**ANALIZA A3** Wykład: J. Wróblewski
**KOLOKWIUM nr 12, 21.01.2008**

*Zadanie* **23.**

Rozstrzygnąć różniczkowalność funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+x^3+x^2y+xy^2+y^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla}\quad x=y=0\end{cases}$$

w punkcie $(0,0)$.

Funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $(x_0,y_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie obie pochodne cząstkowe oraz

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*Rozwiązanie:*

Z równości $f(x,0)=x^2+x$ wynika $f'_x(x,0)=2x+1$, skąd $f'_x(0,0)=1$ i podobnie $f'_y(0,0)=1$.

Po podstawieniu danych z zadania lewa strona warunku

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

przyjmuje postać

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot(x-0)-f'_y(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x^4+x^3+x^2y+xy^2+y^3+y^4}{x^2+y^2}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+x^3+x^2y+xy^2+y^3+y^4-(x+y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,. \qquad (\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit)$$

Korzystając z oszacowań

$$|x|\leqslant\left(x^2+y^2\right)^{1/2}$$

$$|y|\leqslant\left(x^2+y^2\right)^{1/2}$$

otrzymujemy

$$\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\frac{(x^2+y^2)^{4/2}+(x^2+y^2)^{4/2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}=2\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\to 0$$

przy $(x,y)\to(0,0)$.

Na mocy twierdzenia o trzech funkcjach granica $(\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit)$ istnieje i jest równa 0, a to pociąga różniczkowalność funkcji $f$ w punkcie $(0,0)$.

*Zadanie* **24.**

Wyznaczyć i sklasyfikować punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2+xy+yz+axz$$

w zależności od parametru rzeczywistego $a$.

Wolno pominąć dwie wartości parametru $a$.

*Rozwiązanie:*

Gradient funkcji $f$ dany jest wzorem

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=(6x+y+az,\, 6y+x+z,\, 6z+y+ax)\ .$$

Przyrównując gradient do zera otrzymujemy układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x+y+az & = & 0\\ 6y+x+z & = & 0\\ 6z+y+ax & = & 0\end{array}\right.$$

Zauważamy, że $x=y=z=0$ jest rozwiązaniem tego układu. Jest to jedyne rozwiązanie, o ile macierz współczynników układu równań ma niezerowy wyznacznik.

Obliczamy

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 1 & a\\ 1 & 6 & 1\\ a & 1 & 6\end{pmatrix}=204+2a-6a^2\ ,$$

co jest różne od zera dla

$$a\notin\left\{-\frac{17}{3},\ 6\right\}$$

i właśnie te dwie wartości $a$ odrzucamy.

Hesjan funkcji $f$ ma postać

$$\mathrm{H}\, f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 6 & 1 & a\\ 1 & 6 & 1\\ a & 1 & 6\end{pmatrix}$$

Zauważamy, że $6>0$,

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}=35>0$$

oraz

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 1 & a\\ 1 & 6 & 1\\ a & 1 & 6\end{pmatrix}=204+2a-6a^2\left\{\begin{array}{lll} >0 & \text{dla} & a\in(-17/3,\, 6)\\ <0 & \text{dla} & a\in(-\infty,\, -17/3)\cup(6,\, +\infty)\end{array}\right.$$

W pierwszym przypadku hesjan jest dodatnio określony i w punkcie $(0,0,0)$ funkcja $f$ ma lokalne minimum.

W drugim przypadku hesjan jest nieokreślony i punkt $(0,0,0)$ jest punktem siodłowym.