ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski
Egzamin 16.02.2007

Zadanie **1.**

W każdym z poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt. Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że $T(24)$ jest fałszywe, $T(25)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+10)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(14)$ jest fałszywe **TAK**

b) $T(34)$ jest fałszywe **NIE**

c) $T(15)$ jest prawdziwe **NIE**

d) $T(35)$ jest prawdziwe **TAK**

1.2 Czy z tych samych założeń, co w poprzednim zadaniu wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(11) \Rightarrow T(34)$ **NIE**

b) $T(13) \Rightarrow T(35)$ **TAK**

c) $T(14) \Rightarrow T(36)$ **TAK**

d) $T(17) \Rightarrow T(37)$ **TAK**

1.3 Czy liczba $\binom{n}{11}$ jest podzielna przez $\binom{n}{10}$, jeżeli

a) $n=50$ **NIE**

b) $n=54$ **TAK**

c) $n=55$ **NIE**

d) $n=59$ **NIE**

1.4 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $100! < 10^{200}$ **TAK**

b) $100! < 1000^{30}$ **NIE**

c) $2^{1000} < 1000^{100}$ **NIE**

d) $2^{1000000} < 1000000^{1000}$ **NIE**

Zadanie **2.**

W poniższym zadaniu udziel dziesięciu odpowiedzi. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n{-}5)$ punktów.
Przypomnienie: na analizie liczby 0 nie uważamy za liczbę naturalną.

Podać kresy zbiorów.

a) $A=\left\{\dfrac{10-3n}{3} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\quad \inf A{=}{-}\infty \quad \sup A{=}7/3$

b) $B=\left\{a^2 : a\in A\right\}$ $\quad \inf B{=}1/9 \quad \sup B{=}{+}\infty$

c) $C=\left\{\dfrac{1}{2^m}-\dfrac{1}{3^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\quad \inf C{=}{-}1/3 \quad \sup C{=}1/2$

d) $D=\left\{\dfrac{1}{2^m}-3^n : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\quad \inf D{=}{-}\infty \quad \sup D{=}{-}5/2$

e) $E=\{\sin x : x\in(\pi/3,\, 5\pi/4)\}$ $\quad \inf E{=}{-}\sqrt{2}/2 \quad \sup E{=}1$

Zadanie **3.**

W poniższym zadaniu udziel piętnastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-10)$ punktów.

Zmienne m,n przebiegają zbiór liczb naturalnych.

Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\underset{n}{\forall}\ |a_n-(-1)^n|<\frac{1}{n}\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny **NIE**

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny **TAK**

c) $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ **NIE**

d) $\underset{n}{\forall}\ a_n<5/2$ **TAK**

e) $\underset{n}{\exists}\ a_n<-1/2$ **TAK**

f) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}\ (|a_m-a_n|<3)$ **NIE**

g) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}\ (|a_m-a_n|<4)$ **TAK**

h) $a_1<a_2$ **TAK**

i) $a_2<a_3$ **NIE**

j) $|a_2-a_3|>1$ **TAK**

k) $|a_3-a_5|>\frac{1}{2}$ **NIE**

l) $|a_4-a_6|<\frac{1}{2}$ **TAK**

m) $|a_4+a_5|<\frac{1}{2}$ **TAK**

n) $|a_{37}-a_{73}|<\frac{1}{10}$ **TAK**

o) $|a_{37}-a_{73}|>10$ **NIE**

Zadanie **4.**

Uzasadnienie poprawności przykładów nie jest wymagane.

Za poprawne podanie obydwu przykładów otrzymasz 5 punktów.

a) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{n}$ jest **rozbieżny**.

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

b) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2007 \text{ dla } x = 0\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2008 \text{ dla } x = 1$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2010 \text{ dla } x = 2\,.$$

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_0 = 2007$, $a_1 = a_2 = 1/2$ oraz $a_n = 0$ dla $n \geqslant 3$.

Zadanie **5.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n^4+3n^2-4)\cdot(-1)^n}{5n^6+3n^3-4}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej:

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Szacując od góry szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(5n^4+3n^2-4)\cdot(-1)^n}{5n^6+3n^3-4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^4+3n^2-4}{5n^6+3n^3-4} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^4+3n^4+0}{5n^6+0-4n^6} = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

i korzystając z kryterium porównawczego stwierdzamy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(5n^4+3n^2-4)\cdot(-1)^n}{5n^6+3n^3-4} \right|$$

jest zbieżny, a co za tym idzie, zbieżny jest także szereg dany w treści zadania.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Zadanie **6.**

W Dakistanie zamiast pochodnej funkcji używa się kieropochodnej definiowanej wzorem

$$f^{\heartsuit}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^2}\,.$$

Niech $f(x)=2x^4-x$. Obliczyć $f^{\heartsuit}(x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których istnieje.

