EGZAMIN, ANALIZA A1, 29.01.2009

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.4** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**, a za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(2008) \Rightarrow T(3009)$

b) $T(2008) \Rightarrow T(3010)$

c) $T(2009) \Rightarrow T(3010)$

d) $T(2009) \Rightarrow T(3011)$

1.2 Szereg liczbowy o wyrazach rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny**. Czy stąd wynika, że **zbieżny** jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2008a_n$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+1)$

1.3 Szereg liczbowy o wyrazach rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny**. Czy stąd wynika, że **rozbieżny** jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2008a_n$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+1)$

1.4 Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ ex^3+fx^2+gx+h & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a=23,\ b=24,\ c=25,\ d=26,\ e=27,\ f=28,\ g=29,\ h=30$

b) $a=25,\ b=16,\ c=9,\ d=4,\ e=1,\ f=0,\ g=1,\ h=4$

c) $a=2,\ b=3,\ c=5,\ d=7,\ e=11,\ f=13,\ g=17,\ h=19$

d) $a=2009,\ b=2010,\ c=2011,\ d=2008,\ e=2009,\ f=2010,\ g=2007,\ h=2008$

Zadanie **2.**

W każdym z zadań **2.1-2.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.
Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.
Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

2.1. $A=\left\{\frac{5m-2n}{mn} : m,n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}\right\}$ Ocena ....

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

2.2. $B=\left\{\frac{m}{n+7} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

2.3. $C=\left\{x^2 : x\in(-2,1)\right\}$ Ocena ....

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

2.4. $D=\left\{x^3 : x\in(-2,1)\right\}$ Ocena ....

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

2.5. $E=\left\{3x^2+y^3 : x,y\in(-2,1)\right\}$ Ocena ....

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

Zadanie **3.**

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2\cdot\binom{2n+5}{n}<3\cdot 5^n\,.$$

Zadanie **4.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^k+1}{n^9+1}+\frac{n^k+2}{n^9+4}+\frac{n^k+3}{n^9+9}+\frac{n^k+4}{n^9+16}+\frac{n^k+5}{n^9+25}+\ldots+\frac{n^k+n^2}{n^9+n^4}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Zadanie **5.**

Wyznaczyć asymptoty funkcji f danej wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}\,.$$

Zadanie **6.**

Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant 6/\varepsilon}{\forall}\ |a_n-2|<\varepsilon \qquad \text{oraz} \qquad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant 10/\varepsilon}{\forall}\ |b_n+5|<\varepsilon\,.$$

Niech $c_n=a_n+b_n$. Wskazać odpowiednią liczbę rzeczywistą r oraz liczbę naturalną P i udowodnić, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant P/\varepsilon}{\forall}\ |c_n+r|<\varepsilon\,.$$

Zadanie **7.**

Wyznaczyć przedział zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^{3n}}{\sqrt{n}}\,.$$

Zadanie **8.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu liczbowego o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p+i}{n^7-i}$$

w zależności od parametru całkowitego dodatniego p.