ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

Egzamin 25.02.2007

Zadanie **1.**

W każdym z poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt. Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, a ponadto wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej $n \neq 7$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe **TAK**

b) $T(8)$ jest prawdziwe **NIE**

c) $T(8)$ jest fałszywe **NIE**

d) $T(9)$ jest fałszywe **NIE**

1.2 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej $n \neq 7$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, a ponadto wiadomo, że dla $n=7$ implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ jest fałszywa. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe **TAK**

b) $T(8)$ jest prawdziwe **NIE**

c) $T(8)$ jest fałszywe **TAK**

d) $T(9)$ jest fałszywe **NIE**

1.3 Czy jest prawdą, że $a \cdot \log_7 b = b \cdot \log_7 a$, jezeli

a) $a=2$, $b=3$ **NIE**

b) $a=2$, $b=4$ **TAK**

c) $a=2$, $b=5$ **NIE**

d) $a=3$, $b=4$ **NIE**

1.4 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$ **TAK**

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ **TAK**

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$ **TAK**

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ **TAK**

Zadanie **2.**

W poniższym zadaniu udziel dziesięciu odpowiedzi. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-5)$ punktów.
Przypomnienie: na analizie liczby 0 nie uważamy za liczbę naturalną.

Podać kresy zbiorów.

a) $A = \left\{ \frac{7m - 5n}{mn} : m,n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf A = -5$ $\sup A = 7$

b) $B = \left\{ \frac{(n!)^2}{37^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf B = (6!)^2/37^6$ $\sup B = +\infty$

c) $C = \{(\log_x(4x)) - 2\log_x 2 : x \in (2,4) \cup (8,16)\}$

$\inf C = 1$ $\sup C = 1$

d) $D = \{|\log_2 x| : x \in (1/8, 4)\}$ $\inf D = 0$ $\sup D = 3$

e) $E = \{|\log_2 x| : x \in (1/4, 8)\}$ $\inf E = 0$ $\sup E = 3$

Zadanie **3.**

W poniższym zadaniu udziel piętnastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-10)$ punktów.

Zmienne m,n przebiegają zbiór liczb naturalnych.

Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\underset{n}{\forall} \left|a_n - \frac{1}{n}\right| < n\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny **NIE**

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny **NIE**

c) $\underset{n}{\forall}\ a_n > 0$ **NIE**

d) $\underset{n}{\forall}\ a_n < 2007$ **NIE**

e) $\underset{n}{\exists}\ a_n < 0$ **NIE**

f) $\underset{n}{\exists} \left(|a_n - n| < \frac{1}{n}\right)$ **TAK**

g) $\underset{n}{\forall}\ (|a_n - n| < 2n)$ **TAK**

h) $a_1 > 0$ **TAK**

i) $a_2 > 0$ **NIE**

j) $a_2 \neq a_3$ **NIE**

k) $|a_3| < \frac{10}{3}$ **TAK**

l) $|a_3| > \frac{8}{3}$ **NIE**

m) $|a_3| < \frac{1}{3}$ **NIE**

n) $|a_{37} - a_{73}| > \frac{1}{111}$ **NIE**

o) $|a_{37} - a_{73}| < 111$ **TAK**

Zadanie **4.**

Uzasadnienie poprawności przykładów nie jest wymagane.

Za poprawne podanie obydwu przykładów otrzymasz 5 punktów.

a) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej $1/2$, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba a_n jest całkowita.

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_1 = 1/2$ oraz $a_n = 0$ dla $n \geqslant 2$.

b) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności równym 2, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 4 \text{ dla } x = 1\,.$$

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_0 = 3$ oraz $a_n = 1/2^n$ dla $n \geqslant 1$.

Inny przykład: $a_n = 2/2^n$.

