1. Indukcja matematyczna.

Ćwiczenia 6.10.2008

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+...+n\cdot 3^{n-1}=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^n+\frac{1}{4}\ .$$

2. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot(2^{2^4}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1\ .$$

UWAGA: $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2\ .$$

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+...+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^n+1\ .$$

5. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}\ .$$

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i=a_m\cdot a_{m+1}\cdot a_{m+2}\cdot a_{m+3}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

6. $\sum\limits_{i=3}^{5} i^2$ **7.** $\sum\limits_{i=-99}^{100} i^3$ **8.** $\sum\limits_{i=-10}^{10} 7$ **9.** $\prod\limits_{i=1}^{5} i$ **10.** $\prod\limits_{i=-2008}^{2008} i^{2008}$

11. Zapisać wzory występujące w treści zadań **1-5** bez użycia kropek.

12. Liczby a_n,b_n są określone wzorami $a_1=b_1=1$, $a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=a_{n+1}+a_n$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2a_n^2-b_n^2$ jest równa ± 1.

OSZUSTWO **13.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n<2^n+110 \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30<2+110=112$.

2° Załóżmy, że $30n<2^n+110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1)<2^{n+1}+110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1)=30n+30<2^n+110+30=2^{n+1}+110+30-2^n<2^{n+1}+110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n\geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n\geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że
dla $n=2$ mamy $60<4+110=114$,
dla $n=3$ mamy $90<8+110=118$,
dla $n=4$ mamy $120<16+110=126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność
$180<174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

14. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n<2^n+25$.

2. Dwumian Newtona.

Ćwiczenia 9.10.2008

15. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<4^n$.
Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

16. Wskazać taką liczbę x, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k}+x\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}.$$

17. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}.$$

18. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

19. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{2}=\frac{n\cdot[(n-1)!]^2}{2^{n-1}}.$$

20. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n}<7^n$.

21. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n+3}{n}<\frac{3}{2}\cdot 4^n$.

22. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n}<2^{2n+1}.$$