ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 6, zestaw A, 21.11.2006

Zadanie **11.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4-n^2+1}{5n^5-n^3+1}+\frac{3n^4-2n^2+4}{5n^5-2n^3+8}+\frac{3n^4-3n^2+9}{5n^5-3n^3+27}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}+\ldots+\frac{3n^4-2n^3+4n^2}{5n^5-2n^4+8n^3}\right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $2n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}\,.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}\leqslant\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-0+4n^2}{5n^5-2n^4+0}=\frac{2n(3n^4+4n^2)}{5n^5-2n^4}=c_n\,.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}\geqslant\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-2n^3+0}{5n^5-0+8n^3}=\frac{2n(3n^4-2n^3)}{5n^5+8n^3}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=6/5\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=6/5\,.$$

Zadanie **12.**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki:
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

12.1 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^3} = \frac{1}{3}$ **NIE**

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{3}}{n^3} = \frac{1}{6}$ **TAK**

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{\binom{n}{2}} = 2$ **TAK**

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = 0$ **TAK**

12.2 Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$, jeżeli

a) $a=2$, $b=2$ **TAK**

b) $a=3/2$, $b=3$ **TAK**

c) $a=2$, $b=3$ **NIE**

d) $a=3/2$, $b=2$ **NIE**

12.3 Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{n\geqslant 100}{\forall} \ |a_n - 7| < 2\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) $\underset{n\geqslant 20}{\exists} \ |a_n - 8| < 1$ **NIE**

b) $\underset{n\geqslant 200}{\forall} \ a_n > 0$ **TAK**

c) $\underset{n\leqslant 150}{\forall} \ a_n < 10$ **NIE**

d) $\underset{n\leqslant 20}{\exists} \ a_n > 0$ **NIE**

12.4 Czy z tego samego warunku, co w zadaniu powyżej, wynika, że

a) $\underset{n\leqslant 100}{\exists} \ \underset{m>n}{\forall} \ |a_n - a_m| < 5$ **TAK**

b) $\underset{n\geqslant 200}{\forall} \ \underset{m>n}{\forall} \ |a_n - a_m| < 3$ **NIE**

c) $\underset{n\geqslant 50}{\forall} \ \underset{m>n}{\forall} \ |a_n - a_m| < 5$ **NIE**

d) $\underset{n\geqslant 20}{\exists} \ \underset{m>n}{\exists} \ |a_n - a_m| < 1$ **TAK**