EGZAMIN, ANALIZA A2, 22.06.2009

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **1.**

W każdym z zadań **1.1-1.4** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**, a za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 Czy całka niewłaściwa

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^p}{x^3+1}\, dx$$

jest zbieżna dla

a) $p=-2$ **b)** $p=-1$

c) $p=1$ **d)** $p=2$

1.2 Czy nierówność

$$\int_{a}^{b} x^7 \cdot 2^{x^6}\, dx < 2$$

jest prawdziwa dla

a) $a=-3,\ b=0$ **b)** $a=-2,\ b=1$

c) $a=-1,\ b=2$ **d)** $a=0,\ b=3$

1.3 Czy dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającej warunki $f(1)=3$ oraz $f(3)=13$, istnieje takie $x\in\mathbb{R}$, że $f'(x)=c$, jeżeli

a) $c=2$ **b)** $c=3$

c) $c=5$ **d)** $c=10$

1.4 Czy funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest różniczkowalna, jeżeli

a) $a=2,\ b=-1,\ c=0$

b) $a=1,\ b=1,\ c=1$

c) $a=3,\ b=-3,\ c=1$

d) $a=1,\ b=-2,\ c=2$

Zadanie **2.**

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(3)=7$$

$$2\leqslant f'(x)\leqslant 3 \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

W każdym z zadań **2.1-2.6** podaj odpowiedni kres zbioru.

Za podanie poprawnych odpowiedzi w n zadaniach otrzymasz $\max(0,n{-}1)$ punktów.

2.1. $\sup\{f(6):\ f\in\mathbb{T}\}=$....................................

2.2. $\inf\{f(5):\ f\in\mathbb{T}\}=$....................................

2.3. $\sup\{f(2):\ f\in\mathbb{T}\}=$....................................

2.4. $\inf\{f(1):\ f\in\mathbb{T}\}=$....................................

2.5. $\sup\{f(9)-f(4):\ f\in\mathbb{T}\}=$....................................

2.6. $\inf\{f(7)-f(0):\ f\in\mathbb{T}\}=$....................................

Zadanie **3.**

Niech

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{10x}-10e^{x}+9}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\[2ex] A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}.$$

Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

Zadanie **4.**

Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz spełnia warunki

$$f(1)=f(2)=0$$

$$f''(x)=\frac{1}{x^2} \quad \text{dla każdego} \quad x\in(0,+\infty)\,.$$

Wyznaczyć $f(4)$.

Zadanie **5.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=x-4\sqrt{x}+\ln x$$

na przedziale $\left[\frac{1}{2},2\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie **6.**

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{n^2+(n+2)^2}+\frac{n+3}{n^2+(n+3)^2}+\frac{n+4}{n^2+(n+4)^2}+\ldots+\frac{7n}{50n^2}\right).$$

Zadanie **7.**

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\cos^4 x\cdot\cos 4x\,.$$

Zadanie **8.**

Obliczyć

$$\int_0^e\frac{dx}{x\cdot((\ln x)^2+1)}\,.$$