ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 7, zestaw B, 28.11.2006

Zadanie **13.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+3}{\sqrt{n^{10}+3}}+\frac{5n^3+6}{\sqrt{n^{10}+6}}+\frac{5n^3+9}{\sqrt{n^{10}+9}}+\frac{5n^3+12}{\sqrt{n^{10}+12}}+\ldots+\frac{5n^3+6n^2}{\sqrt{n^{10}+6n^2}}\right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $2n^2$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n=\sum_{k=1}^{2n^2}\frac{5n^3+3k}{\sqrt{n^{10}+3k}}\,.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n^2}\frac{5n^3+3k}{\sqrt{n^{10}+3k}}\leqslant\sum_{k=1}^{2n^2}\frac{5n^3+6n^2}{\sqrt{n^{10}+0}}=\frac{2n^2\left(5n^3+6n^2\right)}{n^5}=c_n\,.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n^2}\frac{5n^3+3k}{\sqrt{n^{10}+3k}}\geqslant\sum_{k=1}^{2n^2}\frac{5n^3+0}{\sqrt{n^{10}+6n^2}}=\frac{2n^2\cdot 5n^3}{\sqrt{n^{10}+6n^2}}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^5}{\sqrt{n^{10}+6n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\sqrt{1+6n^{-8}}}=10$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\left(5n^3+6n^2\right)}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\left(10+12n^{-1}\right)=10\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=10\,.$$

Zadanie **14.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_n = \dfrac{\binom{3n}{n}}{7^n}$.

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{\binom{3n}{n}} = \frac{(3n+3)! \cdot 7^n \cdot n! \cdot (2n)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)! \cdot 7^{n+1} \cdot (3n)!} =$$
$$= \frac{(3n)! \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot 7^n \cdot n! \cdot (2n)!}{n! \cdot (n+1) \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot 7^{n+1} \cdot (3n)!} =$$
$$= \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot 7} \to \frac{27}{28} < 1\,.$$

Zatem na mocy kryterium d'Alemberta dany w zadaniu szereg jest zbieżny.