Zadanie **5.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+1}{n^3+\sqrt{n^6+1}}+\frac{4n^2+2}{n^3+\sqrt{n^6+2}}+\frac{4n^2+3}{n^3+\sqrt{n^6+3}}+\frac{4n^2+4}{n^3+\sqrt{n^6+4}}+\ldots+\frac{4n^2+6n}{n^3+\sqrt{n^6+6n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $6n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n=\sum_{k=1}^{6n}\frac{4n^2+k}{n^3+\sqrt{n^6+k}}\,.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{6n}\frac{4n^2+k}{n^3+\sqrt{n^6+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{6n}\frac{4n^2+6n}{n^3+\sqrt{n^6+0}}=\frac{6n(4n^2+6n)}{2n^3}=c_n\,.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{6n}\frac{4n^2+k}{n^3+\sqrt{n^6+k}}\geqslant\sum_{k=1}^{6n}\frac{4n^2+0}{n^3+\sqrt{n^6+6n}}=\frac{6n\cdot 4n^2}{n^3+\sqrt{n^6+6n}}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{24n^3}{n^3+\sqrt{n^6+6n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{24}{1+\sqrt{1+6n^{-5}}}=12$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n(4n^2+6n)}{2n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(12+36n^{-1}\right)=12\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=12\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 12.

Zadanie **6.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy kryterium d'Alemberta. Oznaczmy

$$a_n = \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}}.$$

Wówczas (szereg ma wyrazy dodatnie, więc nie musimy pisać modułu)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^{1000}}{2^{n^2+2n+1}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^{1000}} = \frac{(n+1)^{1000}}{2^{2n+1}} = b_n .$$

Ponieważ trudno jest określić, do czego dąży b_n przy $n \to \infty$, stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n). Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+2)^{1000}}{2^{2n+3}} \cdot \frac{2^{2n+1}}{(n+1)^{1000}} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{1000} \to \frac{1^{1000}}{4} = \frac{1}{4}.$$

Z kryterium d'Alemberta w wersji dla ciągów wynika, że skoro granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{4} < 1$$

istnieje i jest mniejsza od 1, to ciąg (b_n) jest zbieżny do zera.

Tym samym

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

i na mocy kryterium d'Alemberta w wersji dla szeregów, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Zadanie **7.**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(3n+1)! < (3^n \cdot (n!))^3 .$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $(3n+1)! = 4! = 24$ oraz $(3 \cdot (n!))^3 = 3^3 = 27$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $24 < 27$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(3n+1)! < (3^n \cdot (n!))^3 .$$

Chcemy wykazać, że

$$(3n+4)! < (3^{n+1} \cdot ((n+1)!))^3 . \qquad (\spadesuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności ($\spadesuit$) otrzymujemy

$$L = (3n+4)! = (3n+1)! \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot (3n+4) <$$

$$< (3^n \cdot (n!))^3 \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot (3n+4) = L_2 .$$

Z kolei prawa strona nierówności ($\spadesuit$) jest równa

$$P = (3^{n+1} \cdot ((n+1)!))^3 = (3^n \cdot (n!))^3 \cdot (3(n+1))^3 = (3^n \cdot (n!))^3 \cdot (3n+3)^3 = P_2 .$$

Do zakończenia dowodu nierówności ($\spadesuit$) wystarczy wakazać nierówność $L_2 \leqslant P_2$, gdyż wówczas będziemy mieli

$$L < L_2 \leqslant P_2 = P .$$

Nierówność $L_2 \leqslant P_2$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(3n+2) \cdot (3n+3) \cdot (3n+4) \leqslant (3n+3)^3 ,$$

$$(3n+2) \cdot (3n+4) \leqslant (3n+3)^2 ,$$

$$(3n+3-1) \cdot (3n+3+1) \leqslant (3n+3)^2 ,$$

$$(3n+3)^2 - 1^2 \leqslant (3n+3)^2 ,$$

a ta nierówność jest oczywiście prawdziwa.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.

Zadanie **8.**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Początek danego w zadaniu szeregu wygląda następująco

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{4^8}+\ldots$$

Pozieważ szereg ma wyrazy dodatnie, jego suma nie zmieni się przy zmianie kolejności sumowania jego wyrazów.

Zauważmy, że wyrazy o indeksach nieparzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $1/4$ i pierwszym wyrazie $1/2$. Ponieważ suma szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q, gdzie $|q|<1$, jest równa

$$\frac{a_1}{1-q}\,,$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\ldots=\frac{1/2}{1-1/4}=\frac{2}{3}\,.$$

Podobnie, wyrazy o indeksach parzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $1/16$ i pierwszym wyrazie $1/16$. Przy tym

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{4^8}+\ldots=\frac{1}{15}\,.$$

Suma danego w zadaniu szeregu jest więc równa

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{15}=\frac{11}{15}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/15$.