Ćwiczenia 26.01.2009 (zad. 322-344)

Egzamin: czwartek 29.01.2009, godz. 9.00-12.00, sale HS, EM

Egzamin poprawkowy: środa 11.02.2009, godz. 14.20-17.20, sala HS

W miarę potrzeby omówić na ćwiczeniach zadania z kolokwium nr 13.

## 12. Uzupełnienie: liczby zespolone, zespolone szeregi liczbowe i potęgowe.

**322.** Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

jeśli $b\neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań.

**323.** $\overline{z}=z^2$ **324.** $\overline{z}=z^{-1}$ **325.** $1+i=z^2$ **326.** $3+4i=z^2$

**327.** $-3+4i=z^2$ **328.** $z^2+z=i$ **329.** $z^2+iz=1$ **330.** $z=\overline{z}+1$

**331.** $z^2\overline{z}=8i$ **332.** $z^4+10z^2+61=0$

**333.** $\begin{cases} z_1^2=z_2 \\ z_2^2=z_1 \end{cases}$ **334.** $\begin{cases} z_1^2+z_2^2=1 \\ z_1+z_2=-1 \end{cases}$

**335.** $\begin{cases} z_1+iz_2=1 \\ z_2+iz_1=2 \end{cases}$ **336.** $\begin{cases} z_1+\overline{z_2}=1 \\ \overline{z_1}+z_2=i \end{cases}$

**337.** $z^5=1$ (**Wsk.** $z^4+z^3+z^2+z+1=(z^2+az\pm1)(z^2+bz\pm1)$ )

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

**338.** $\operatorname{Re}z+\operatorname{Re}z^2\geqslant 0$ **339.** $3|z|\leqslant|z^2|+1$ **340.** $|z|=|\overline{z}+1|$

**341.** $|z+i|\leqslant|z-i|$ **342.** $\operatorname{Im}\dfrac{z}{z^2+1}=0$ **343.** $\operatorname{Re}\dfrac{z+1}{z}=0$

**344.** W trójkącie prostokątnym $PQD$ kąt przy wierzchołku $P$ jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt $C$ jest środkiem odcinka $PD$, punkt $A$ jest środkiem odcinka $PC$, punkt $B$ jest środkiem odcinka $AC$. Punkt $E$ leży na prostej $PD$, przy czym

$$\sphericalangle PQA+\sphericalangle PQB+\sphericalangle PQC=\sphericalangle PQD+\sphericalangle PQE\,.$$

Obliczyć $PE$.

## Konwersatorium 28.01.2009.

## Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

### Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli $z_n$ nie dąży do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

### Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

### Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

### Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

### Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg $(a_n)$ jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej $z$, że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

### Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n\,.$$

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} c z_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n\,.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n .$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R=0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R=+\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w częsci punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

**345.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+in+1}$ **346.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+i}$ **347.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+i}$ **348.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2+i}$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

**349.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ **350.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2}$ **351.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n$

**352.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$ **353.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$