Rozwiązanie:

$$f^{\heartsuit}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^4-x-h-2x^4+x}{h^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{8x^3h+12x^2h^2+8xh^3+2h^4-h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{8x^3-1}{h}+12x^2+8xh+2h^2\right).$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x mamy

$$\lim_{h\to 0}\left(12x^2+8xh+2h^2\right)=12x^2\,,$$

natomiast granica

$$\lim_{h\to 0}\frac{8x^3-1}{h}$$

istnieje tylko wtedy, gdy $8x^3-1=0$ i jest wówczas równa 0.

Stąd $f^{\heartsuit}(x)$ istnieje tylko dla $x=1/2$.

Odpowiedź: Kieropochodna $f^{\heartsuit}(x)$ danej w zadaniu funkcji f istnieje tylko dla $x=1/2$ i jest równa $f^{\heartsuit}(1/2)=12\cdot(1/2)^2=3$.

Zadanie **7.**

Rozwiązać nierówność

$$\log_{|(x-1)/2|} 20 \leqslant \log_{|(x-1)/2|}\left(x^2-9x+20\right).$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie rozpoczynamy od wypisania warunków wyznaczających dziedzinę nierówności.

1° $|(x-1)/2|>0$ - ten warunek jest spełniony dla $x\neq 1$

2° $|(x-1)/2|\neq 1$ - ten warunek jest spełniony dla $x\notin\{-1,3\}$

3° $x^2-9x+20>0$ - po rozwiązaniu nierówności kwadratowej otrzymujemy $x\in(-\infty,4)\cup(5,+\infty)$

Zatem dziedziną nierówności jest zbiór

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,3)\cup(3,4)\cup(5,+\infty).$$

Funkcja logarytmiczna o podstawie większej od 1 jest rosnąca. Zatem w przypadku, gdy $|(x-1)/2|>1$, czyli $x\in(-\infty,-1)\cup(3,4)\cup(5,+\infty)$, możemy w danej nierówności pominąć logarytmy. Otrzymujemy nierówność

$$20\leqslant x^2-9x+20,$$

czyli

$$0\leqslant x^2-9x,$$

co po rozwiązaniu daje $x\in(-\infty,0]\cup[9,+\infty)$. Po uwzględnieniu warunku $x\in(-\infty,-1)\cup(3,4)\cup(5,+\infty)$ otrzymujemy następujący przyczynek do zbioru rozwiązań

$$(-\infty,-1)\cup[9,+\infty).$$

Z kolei funkcja logarytmiczna o podstawie mniejszej od 1 jest malejąca. Zatem w przypadku, gdy $0<|(x-1)/2|<1$, czyli $x\in(-1,1)\cup(1,3)$, możemy w danej nierówności pominąć logarytmy zmieniając jednocześnie kierunek nierówności. Otrzymujemy

$$20\geqslant x^2-9x+20,$$

co po rozwiązaniu daje $x\in[0,9]$. Po uwzględnieniu warunku $x\in(-1,1)\cup(1,3)$ otrzymujemy następujący przyczynek do zbioru rozwiązań

$$[0,1)\cup(1,3).$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest zbiór

$$(-\infty,-1)\cup[0,1)\cup(1,3)\cup[9,+\infty).$$

Zadanie **8.**

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-64)^n \cdot n \cdot x^{3n}}{\sqrt{n^2+1}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\left| \frac{(-64)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{3n+3}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{(-64)^n \cdot n \cdot x^{3n}} \right| =$$

$$= 64 \cdot |x|^3 \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}} \to 64 \cdot |x|^3 \begin{cases} >1 & \text{dla} \quad |x| > 1/4 \\ <1 & \text{dla} \quad |x| < 1/4 \end{cases}$$

Stąd wynika, że dany szereg jest zbieżny dla $|x| < 1/4$, a rozbieżny dla $|x| > 1/4$.

Pozostaje rozważyć przypadek $x = \pm 1/4$. Dany w treści zadania szereg potęgowy przyjmuje wówczas postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-64)^n \cdot n}{(\pm 4)^{3n} \cdot \sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n \cdot \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}\,.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1\,,$$

wyraz ogólny powyższego szeregu nie dąży do zera, a zatem szereg jest rozbieżny. Korzystamy tu z równoważności

$$a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0\,.$$

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-1/4, 1/4)$.