5)=0,\ \ f_3(15)=10,$
$f_4(1)=2,\ \ \underset{x}{\forall} f_4'(x)\neq 1,$
$f_5(0)=0,\ \ f_5(2)=10,\ \ \underset{x}{\forall} f_5'(x)\neq 2,$
$f_6(0)=7,\ \ \underset{x}{\forall} f_6'(x)>2,$
$f_7(3)=5,\ \ \underset{x}{\forall} f_7'(x)\geqslant -1,$
$f_8(-2)=0,\ \ f_8(0)=10,\ \ f_8(3)=4,$
$f_9(-1)=0,\ \ f_9(1)=100,\ \ f_9'(3)=40,$
$f_{10}(1)=-5,\ \ f_{10}(11)=5,\ \ \underset{x}{\forall}\ 0<f_{10}'(x)<2,$
$f_{11}(0)=0,\ \ f_{11}(100)=0,\ \ \underset{x}{\forall}\ -1<f_{11}'(x)<2,$
$f_{12}(-100)=-100,\ \ f_{12}(100)=100,\ \ \underset{x}{\forall}\ -100<f_{12}'(x)<100.$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{x}{\forall}\ f_i'(x)\neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=-1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0)\neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99)>0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=\frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1)\neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i(c)=13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c\neq d}{\exists}\ f_i(c)=f_i(d)=7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c,\,d}{\exists}\ f_i(c)=f_i'(d)$$

2. Pochodna funkcji - zastosowania. Znajdowanie najmniejszej i największej wartości funkcji na przedziale domkniętym. Reguła de l'Hospitala.

408. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie trójkątnej i objętości 1. Który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej?

409. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta u góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

410. $x^2+2x+21$, $[-2,7]$ **411.** $|x^2-1|+3x$, $[-2,2]$

412. $|x+1|+x^2$, $[-10,10]$ **413.** $|10x-1|+x^3$, $[0,1]$

414. $\ln x-\frac{x}{10}$, $[1,e^3]$ **415.** $|\sin x|+\frac{x}{2}$, $[0,2\pi]$

416. $x^{1/x}$, $[2,4]$ **417.** $3\sin x+\sin 3x$, $[0,2\pi]$

Obliczyć granice

418. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$ **419.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$ **420.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

421. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-x^2-2}{x\sin x-x^2}$ **422.** $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$ **423.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$

424. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **425.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e}{x}$ **426.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

427. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ **428.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}$ **429.** $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\ln x}{x-e}$

430. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}$ **431.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^x-4}{x-2}$

432. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$.

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

433. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x} & \text{dla} \quad x\notin\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\\ A_k & \text{dla} \quad x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Dla których A_k $(k\in\mathbb{Z})$ istnieją $f'(k\pi)$ i ile wynoszą?

434. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x} & \text{dla} \quad x\notin\{k\pi+\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\}\\ A_k & \text{dla} \quad x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Dla których A_k $(k\in\mathbb{Z})$ istnieją $f'(k\pi+\frac{\pi}{2})$ i ile wynoszą?

435. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & \text{dla} \quad x\notin\mathbb{Z}\\ x^2-2x & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x\in\mathbb{Z}$, dla których istnieje.

436. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{7x}-1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$.

Obliczyć $f'(0)$.

437. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{\sin(\pi x)} & \text{dla} \quad x\notin\mathbb{Z}\\ x^3-x & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x\in\mathbb{Z}$, dla których istnieje.

438. Niech

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-3e^x+2}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}.$$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?