ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 8, zestaw A, 5.12.2006

Zadanie **15.**

a) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=5 \qquad \text{oraz} \qquad a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1})=2\,.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a_1=2$$

oraz

$$a_n=3\cdot(-1)^n$$

dla $n\geqslant 2$.

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=(2+3)+(-3+3)+(-3+3)+(-3+3)+\ldots=5+0+0+0+\ldots=5$$

oraz

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1})=2+(3-3)+(3-3)+(3-3)+\ldots=2+0+0+0+\ldots=2\,.$$

b) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^6$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Niech

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}\,.$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$$

jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, gdyż wartości bezwzględne jego wyrazów $|a_n|=1/\sqrt[4]{n}$ tworzą ciąg malejący zbieżny do zera, a przy tym kolejne wyrazy mają różne znaki.

Ponadto szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

jest rozbieżny jako szereg harmoniczny, natomiast szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^6=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

jest zbieżny, gdyż szeregi postaci $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ są zbieżne dla $p>1$.

Zadanie **16.**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki: Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

16.1 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+1}{4\sqrt{n^2+5}+3\sqrt[3]{n+17}}=\dfrac{5}{4}$ **NIE**

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+1}{4\sqrt{n^5+5}+3\sqrt[3]{n^6+17}}=0$ **TAK**

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+1}{4\sqrt{n^3+5}+3\sqrt[3]{n^4+17}}=0$ **NIE**

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+1}{4\sqrt{n^4+5}+3\sqrt[3]{n^6+17}}=\dfrac{5}{7}$ **TAK**

16.2 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, jeżeli wiemy, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ **NIE**

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{6}{7}$ **NIE**

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$ **TAK**

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{5}{3}$ **NIE**

16.3 Czy jest prawdą, że

a) $2\cdot\log_3 5=\log_3 10$ **NIE**

b) $2\cdot\log_3 5=\log_3 25$ **TAK**

c) $2+\log_3 5=\log_3 10$ **NIE**

d) $2+\log_3 5=\log_3 45$ **TAK**

16.4 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(-1)^n}{2n^2+1}$ **NIE**

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(-1)^n}{2n^3+1}$ **TAK**

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2n^3+1}$ **NIE**

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2n^4+1}$ **TAK**