ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 8, zestaw B, 5.12.2006

Zadanie **15.**

a) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^8$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Niech

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}}\,.$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}}$$

jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, gdyż wartości bezwzględne jego wyrazów $|a_n| = 1/\sqrt[6]{n}$ tworzą ciąg malejący zbieżny do zera, a przy tym kolejne wyrazy mają różne znaki.

Ponadto szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny jako szereg harmoniczny, natomiast szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$$

jest zbieżny, gdyż szeregi postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ są zbieżne dla $p > 1$.

b) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = 5 \qquad \text{oraz} \qquad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = 3\,.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a_1 = 3$$

oraz

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n$$

dla $n \geqslant 2$.

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = (3+2) + (-2+2) + (-2+2) + (-2+2) + \ldots = 5 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 5$$

oraz

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = 3 + (2-2) + (2-2) + (2-2) + \ldots = 3 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 3\,.$$

Zadanie **16.**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki: Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

16.1 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+1}{4\sqrt{n^6+5}+3\sqrt[3]{n^9+17}} = \frac{5}{7}$ **TAK**

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+1}{4\sqrt{n^2+5}+3\sqrt[3]{n^3+17}} = \frac{5}{3}$ **NIE**

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+1}{4\sqrt{n^7+5}+3\sqrt[3]{n^8+17}} = 0$ **TAK**

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+1}{4\sqrt{n^5+5}+3\sqrt[3]{n^7+17}} = 0$ **NIE**

16.2 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli wiemy, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$ **NIE**

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **NIE**

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ **TAK**

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2}$ **NIE**

16.3 Czy jest prawdą, że

a) $2+\log_5 3 = \log_5 6$ **NIE**

b) $2+\log_5 3 = \log_5 75$ **TAK**

c) $2\cdot\log_5 3 = \log_5 6$ **NIE**

d) $2\cdot\log_5 3 = \log_5 9$ **TAK**

16.4 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$ **TAK**

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3+1}$ **NIE**

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(-1)^n}{2n^3+1}$ **TAK**

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(-1)^n}{2n^3+1}$ **NIE**