**ANALIZA A1** Wykład: J. Wróblewski

**KOLOKWIUM nr 9, zestaw B, 12.12.2006**

*Zadanie* **17.**

**a) (3 punkty)** Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że $a_n = 1/4^n$ dla nieskończenie wielu $n$, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4\,.$$

*Rozwiązanie:*

Gdyby $a_n = 1/4^n$ dla każdego $n$, wówczas mielibyśmy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}\,.$$

Sumę szeregu możemy zwiększyć o $4-1/3=11/3$ zwiększając tylko jego pierwszy wyraz, co prowadzi nas do następującego przykładu:

$$a_1 = \frac{1}{4} + \frac{11}{3} = \frac{47}{12}, \qquad a_n = \frac{1}{4^n} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2\,.$$

**b) (4 punkty)** Podać przykład takiego ciągu $(a_n)$, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) = 6, \qquad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) = 2$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}) = 5\,.$$

*Rozwiązanie:*

Niech

$$a_1 = 2$$

oraz

$$a_{3n-1} = 3, \qquad a_{3n} = 1, \qquad a_{3n+1} = -4$$

dla $n \geqslant 1$.

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) = (2+3+1)+(-4+3+1)+(-4+3+1)+(-4+3+1)+\ldots =$$
$$= 6+0+0+0+\ldots = 6\,,$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) = 2+(3+1-4)+(3+1-4)+(3+1-4)+\ldots =$$
$$= 2+0+0+0+\ldots = 2$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}) = 2+3+(1-4+3)+(1-4+3)+(1-4+3)+\ldots =$$
$$= 5+0+0+0+\ldots = 5\,.$$

*Zadanie* **18.**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
**Wyjątki:** Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

**18.1** Czy jest prawdą, że

**a)** $\sqrt{(2-\log_3 13)^2} = 2-\log_3 13$ **NIE**

**b)** $\sqrt{(2-\log_2 5)^2} = 2-\log_2 5$ **NIE**

**c)** $\sqrt{(2-\log_5 19)^2} = 2-\log_5 19$ **TAK**

**d)** $\sqrt{(2-\log_4 13)^2} = 2-\log_4 13$ **TAK**

**18.2** Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$ **TAK**

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$ **TAK**

**c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ **NIE**

**d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2}$ **TAK**

**18.3** Czy jest prawdą, że

**a)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+2} = 0$ **TAK**

**b)** $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$ **TAK**

**c)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ **TAK**

**d)** $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+4}{x+2} = 0$ **NIE**

**18.4** Czy ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika, że

**a)** szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny **NIE**

**b)** szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ jest zbieżny **NIE**

**c)** szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3\cdot a_n)$ jest rozbieżny **NIE**

**d)** szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3+a_n)$ jest rozbieżny **TAK**