W miarę potrzeby omówić na ćwiczeniach zadania z kolokwium nr 10.

10. Funkcje (c.d).

269. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000}+2=(1{,}000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

270. Dla których liczb

$$n\in\left\{2,\,4,\,10,\,20,\,50,\,100,\,200,\,500,\,1000,\,10^5,\,10^{10},\,10^{30},\,10^{100},\,10^{1000}\right\}$$

wykres funkcji

$$f(x)=2^x$$

przecina wykres funkcji

$$g(x)=x^n+4\,,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

271. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

272. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos\left(x^3\right)$$

ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

273. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{x}{2}$ **274.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ **275.** $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}+|x|$

276. $f(x)=\log_4(2^x+8^x)$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie $k\in\mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta=10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

277. $f(x)=x^{10}$, $x_0=2$, $\varepsilon=1/10$ **278.** $f(x)=x^{100}$, $x_0=5$, $\varepsilon=10^{-10}$

279. $f(x)=x^{1000}$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

280. $f(x)=x^{1/10}$, $x_0=1111$, $\varepsilon=10^{-5}$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f,g,h są określone w otoczeniu punktu $x_0\in[-\infty,+\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$$

dla x bliskich x_0, to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)\,.$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

281. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^{1000}\right)}{\sqrt{x}}$ **282.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\left\{1/x^{1000}\right\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

obliczyć

283. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **284.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$

285. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$ **286.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **287.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$

288. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot f(x)}$, gdzie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

289. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$ **290.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$