

ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr **9**, zestaw **A**, 12.12.2006

Zadanie 17.

a) (4 punkty) Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n})$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1})$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) = 6, \quad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) = 1$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) = 3.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a_1 = 1$$

oraz

$$a_{3n-1} = 2, \quad a_{3n} = 3, \quad a_{3n+1} = -5$$

dla $n \geq 1$.

Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) &= (1 + 2 + 3) + (-5 + 2 + 3) + (-5 + 2 + 3) + (-5 + 2 + 3) + \dots = \\ &= 6 + 0 + 0 + 0 + \dots = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) &= 1 + (2 + 3 - 5) + (2 + 3 - 5) + (2 + 3 - 5) + \dots = \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) &= 1 + 2 + (3 - 5 + 2) + (3 - 5 + 2) + (3 - 5 + 2) + \dots = \\ &= 3 + 0 + 0 + 0 + \dots = 3. \end{aligned}$$

b) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że $a_n = 1/3^n$ dla nieskończenie wielu n , a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3.$$

Rozwiązanie:

Gdyby $a_n = 1/3^n$ dla każdego n , wówczas mielibyśmy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

Sumę szeregu możemy zwiększyć o $3 - 1/2 = 5/2$ zwiększając tylko jego pierwszy wyraz, co prowadzi nas do następującego przykładu:

$$a_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{17}{6}, \quad a_n = \frac{1}{3^n} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Zadanie 18.

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki: Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

18.1 Czy jest prawdą, że

a) $\sqrt{(2 - \log_3 7)^2} = 2 - \log_3 7$ **TAK**

b) $\sqrt{(2 - \log_2 7)^2} = 2 - \log_2 7$ **NIE**

c) $\sqrt{(2 - \log_5 23)^2} = 2 - \log_5 23$ **TAK**

d) $\sqrt{(2 - \log_4 17)^2} = 2 - \log_4 17$ **NIE**

18.2 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{6}$ **TAK**

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{6}{7}$ **TAK**

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ **NIE**

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{3}$ **TAK**

18.3 Czy jest prawdą, że

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 9}{x + 3} = 0$ **NIE**

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$ **TAK**

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ **TAK**

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$ **TAK**

18.4 Czy ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika, że

a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny **NIE**

b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$ jest zbieżny **NIE**

c) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (5 \cdot a_n)$ jest rozbieżny **NIE**

d) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (5 + a_n)$ jest rozbieżny **TAK**