EGZAMIN, ANALIZA A1, 11.02.2009

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **1.**

W każdym z zadań **1.1-1.4** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**, a za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$

1.2 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}$

1.3 Czy ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{n^k+1}{n^7+1} + \frac{n^k+2}{n^7+4} + \frac{n^k+3}{n^7+9} + \frac{n^k+4}{n^7+16} + \frac{n^k+5}{n^7+25} + \ldots + \frac{n^k+n}{n^7+n^2}$$

jest zbieżny dla

a) $k=5$

b) $k=6$

c) $k=7$

d) $k=8$

1.4 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja $T(n+2) \Rightarrow T(n)$. Czy stąd wynika, że **fałszywa** jest implikacja

a) $T(2008) \Rightarrow T(3009)$

b) $T(2008) \Rightarrow T(3010)$

c) $T(2009) \Rightarrow T(3010)$

d) $T(3009) \Rightarrow T(2011)$

Zadanie **2.**

W każdym z zadań **2.1-2.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.
Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.
Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

2.1. $A=\left\{\sqrt{n^2+n}-n : n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}\right\}$ Ocena ....

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

2.2. $B=\left\{\sqrt{n^2+n+1}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

2.3. $C=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,8]\}$ Ocena ....

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

2.4. $D=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,16]\}$ Ocena ....

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

2.5. $E=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,32]\}$ Ocena ....

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

Zadanie **3.**

Dobrać odpowiednią liczbę rzeczywistą dodatnią M i **dowieść**, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$M \leqslant \frac{14x^{2009}+x^{1111}+15}{11x^{2009}+x^{666}+9} \leqslant 5M\,.$$

Zadanie **4.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{2009}}{2^{n!}}\,.$$

Zadanie **5.**

Naszkicować wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ |x| & \text{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b \\ x^2 & \text{dla} \quad x>b \end{cases}$$

dla każdej pary parametrów $a<b$, dla której funkcja f jest ciągła.

Zadanie **6.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{2n}+x^n}+x^n\right)$$

w zależności od parametru naturalnego n.

Zadanie **7.**

Wyznaczyć promień zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cdot x^{2n}}{n!\cdot n^n}\,.$$

Zadanie **8.**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\,.$$